Wojciech Kryszewski

Inkluzje różniczkowe

Wykład monograficzny

Wydział Matematyki i Informatyki UMK
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej PŁ
Toruń/Łódź 2014

ISBN xxxx

© Copyright by Wojciech Kryszewski – 2014

Skład komputerowy LaTeX w wykonaniu autora

Spis treści

Rozdział 1

Odwzorowania wielowartościowe

1.1 Pojęcia i oznaczenia

Niech X będzie zbiorem niepustym. Symbolem $\mathcal{P}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich *niepustych* podzbiorów X. Dodatkowo niech $\mathcal{P}_0(X) := \mathcal{P}(X) \cup \{\emptyset\}$.

Niech Y będzie zbiorem niepustym. *Odwzorowaniem wielowartościowym* określonym na X o wartościach w Y nazywamy dowolną funkcję $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$; tak więc, każdemu $x \in X$, odpowiada dokładnie jeden element $\varphi(x) \in \mathcal{P}(Y)$, tzn. niepusty podzbiór $\varphi(x)$ zbioru Y, nazywany *wartością φ w punkcie* $x \in X$. Piszemy też $X \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathcal{P}(Y)$ lub $X \ni x \mapsto \varphi(x) \subset Y$.

1.1.1 UWAGA: (1) W dalszym ciągu piszemy też $\varphi : X \multimap Y$, lecz zwykle wiąże się to z założeniem, że Y jest przestrzenią topologiczną, a wartości φ są zbiorami domkniętymi (lub nawet zwartymi).

(2) Oczywiście każde odwzorowanie $f : X \to Y$ ($X \ni x \mapsto f(x) \in Y$) można uważać za odwzorowanie wielowartościowe $X \ni x \mapsto \{f(x)\}$. Zatem odwzorowanie wielowartościowe są naturalnym uogólnieniem zwykłych (tzw. *jednowartościowych*) odwzorowań.

(3) Z formalnego punktu widzenia, odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *relacją* w $X \times \mathcal{P}(Y)$, tzn.

$$\varphi = \{(x, Z) \mid x \in X,\, \emptyset \neq Z \subset Y\} \subset X \times \mathcal{P}(Y),$$

taką, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden zbiór $Z \subset Y$, $Z \neq \emptyset$, taki, że $(x, Z) \in \varphi$ i wtedy piszemy $\varphi(x) := Z$. Jednak wygodniej jest utożsamiać odwzorowanie φ ze zbiorem

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\},$$

który nazywa się *wykresem odwzorowania φ*. Ze względów tradycji (oraz w skutek, w zasadzie formalnych, różnic) pojęcia te rozróżnia się.

Niech $A \subset X$. *Obrazem* zbioru A poprzez odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ nazywamy zbiór

$$\varphi(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \;\; y \in \varphi(x)\} = \bigcup_{x \in A} \varphi(x).$$

Jeżeli $B \subset Y$, to *dużym przeciwobrazem* zbioru B poprzez odwzorowanie φ nazywamy zbiór

$$\varphi^{-1}(B) := \{x \in X \mid \varphi(x) \cap B \neq \emptyset\};$$

natomiast *małym przeciwobrazem* zbioru B poprzez φ nazywamy zbiór

$$\varphi^{+1}(B) := \{x \in X \mid \varphi(x) \subset B\}.$$

Jest jasne, że $\varphi^{+1}(B) \subset \varphi^{-1}(B)$. Uzasadnia to przyjętą terminologię. Zauważmy, że jeśli $f : X \to Y$ jest zwykłym (jednowartościowym) odwzorowaniem, to pojęcia małego i dużego przeciwobrazu pokrywają się: zbiór $f^{+1}(B) = f^{-1}(B)$ jest zwykłym przeciwobrazem zbioru B poprzez f.

Niekiedy wygodnie jest zdefiniować *odwzorowanie odwrotne* $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to \mathcal{P}(X)$ wzorem

$$\forall\, y \in \varphi(X) \;\; \varphi^{-1}(y) := \varphi^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid y \in \varphi(x)\}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to poprawna definicja, tzn. dla dowolnego $y \in \varphi(X)$, $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Czytelnik bez trudu udowodni następujące stwierdzenie:

1.1.2 Fakt: *Obrazy oraz przeciwobrazy poprzez φ mają następujące własności: jeśli $A, A_i, A_1, A_2 \subset X$ oraz $B, B_i, B_1, B_2 \subset Y$ dla $i \in I$, to*

