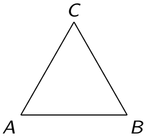
Izometrie własne trójkąta równobocznego – I

Opiszemy grupę D_3.

Mamy dany trójkąt równoboczny



Niech Φ będzie izometrią powyższego trójkąta.

Wtedy

$$\Phi(A) = A \qquad \text{lub} \qquad \Phi(A) = B \qquad \text{lub} \qquad \Phi(A) = C.$$

Jeśli $\Phi(A) = A$, to $\Phi(B) = B$ lub $\Phi(B) = C$.

Jeśli $\Phi(B) = B$, to $\Phi(C) = C$.

Jeśli $\Phi(B) = C$, to $\Phi(C) = A$, a więc w tym przypadku otrzymujemy permutacje

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}.$$

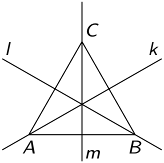
Podobnie, gdy $\Phi(A) = B$, to otrzymujemy permutacje

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},$$

a gdy $\Phi(A) = C$, to otrzymujemy permutacje

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}.$$

Izometrie własne trójkąta równobocznego – II



Zauważmy, że

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathrm{Id}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \leftrightarrow S_k, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} \leftrightarrow S_m,$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \leftrightarrow O_{120^\circ}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} \leftrightarrow O_{240^\circ}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \leftrightarrow S_l.$$

Zatem

$$D_3 = \{\mathrm{Id}, O_{120^\circ}, 0_{240^\circ}, S_k, S_l, S_m\}.$$

Izometrie własne trójkąta równobocznego – III

$$\mathrm{Id} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, \quad O_{120^\circ} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad O_{240^\circ} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},$$

$$S_k \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \quad S_l \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \quad S_m \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

$\circ$	Id	O_{120°	O_{240°	S_k	S_l	S_m
Id	Id	O_{120°	O_{240°	S_k	S_l	S_m
O_{120°	O_{120°	O_{240°	Id	S_m	S_k	S_l
O_{240°	O_{240°	Id	O_{120°	S_l	S_m	S_k
S_k	S_k	S_l	S_m	Id	O_{120°	O_{240°
S_l	S_l	S_m	S_k	O_{240°	Id	O_{120°
S_m	S_m	S_k	S_l	O_{120°	O_{240°	Id

$$\Phi \circ \mathrm{Id} = \Phi = \mathrm{Id} \circ \Phi$$

$$O_\alpha \circ O_\beta = O_{(\alpha+\beta) \bmod 360^\circ}$$

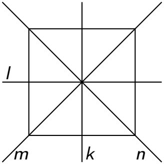
$$O_{120^\circ} \circ S_k \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} \leftrightarrow S_m$$

$$S_k \circ O_{120^\circ} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} \leftrightarrow S_l$$

$$S_x \circ S_x = \mathrm{Id}$$

$$S_k \circ S_l \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \leftrightarrow O_{120^\circ}$$

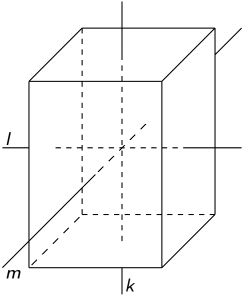
Izometrie własne kwadratu



$$D_4 = \{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}.$$

$\circ$	Id	O_{90°	O_{180°	O_{270°	S_k	S_l	S_m	S_n
Id	Id	O_{90°	O_{180°	O_{270°	S_k	S_l	S_m	S_n
O_{90°	O_{90°	O_{180°	O_{270°	Id	S_n	S_m	S_k	S_l
O_{180°	O_{180°	O_{270°	Id	O_{90°	S_l	S_k	S_n	S_m
O_{270°	O_{270°	Id	O_{90°	O_{180°	S_m	S_n	S_l	S_k
S_k	S_k	S_m	S_l	S_n	Id	O_{180°	O_{90°	O_{270°
S_l	S_l	S_n	S_k	S_m	O_{180°	Id	O_{270°	O_{90°
S_m	S_m	S_l	S_n	S_k	O_{90°	O_{270°	Id	O_{180°
S_n	S_n	S_k	S_m	S_l	O_{270°	O_{90°	O_{180°	Id

