Izometrie

Definicja

Izometrią nazywamy każde przekształcenie Φ płaszczyzny takie, że

$$d(\Phi(P), \Phi(Q)) = d(P, Q)$$

dla dowolnych dwóch punktów P i Q, gdzie $d(-, -)$ jest funkcją odległości.

Uwaga

- Identyczność jest izometrią.
- Złożenie dwóch izometrii jest izometrią.
- Każda izometria jest bijekcją i funkcja do niej odwrotna też jest izometrią.

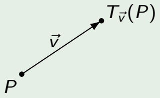
Wniosek

Izometrie płaszczyzny tworzą grupę.

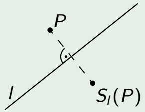
Przykłady izometrii

Przykłady

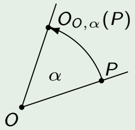
- Przesunięcie $T_{\vec{v}}$ o wektor $\vec{v}$.



- Symetria S_l względem prostej



- Obrót $O_{O,\alpha}$ wokół punktu O o kąt α.



Definicja

Niech F będzie figurą.

Izometrię Φ nazywamy izometrią własną figury F, jeśli $\Phi(F) = F$.

Uwaga

Izometrie własne figury F tworzą grupę.

Oznaczenie

Grupę izometrii figury F oznaczamy D_F.

W szczególności, grupę izometrii n-kąta foremnego oznaczamy D_n i nazywamy n-tą grupą dihedralną.

Cel

Opisać grupy D_n dla małych n.

Izometrie własne wielokąta

Niech F będzie wielokątem.

Jeśli Φ jest izometrią własną wielokąta F, to Φ permutuje wierzchołki wielokąta F.

Zatem, jeśli X jest zbiorem wierzchołków wielokąta F, to możemy izometrii Φ przypisać permutację σ_Φ zbioru X.

Wiadomo, że przyporządkowanie

$$D_F \ni \Phi \mapsto \sigma_\Phi \in S_X$$

jest różnowartościowe.

Wniosek

Aby opisać D_F, należy zbadać, które z permutacji zbioru X zachowują odległości pomiędzy wierzchołkami.

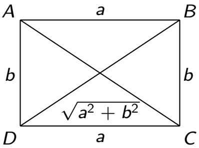
Oznaczenie

Fakt, że $\sigma = \sigma_\Phi$, będziemy zapisywać

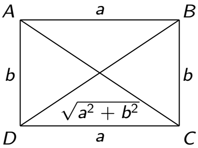
$$\Phi \leftrightarrow \sigma.$$

Przykład – izometrie własne prostokąta I

Niech F będzie prostokątem $ABCD$ niebędącym kwadratem.
Niech
$$a := |AB| \qquad \text{i} \qquad b := |AD|.$$
Wtedy
$$|BC| = b \qquad \text{i} \qquad |CD| = a.$$
Ponadto
$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2} = |BD|.$$
Powyższą sytuację możemy zilustrować rysunkiem

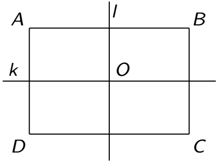


Przykład – izometrie własne prostokąta II



Niech Φ będzie izometrią własną prostokąta F.
Wtedy
$$\Phi(A) = A \qquad \text{lub} \qquad \Phi(A) = B \qquad \text{lub} \qquad \Phi(A) = C \qquad \text{lub} \qquad \Phi(A) = D.$$
Jeśli $\Phi(A) = A$, to
$$|A\Phi(B)| = |\Phi(A)\Phi(B)| = |AB| = a,$$
więc $\Phi(B) = B$.
Analogicznie
$$|A\Phi(C)| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{i} \qquad |A\Phi(D)| = b,$$
więc $\Phi(C) = C$ i $\Phi(D) = D$.
Podobnie, gdy $\Phi(A) = B$, to
$$|B\Phi(B)| = |\Phi(A)\Phi(B)| = |AB| = a,$$
więc $\Phi(B) = A$.
Analogicznie otrzymujemy, że $\Phi(C) = D$ i $\Phi(D) = C$.
Kontynuując, dostajemy, że izometriom własnym prostokąta F odpowiadają permutacje
$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

Przykład – izometrie własne prostokąta III



Zauważmy, że

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathrm{Id}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \leftrightarrow S_l,$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \leftrightarrow O_{180^\circ} := O_{O,180^\circ}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \leftrightarrow S_k.$$

Zatem

$$D_F = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_k, S_l\}.$$

Musimy jeszcze opisać działanie

$$\circ \colon D_F \times D_F \to D_F.$$

Oczywiście

$$\mathrm{Id} \circ \Phi = \Phi = \Phi \circ \mathrm{Id}$$

dla każdej izometrii Φ.