(1) $\varphi(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i)$;

(2) $\varphi(A_1 \cap A_2) \subset \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$;

(3) $\varphi(X \setminus A) \supset \varphi(X) \setminus \varphi(A)$;

(4) jeśli $A_1 \subset A_2$, *to* $\varphi(A_1) \subset \varphi(A_2)$; *jeśli* $B_1 \subset B_2$, *to* $\varphi^{\pm1}(B_1) \subset \varphi^{\pm1}(B_2)$;

(5) $\varphi^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i)$;

(6) $\varphi^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subset \bigcap_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i)$;

(7) $\varphi^{+1}(B_1 \cup B_2) \supset \varphi^{+1}(B_1) \cup \varphi^{+1}(B_2)$;

(8) $\varphi^{+1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} \varphi^{+1}(B_i)$;

(9) $A \subset \varphi^{+1}(\varphi(A)) \subset \varphi^{-1}(\varphi(A))$;

(10) $B \subset \varphi(\varphi^{-1}(B))$;

(11) $\varphi(\varphi^{+1}(B)) \subset B$;

(12) $(\varphi^{-1})^{-1}(A) = \varphi(A)$;

(13) $\varphi^{+1}(Y \setminus B) = X \setminus \varphi^{-1}(B)$ *oraz* $\varphi^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus \varphi^{+1}(B)$. □

Niech Z będzie niepustym zbiorem oraz $\psi : Y \to \mathcal{P}(Z)$ odwzorowaniem wielowartościowym. *Złożeniem* odwzorowań φ oraz ψ nazywamy odwzorowanie $\psi \circ \varphi : X \to \mathcal{P}(Z)$ dane wzorem

$$\forall\, x \in X \;\; \psi \circ \varphi(x) := \psi(\varphi(x)).$$

W szczególności zdefiniowane jest obcięcie: jeśli $A \subset X$ oraz $i_A : A \to X$ oznacza włożenie $i_A(a) = a$ dla $a \in A$, to $\varphi|A := \varphi \circ i_A$. Łatwo spostrzec, że $(\varphi|A)(a) = \varphi(a)$ dla dowolnego $a \in A$.

Jeśli $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$, $\varphi' : X' \to \mathcal{P}(Y')$, to definiujemy $\varphi \times \varphi' : X \times X' \to \mathcal{P}(Y \times Y')$ wzorem

$$(\varphi \times \varphi')(x, x') = \varphi(x) \times \varphi'(x') \;\text{ dla }\; (x, x') \in X \times X'.$$

1.1.1 Ćwiczenie. Udowodnić, że $\mathrm{Gr}\,(\psi \circ \varphi) = (\varphi \times id_Z)^{-1}(\mathrm{Gr}\,(\psi)) = (id_X \times \psi)(\mathrm{Gr}\,(\varphi))$ gdzie id_Z (odp. id_X) oznacza identyczność na Z (odp. X).

Łatwo dowieść, że jeśli $C \subset Z$, to

$$(\psi \circ \varphi)^{-1}(C) = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(C)) \;\text{ oraz }\; (\psi \circ \varphi)^{+1}(C) = \varphi^{+1}(\psi^{+1}(C)).$$

1.2 Ciągłość odwzorowań wielowartościowych

Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami metrycznymi (lub, ogólniej, przestrzeniami topologicznymi Hausdorffa ([1])). Powiemy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *górnie półciągłe w punkcie* $x_0 \in X$ jeśli, dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ takiego, że $\varphi(x_0) \subset V$, istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $x \in X$ oraz $d(x, x_0) < \delta$, to $\varphi(x) \subset V$.

Mówimy, że φ jest *górnie półciągłe w zbiorze* $A \subseteq X$ jeśli jest górnie półciągłe w każdym punkcie zbioru A. Mówimy, że φ jest *górnie półciągłe* jeśli jest górnie półciągłe w całej przestrzeni X.

Własność górnej półciągłości oznacza się też *usc*.

1.2.1 FAKT: (1) *Odwzorowanie φ jest usc w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otoczenia V zbioru $\varphi(x_0)$, $\varphi^{+1}(V)$ jest otoczeniem punktu x_0* ([2]).

(2) *Odwzorowanie φ jest usc wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego otwartego $V \subset Y$, $\varphi^{+1}(V)$ jest zbiorem otwartym.*

(3) *Odwzorowanie jest usc wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego domkniętego $C \subset Y$, $\varphi^{-1}(C)$ jest domknięty.*

(4) *Złożenie odwzorowań usc jest odwzorowaniem usc.* □

1.2.1 ĆWICZENIE: Dowód jest łatwy i pozostawia się go jako ćwiczenie.