Niech F będzie prostopadłościanem



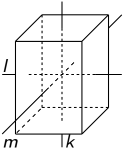
przy czym zakładamy, że krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają różne długości.
Jeśli G jest grupą izometrii powyższego prostopadłościanu, to

$$G = \{\mathrm{Id}, S_k, S_l, S_m, S_{kl}, S_{km}, S_{lm}, S_O\},$$

gdzie

- S_x jest symetrią względem (obrót wokół) prostej x,
- S_{xy} jest symetrią względem płaszczyzny zawierającej proste x i y,
- S_O jest symetrią względem środka prostopadłościanu (tj. punktu przecięcia prostych k, l i m).

Izometrie własne prostopadłościanu - II



$\circ$	Id	S_k	S_l	S_m	S_{kl}	S_{km}	S_{lm}	S_O
Id	Id	S_k	S_l	S_m	S_{kl}	S_{km}	S_{lm}	S_O
S_k	S_k	Id	S_m	S_l	S_{km}	S_{kl}	S_O	S_{lm}
S_l	S_l	S_m	Id	S_k	S_{lm}	S_O	S_{lk}	S_{km}
S_m	S_m	S_l	S_k	Id	S_O	S_{lm}	S_{km}	S_{kl}
S_{kl}	S_{kl}	S_{km}	S_{lm}	S_O	Id	S_k	S_l	S_m
S_{km}	S_{km}	S_{kl}	S_O	S_{lm}	S_k	Id	S_m	S_l
S_{lm}	S_{lm}	S_O	S_{kl}	S_{km}	S_l	S_m	Id	S_k
S_O	S_O	S_{lm}	S_{km}	S_{kl}	S_m	S_l	S_k	Id

Zadanie

Niech $G := \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. W zbiorze G definiujemy działanie $*$ wzorem

$$x * y := xy - x - y + 2.$$

Udowodnić, że działanie $*$ jest dobrze określone oraz że zbiór G z działaniem $*$ jest grupą.

0° Poprawność definicji.

Musimy pokazać, że jeśli $x, y \in G$, to $x * y$.

Innymi słowy, musimy pokazać, że jeśli $x, y > 1$, to $xy - x - y + 2 > 1$.

Mamy

$$xy - x - y + 2 = (x - 1)(y - 1) + 1 > 1.$$

1° Łączność

Musimy pokazać, że jeśli $x, y, z \in G$, to

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Mamy

$$\begin{aligned} x * (y * z) = x * (yz - y - z + 2) &= x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\ &= xyz - xy - xz - yz + x + y + z. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$(x * y) * z = xyz - xy - xz - yz + x + y + z.$$

2° Element neutralny.

Szukamy elementu e takiego, że $x * e = x = e * x$ dla każdego $x \in G$.

Równanie $x * e = x$ oznacza, że
$$xe - x - e + 2 = x,$$
skąd
$$e = \frac{2x - 2}{x - 1} = 2.$$
Sprawdzamy, że
$$x * 2 = 2x - x - 2 + 2 = x \qquad \text{i} \qquad 2 * x = 2x - 2 - x + 2 = x.$$
Zatem 2 jest elementem neutralnym.

3° Elementy odwrotne.

Ustalmy $x \in G$.

Musimy znaleźć $y \in G$ taki, że $x * y = 2 = y * x$.

Równanie $x * y = 2$ oznacza, że
$$xy - x - y + 2 = 2.$$
Stąd
$$y = \tfrac{x}{x-1}.$$
Zauważmy, że
$$\tfrac{x}{x-1} = 1 + \tfrac{1}{x-1} > 1,$$
więc $\frac{x}{x-1} \in G$.

Ponadto, istotnie
$$x * \tfrac{x}{x-1} = x\tfrac{x}{x-1} - x - \tfrac{x}{x-1} + 2 = 2.$$
Podobnie
$$\tfrac{x}{x-1} * x = 2.$$

Zadanie

Niech G będzie grupą taką, że $a^2 = 1$ dla każdego $a \in G$.
Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

Warunek z zadania implikuje, że $a^{-1} = a$ dla każdego $a \in G$.
Stąd
$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx.$$