Musimy zatem policzyć $\Phi \circ \Psi$ w sytuacji, gdy Φ i Ψ są obrotami bądź symetriami.

Składanie izometrii I

Metoda I – składanie permutacji

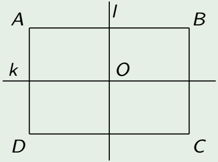
Jeśli

$$\Phi \leftrightarrow \sigma \qquad \text{i} \qquad \Psi \leftrightarrow \tau,$$

to

$$\Phi \circ \Psi \leftrightarrow \sigma \circ \tau.$$

Przykład



Mamy

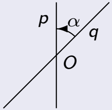
$$S_k \circ O_{180^\circ} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \leftrightarrow S_l,$$

a więc $S_k \circ O_{180^\circ} = S_l$.

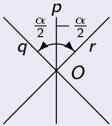
Metoda II – reguły

(1) $O_\alpha \circ O_\beta = O_{(\alpha+\beta) \bmod 360^\circ}$.

(2) $S_p \circ S_q = O_{O,2\alpha}$, gdzie O jest punktem przecięcia prostym q i p oraz α jest miarą (zorientowanego) kąta pomiędzy q i p.



(3) (Jeśli O na prostej p, to) $O_{O,\alpha} \circ S_p = S_q$ oraz $S_p \circ O_{O,\alpha} = S_r$, gdzie q i r są prostymi powstałymi z prostej p przez obrót o (zorientowany) kąt $\frac{\alpha}{2}$ i $-\frac{\alpha}{2}$, odpowiednio.



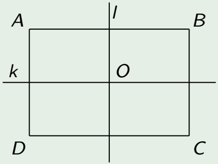
Metoda II – reguły

(1) $O_\alpha \circ O_\beta = O_{(\alpha+\beta) \bmod 360^\circ}$.

(2) $S_p \circ S_q = O_{O,2\alpha}$, gdzie O jest punktem przecięcia prostym q i p oraz α jest miarą (zorientowanego) kąta pomiędzy q i p.

(3) (Jeśli O na prostej p, to) $O_{O,\alpha} \circ S_p = S_q$ oraz $S_p \circ O_{O,\alpha} = S_r$, gdzie q i r są prostymi powstałymi z prostej p przez obrót o (zorientowany) kąt $\frac{\alpha}{2}$ i $-\frac{\alpha}{2}$, odpowiednio.

Przykład



Mamy

$$O_{180^\circ} \circ O_{180^\circ} = O_{360^\circ} = \mathrm{Id}, \qquad S_k \circ S_l = O_{2\cdot 90^\circ} = O_{180^\circ},$$

$$O_{180^\circ} \circ S_l = S_k, \qquad S_l \circ O_{180^\circ} = S_k.$$

Izometrie własne prostokąta – podsumowanie

Mamy tabliczkę mnożenia:

$\circ$	Id	O_{180°	S_k	S_l
Id	Id	O_{180°	S_k	S_l
O_{180°	O_{180°	Id	S_l	S_k
S_k	S_k	S_l	Id	O_{180°
S_l	S_l	S_k	O_{180°	Id

Wskazówka praktyczna

Uwaga

Tabliczka mnożenia grupy jest kwadratem łacińskim, tj. każdy element pojawia się w każdym wierszu i każdej kolumnie dokładnie raz.

$\circ$	Id	O_{180°	S_k	S_l
Id	Id	O_{180°	S_k	S_l
O_{180°	O_{180°	Id	S_l	S_k
S_k	S_k	S_l	Id	O_{180°
S_l	S_l	S_k	O_{180°	Id

$$\Phi \circ \mathrm{Id} = \Phi = \mathrm{Id} \circ \Phi$$
$$O_{180^\circ} \circ O_{180^\circ} = \mathrm{Id}$$
$$S_k \circ S_k = \mathrm{Id}$$