Powiadamy, że odwzorowanie φ jest *dolnie półciągłe w punkcie* $x_0 \in X$ jeśli, dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ takiego, że $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $x \in X$ oraz $d(x, x_0) < \delta$, to $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$.

Mówimy, że odwzorowanie jest *dolnie półciągłe w zbiorze* $A \subseteq X$ jeżeli jest dolnie półciągłe w każdym punkcie zbioru A; jest ono *dolnie półciągłe*, gdy jest dolnie półciągłe w całej przestrzeni X.

Własność dolnej półciągłości oznacza się też skrótem *lsc*.

1.2.2 FAKT: (1) *Odwzorowanie φ jest lsc w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$ takiego, że $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$, $\varphi^{-1}(V)$ jest otoczeniem punktu x_0.*

(2) *Odwzorowanie φ jest lsc wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego zbioru otwartego $V \subset Y$, $\varphi^{-1}(V)$ jest zbiorem otwartym.*

(3) *Odwzorowanie φ jest lsc wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego zbioru domkniętego $C \subset Y$, $\varphi^{+1}(C)$ jest zbiorem domkniętym.*

(4) *Złożenie odwzorowań lsc jest odwzorowaniem lsc.* □

Dowód tego faktu jest łatwy i pozostawia się go jako ćwiczenie.

Pomiędzy pojęciami usc i lsc na ogół nie ma związku. Łatwo podać przykłady odwzorowań, które są lsc ale nie usc oraz takich, które są usc, lecz nie są lsc.

1.2.3 PRZYKŁAD: Niech $J \subset \mathbb{R}$ oraz niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie dane wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{R} \setminus J \\ [-1, 1], & \text{gdy} \quad x \in J. \end{cases}$$

[1] W takiej sytuacji poniżej wymienione fakty i stwierdzenia wymagają uwagi. Często dla ich prawdziwości potrzebne są dodatkowe założenia dotyczące określonych aksjomatów oddzielania; na ogół chodzi o to, że rozważane przestrzenie muszą być dodatkowo regularne lub normalne.

[2] Przypomnijmy, że otoczeniem zbioru A w przestrzeni metrycznej X nazywa się dowolny zbiór $U \subset X$ taki, że $A \subset \operatorname{int} U$.

Jeśli $J = [a, b]$, to φ jest odwzorowaniem usc; gdy $J = [(a, b)$, to φ jest lsc. Jeżeli zaś np. $J = [a, b)$, to φ nie jest półciągłe ani z góry ani z dołu.

1.2.4 PRZYKŁAD. Niech $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ będą funkcjami półciągłymi z góry i z dołu, odpowiednio, takimi, że $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in X$. Niech $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dane będzie wzorem $\varphi(x) = [f(x), g(x)]$. Wtedy φ jest lsc. Istotnie weźmy zbiór otwarty $V \subset \mathbb{R}$ i załóżmy, że $x \in \varphi^{-1}(V)$. Zatem istnieje $y \in \varphi(x) \cap V$. Weźmy $\varepsilon > 0$ takie,że $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset V$. Oczywiście $y - \varepsilon < y \leqslant g(x)$ oraz $f(x) \leqslant y < y + \varepsilon$. Wtedy mamy $\delta > 0$ takie,że jeśli $d(x', x) < \delta$, to $y - \varepsilon < g(x')$ oraz $f(x') < y + \varepsilon$. W takim razie $\varphi(x') \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Analogicznie dowodzimy, że jeśli f, g są półciągłe z dołu i z góry, odpowiednio, to φ jest usc.

Łatwo zauważyć, że dla (zwykłego) odwzorowania $f : X \to Y$ pojęcia dolnej i górnej półciągłości są równoważne między sobą i pokrywają się z ciągłością.

Półciągłość z dołu w punkcie x_0 można również charakteryzować przy pomocy ciągów.

1.2.5 FAKT. *Odwzorowanie φ jest lsc w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego $y_0 \in \varphi(x_0)$ oraz dowolnego ciągu $x_n \to x_0$, istnieje ciąg $y_n \to y_0$ taki, że $y_n \in \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

DOWÓD. Niech $V \subset Y$ będzie otwarty oraz $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$. Rozważmy $\varphi^{-1}(V)$. Niewątpliwie $x_0 \in \varphi^{-1}(V)$. Pokażemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $B(x_0, \delta) \subset \varphi^{-1}(V)$. Przypuśćmy przeciwnie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, istnieje $x_n \in X$ taki, że $x_n \in B(x_0, 1/n) \setminus \varphi^{-1}(V)$. Wtedy $x_n \to x_0$. Weźmy $y_0 \in \varphi(x_0) \cap V$. Zatem mamy ciąg $y_n \in \varphi(x_n)$ taki, że $y_n \to y_0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $y_n \in V$ przy $n \geqslant n_0$. To oznacza, że $y_n \in \varphi(x_n) \cap V$ a zatem $x_n \in \varphi^{-1}(V)$: sprzeczność.

Na odwrót: niech $y_0 \in \varphi(x_0)$ oraz weźmy ciąg $x_n \to x_0$. Wystarczy pokazać, że $d(y_0, \varphi(x_n)) \to 0$ ([3]). Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $x_0 \in \varphi^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ oraz ten ostatni zbiór jest otwarty, to mamy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \in \varphi^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ o ile $n \geqslant N$. Wobec tego, dla $n \geqslant N$, $\varphi(x_n) \cap B(y_0, \varepsilon)$, co jest równoważne temu, że $d(y_0, \varphi(x_n)) < \varepsilon$. □

Aby podać inną charakteryzację lsc własności będziemy potrzebować następującego pojęcia.

Niech $A \subset X$, niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru A i niech $\psi : A \to \mathcal{P}(Y)$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym. Zbiór zdefiniowany poprzez relację

$$y \in \operatorname*{Lim\,inf}_{x \to x_0} \psi(x) \iff \lim_{x \to x_0} d(y, \psi(x)) = 0$$

nazywamy *granicą dolną odwzorowania wielowartościowego ψ w punkcie x_0* w sensie Kuratowskiego. Zbiór ten jest zawsze domknięty (sprawdzić) lecz może być pusty. Zauważmy, że zachodzi równość

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x \to x_0} \psi(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\eta > 0} \bigcap_{x \in B_A(x_0, \eta),\, x \neq x_0} B(\psi(x), \varepsilon)$$

gdzie

$$B_A(x_0, \eta) := \{x \in A \mid d(x, x_0) < \eta\} \ \text{ oraz } \ B(\psi(x), \varepsilon) := \{y \in Y \mid d(y, \psi(x)) < \varepsilon\}.$$

Zbiór zdefiniowany prze relację

$$y \in \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \psi(x) \iff \liminf_{x \to x_0} d(y, \psi(x)) = 0$$

[3] Tutaj i dalej jeśli $A \subset X$, $x \in X$ to $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ jest *odległością punktu x od zbioru A*.

nazywa się *granicą górną odwzorowania ψ w punkcie x_0*. Powyżej $\liminf$ oznacza granicę górną funkcji $d(y, \psi(\cdot))$ w punkcie x_0; przypomnijmy, że jeśli $f : A \to \mathbb{R}$, to

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{x \in B_A(x_0, \varepsilon),\, x \neq x_0} f(x).$$

Granica górna jest również zbiorem domkniętym (sprawdzić). Podobnie jak poprzednio mamy charakteryzację:

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \psi(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\eta > 0} \bigcup_{x \in B_A(x_0, \eta),\, x \neq x_0} B(\psi(x), \varepsilon).$$

Pożyteczna charakteryzacja granic Kuratowskiego przy pomocy ciągów ma postać:

$$y \in \operatorname*{Lim\,inf}_{x \to x_0} \psi(x) \ \Leftrightarrow\ \forall\, (x_n) \subset A,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0\ \ \exists y_n \in \psi(x_n)\ \ y_n \to y;$$

$$y \in \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \psi(x) \ \Leftrightarrow\ \exists\, (x_n) \subset A,\ x_n \neq x_0,\ x_n \to x_0\ \ \exists y_n \in \psi(x_n)\ \ y_n \to y.$$

1.2.2 Ćwiczenie. Sprawdzić powyższe równoważności.

Łatwo zauważyć, że

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x \to x_0} \psi(x) \subset \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to x_0} \psi(x).$$

Jeśli $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbiorów w przestrzeni metrycznej Y, to

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{n \to \infty} A_n := \{y \in Y \mid \lim_{n \to \infty} d(y, A_n) = 0\},$$

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} A_n := \{y \in Y \mid \liminf_{n \to \infty} d(y, A_n) = 0\}.$$

1.2.3 Ćwiczenie: Dowieść, że

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B(A_k, \varepsilon), \quad \operatorname*{Lim\,inf}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} B(A_k, \varepsilon);$$

tu, dla $A \subset Y$ i $\eta > 0$, $B(A, \eta) := \{y \in T \mid d(y, A) < \eta\}$ jest η-otoczeniem zbioru A

1.2.6 Uwaga: Nie należy mylić podanych definicji *topologicznych* granic ciągów zbiorów z *teoriomnogościowymi* definicjami. Dla ciągu zbiorów (A_n) (w przestrzeni bez topologii) pisze się

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geqslant n} A_k; \quad \operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant n} A_k.$$

Zainteresowanych odsyłam do [**?**, Rozd. IV, Rozd. X].

1.2.4 Ćwiczenie: Odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest lsc w punkcie skupienia x_0 wtedy i tylko wtedy gdy

$$\varphi(x_0) \subset \operatorname*{Lim\,inf}_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Niestety podobna charakteryzacja górnej półciągłości nie jest prawdziwa. Zajmiemy się teraz nieco bardziej szczegółowo tą kwestią. Rozważać będziemy teraz *tylko odwzorowania o* *domkniętych wartościach.* W tym celu przypomnijmy, że zapis $\varphi : X \multimap Y$ oznacza odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ takie, że dla dowolnego $x \in X$, zbiór $\varphi(x)$ jest domknięty.

1.2.7 Fakt: *Jeżeli odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ jest usc, to $\mathrm{Gr}(\varphi)$ jest zbiorem domkniętym.*

Dowód. Przypuśćmy, że $(x, y) \notin \mathrm{Gr}(\varphi)$. Zatem $y \notin \varphi(x)$. Skoro zbiór $\varphi(x)$ jest domknięty, to istnieją otoczenia otwarte V punktu y oraz V' zbioru $\varphi(x)$ takie, że $V \cap V' = \emptyset$. Na mocy usc, zbiór $U = \varphi^{+1}(V')$ jest otwartym otoczeniem punktu x. Twierdzę, że $U \times V \cap \mathrm{Gr}(\varphi) = \emptyset$. Istotnie, jeśli $(x', y') \in U \times V$, to $\varphi(x') \subset V'$. Zatem $y' \notin \varphi(x')$ bo $y' \in V$. Pokazaliśmy, że zbiór $X \times Y \setminus \mathrm{Gr}(\varphi)$ jest otwarty. □

Zauważmy dodatkowo, że odwzorowanie $\psi : X \to \mathcal{P}(Y)$, którego wykres jest domknięty ma domknięte wartości. Wynika to z faktu, iż $\psi(x) \cong \{x\} \times Y \cap \mathrm{Gr}(\psi)$ ([4]) a ten ostatni zbiór jest oczywiście domknięty.

1.2.8 Fakt: *Jeśli $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest usc, zbiór $K \subset X$ jest zwarty, to obraz $\varphi(K)$ jest zwarty.*

Dowód. Rozważmy pokrycie otwarte $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ zbioru $\varphi(K)$. Dla dowolnego $x \in K$, $\varphi(x) \subset \varphi(K)$, zatem $\mathcal{V}$ jest też pokryciem $\varphi(x)$. Niech $\{V_i\}_{i \in I_x}$ będzie skończonym podpokryciem zbioru $\varphi(x)$, tzn. $\varphi(x) \subset V_x := \bigcup_{i \in I_x} V_i$. Jest jasne, że $\varphi(K) \subset \bigcup_{x \in K} V_x$. Dla dowolnego $x \in K$, niech $U_x := \varphi^{+1}(V_x)$. Oczywiście $x \in U_x$ a więc $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$. Zwartość K implikuje, że istnieją $x_1, \ldots, x_m \in K$ takie, że $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. W takim razie $\varphi(K) \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$. To z kolei oznacza, że skończona rodzina $\{V_i \mid i \in \bigcup_{j=1}^{m} I_{x_j}\}$ jest pokryciem $\varphi(K)$. □

1.2.5 Ćwiczenie: Pokazać, że jeśli $\varphi : X \multimap Y$ ma domknięty wykres, zbiór $A \subset X$ jest zwarty, to obraz $\varphi(A)$ jest domknięty.

1.2.9 Fakt: *Jeżeli $\varphi : X \multimap Y$ ma domknięty wykres, odwzorowanie $\Phi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest usc oraz, dla dowolnego $x \in X$, $\varphi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$, to odwzorowanie $X \ni x \mapsto \psi(x) = \varphi(x) \cap \Phi(x)$ jest usc.*

Dowód. Weźmy zbiór domknięty $C \subset Y$ i pokażemy, że przeciwobraz $\psi^{-1}(C)$ jest zbiorem domkniętym. W tym celu weźmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \psi^{-1}(C)$ taki, że $x_n \to x$. Wybierzmy $y_n \in \psi(x_n) \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}(\varphi) \cap \mathrm{Gr}(\Phi)$ czyli, w szczególności, $y_n \in \Phi(x_n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Na mocy poprzedniego faktu, ciąg (y_n) posiada zbieżny podciąg. Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że $y_n \to y \in Y$. Zatem $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\psi)$ oraz $y \in C$. Tak więc $x \in \psi^{-1}(C)$. Dowodzi to domkniętości zbioru $\psi^{-1}(C)$. □

Powiemy, że odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ jest *lokalnie zwarte* (odp. *zwarte*), gdy każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że $\mathrm{cl}\, \varphi(U)$ jet zbiorem zwartym (odp. $\mathrm{cl}\, \varphi(X)$ jest zbiorem zwartym).

1.2.10 Wniosek: *Lokalnie zwarte, a więc także zwarte odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ o domkniętym wykresie jest usc. W szczególności, gdy Y jest przestrzenią zwartą, to odwzorowanie o domkniętym wykresie jest usc.* □

1.2.6 Ćwiczenie. Udowodnić powyższy wniosek.

1.2.11 Przykład: Na ogół odwzorowania o domkniętym wykresie nie są usc. Rozważmy $\varphi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}^2$ dane wzorem $\varphi(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$. Wtedy φ ma domknięty wykres lecz dla $a_0 = 0$ zawieranie $\varphi(a) \subset B(\varphi(0), \varepsilon)$ nie zachodzi dla żadnych $a \neq 0$ ani $\varepsilon > 0$.

[4] Symbol $A \cong B$ oznacza, że zbiory A i B są homeomorficzne.

Wreszcie możemy sformułować ciągową charakteryzację górnej półciągłości.

1.2.12 FAKT: *Odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest usc wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych ciągu $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Gr}\,(\varphi)$ jeżeli $x_n \to x$, to istnieje podciąg $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ciągu (y_n) taki, że $y_{n_k} \to y \in \varphi(x)$.*

DOWÓD. Pokażemy konieczność. Skoro φ ma zwarte wartości i jest usc, to zbiór $\varphi(\{x_n\})$ jest względnie zwarty. Zatem istotnie mamy podciąg $y_{n_k} \to y$. Jednocześnie $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ jest domknięty więc $y \in \varphi(x)$.

Na odwrót: niech $C \subset Y$ będzie domknięty. Weźmy ciąg $x_n \in \varphi^{-1}(C)$ taki, że $x_n \to x \in X$. Niech $y_n \in C \cap \varphi(x_n)$. Zgodnie z założeniem, dla pewnego podciągu $y_{n_k} \to y \in \varphi(x)$. Z domkniętości C, również $y \in C$. Zatem $x \in \varphi^{-1}(C)$. Zwartość wartości φ jest oczywista. □

1.2.7 ĆWICZENIE. Udowodnić, że odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest usc wtedy i tylko wtedy gdy rzut $\pi_X|\mathrm{Gr}\,(\varphi) : \mathrm{Gr}\,(\varphi) \to X$ wykresu na „oś" X (tzn. rzut $\pi_X : X \times Y \to X$ produktu $X \times Y$ na Y dany jest wzorem $\pi_X(x, y) = x$ dla $(x, y) \in X \times Y$) jest odwzorowaniem właściwym ([5]).

W kontekście podanego wyżej faktu warto zapamiętać następujące równości: jeśli $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$, to

$$\varphi(A) = \pi_Y(\mathrm{Gr}\,(\varphi) \cap A \times Y);$$
$$\varphi^{-1}(B) = \pi_X(\mathrm{Gr}\,(\varphi) \cap X \times B).$$

Związek górnej półciągłości z granicą górną pokazuje następny fakt.

1.2.13 FAKT: *Niech x będzie punktem skupienia. Punkt $(x, y) \in X \times Y$ jest punktem skupienia wykresu $\mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ odwzorowania $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$y \in \operatorname*{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z).$$

W szczególności odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$ ma domknięty wykres wtedy i tylko wtedy gdy

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z) \subset \varphi(x).$$

DOWÓD. Przypuśćmy, że (x, y) jest punktem skupienia wykresu. Mamy ciąg $(x_n, y_n) \to (x, y)$ taki, że $y_n \in \varphi(x_n)$ i $x_n \neq x$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd łatwo widać, że $y \in \operatorname{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z)$.

Na odwrót, niech $y \in \operatorname{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z)$. Z definicji granicy górnej wynika, że istnieją ciągi $x_n \to x$, $x_n \neq x$ oraz $y_n \in \varphi(x_n)$ taki, że $y_n \to y$. Stąd $(x, y) = \lim_{n \to \infty}(x_n, y_n)$ a więc $(x, y) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}\,(\varphi)$.

Jeśli $\varphi : X \multimap Y$ ma domknięty wykres oraz $y \in \operatorname{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z)$, to $(x, y) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}\,(\varphi) = \mathrm{Gr}\,(\varphi)$ czyli $y \in \varphi(x)$. Na odwrót, jeśli $(x, y) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}\,(\varphi)$, to znajdzie się ciąg (x_n, y_n) taki, że $y_n \in \varphi(x_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$. Można założyć, że $x_n \neq x$ dla dowolnego n. Wtedy $y \in \operatorname{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z) \subset \varphi(x)$, czyli $(x, y) \in \mathrm{Gr}\,(\varphi)$, a to oznacza, że $\mathrm{Gr}\,(\varphi) = \mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}\,(\varphi)$. □

Widzimy więc, że przy pomocy granicy górnej można badać domkniętość wykresu. Dla górnej półciągłości potrzeba dodatkowych informacji.

Powiadamy, że odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *ciągłe* gdy jest jednocześnie usc i lsc.

[5] Przypomnijmy, że odwzorowanie ciągłe $f : X \to Y$ jest *właściwe* jeżeli, dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset Y$, przeciwobraz $f^{-1}(K)$ jest zwarty (wX). Warto tu też pamiętać, że każde odwzorowanie *doskonałe* $f : X \to Y$, tzn. ciągłe, domknięte i takie, że „włókna" $f^{-1}(y)$ są zwarte dla $y \in Y$, jest właściwe. Gdy Y jest przestrzenią metryczną, lub – ogólniej– tzw.*k-przestrzenią*, to odwzorowania właściwe są doskonałe.

Podamy bez dowodu następujący fakt (o tzw. *generycznej ciągłości*. Przypomnijmy, że podzbiór $A \subset X$ jest *rezydualny* jeśli $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, A_n jest otwarty i gęsty w X (tzn. $X \setminus A_n$ jest zbiorem nigdziegęstym). Innymi słowy zbiór jest rezydualny gdy jego dopełnienie zawiera się w zbiorze I-kategorii. Iloczyny przeliczalne zbiorów rezydualnych są rezydualne. Twierdzenie Baire'a orzeka, że *w przestrzeni metrycznej zupełnej zbiory rezydualne są gęste*. Własność, która zachodzi na zbiorze rezydualnym nazywa się *własnością generyczną*.

1.2.14 Fakt. *Niech X, Y będą przestrzeniami zupełnymi oraz niech $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$. Wtedy:*
(1) Jeśli φ jest usc (lub lsc), to jest ciągłe na pewnym zbiorze rezydualnym.
(2) Jeśli φ ma domknięte wartości i jest lsc, to istnieje zbiór rezydualny $A \subset X$ taki, że

$$\forall\, x \in A \quad \operatorname*{Lim\,sup}_{z \to x} \varphi(z) = \varphi(x). \qquad \square$$

1.2.8 Ćwiczenie: Pokazać, że jeśli odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest lsc (lub usc) i ma spójne wartości, to obraz $\varphi(A)$ zbioru spójnego $A \subset X$ jest zbiorem spójnym. Jeśli φ jest odwzorowaniem ciągłym i przynajmniej jedna wartość jest spójna, to ma miejsce powyższa teza.

1.2.9 Ćwiczenie: Niech $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$, gdzie Y jest przestrzenią ośrodkową, i niech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ośrodkiem w Y. Określmy rodzinę funkcji $\{f_n\}$, gdzie $f_n(x) := d(y_n, \varphi(x))$, $x \in X$.

(1) Odwzorowanie φ jest lsc wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje f_n, $n \in \mathbb{N}$, są półciągłe z góry (jako funkcje rzeczywiste).

(2) Jeśli odwzorowanie φ ma zwarte wartości i jest usc, to dla dowolnego n funkcja f_n jest dolnie półciągła. Na odwrót, jeśli φ jest dodatkowo odwzorowaniem zwartym, to dolna półciągłość funkcji f_n, $n \in \mathbb{N}$, implikuje usc (trochę trudniejsze).

1.3 Metryka Hausdorffa

Niech – jak wyżej – (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Symbolem $\mathcal{BC}(X)$ oznaczamy rodzinę *niepustych, domkniętych i ograniczonych* podzbiorów X. Dla $A, B \in \mathcal{BC}(X)$ definiujemy

$$d_H(A, B) := \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$$

oraz

$$\delta_H(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B);$$

czyli

$$d_H(A, B) = \max\{\delta_H(A, B), \delta_H(B, A)\}.$$

1.3.1 Uwaga: Zauważmy, że $d_H(A, B) \in [0, +\infty)$, bowiem

$$0 \leqslant \delta_H(A, B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A, B) < \infty,$$

gdzie diam oznacza średnicę zbioru, zaś

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b)$$

jest tzw. *dystansem zbiorów* A i B. Rzeczywiście dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $a' \in A$, $b' \in B$ takie, że $d(a', b') < \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon$. W takim razie dla dowolnego $a \in A$,

$$d(a, B) \leqslant d(a, b') \leqslant d(a, a') + d(a', b') < \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon.$$

Z dowolności ε wnosimy, że $\sup_{a\in A} d(a,B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{dist}(A,B)$.

1.3.2 Przykład: W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$, z metryką zadaną przez zwykłą normę euklidesową, rozważmy dwa zbiory domknięte: $A := [-2,1]\times[-2,1]$ oraz $B := [0,2]\times[0,2]$. Wówczas odpowiednie odległości wynoszą:

$$\delta_H(A,B) = \sqrt{8};\quad \delta_H(B,A) = \sqrt{2}\ \text{ oraz }\ d_H(A,B) = \sqrt{8}.$$

1.3.1 Ćwiczenie: (i) Dla dowolnych zbiorów $A,B \in \mathcal{BC}(X)$, $\operatorname{dist}(A,B) \leqslant \min\{\delta_H(A,B), \delta_H(B,A)\}$.

(ii) Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A,B \in \mathcal{BC}(X)$,

$$\delta_H(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B(B,r)\}.$$

W konsekwencji $d_H(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B(B,r),\ B \subset B(A,r)\}$.

1.3.3 Twierdzenie: *Funkcja d_H jest metryką w przestrzeni $\mathcal{BC}(X)$.*

Dowód: Oczywiście $d_H(A,B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_H(A,B) = \delta_H(B,A) = 0$ oraz $\delta_H(A,B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subset \operatorname{cl} B = B$. Równość $d_H(A,B) = d_H(B,A)$ jest oczywista. Nierówność trójkąta udowodnimy za moment. □

Symbolem $BC(X,\mathbb{R})$ oznaczamy przestrzeń Banacha *ciągłych i ograniczonych* funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ z normą $\|f\|_{BC} = \|f\| := \sup x \in X|f(x)|$.

1.3.4 Fakt: *Niech $a_0 \in X$ będzie ustalonym punktem. Definiujemy przekształcenie $j : \mathcal{BC}(X) \to BC(X,\mathbb{R})$ wzorem*

$$j(A)(x) = d(x,A) - d(x,a_0)\ \text{ dla }\ A \in \mathcal{BC}(X),\ x \in X.$$

Wtedy:
(1) przekształcenie j jest poprawnie określone, dokładniej: $j(A)$ jest funkcja ciągłą i ograniczoną; dodatkowo, dla dowolnego $x \in X$,

$$\|j(A)\| \leqslant d(a_0, A).$$

(2) Przekształcenie j jest injekcją.
(3) Obraz $j(\mathcal{BC}(X))$ jest zbiorem jednostajnie jednakowo ciągłym.
(4) Dla dowolnych $A,B \in \mathcal{BC}(X)$ zachodzi

$$\|j(A) - j(B)\| = \sup_{x\in X} |j(A)(x) - j(B)(x)| = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

(5) Dla $A,B \in \mathcal{BC}(X)$,
$$d_H(A,B) = \|j(A) - j(B)\| = \|j(A) - j(B)\|.$$

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$ oraz $a \in A$, $j(A)(x) = d(x,A) - d(x,a_0) \leqslant d(x,a) - d(x,a_0) \leqslant d(a,a_0)$. Analogicznie pokazujemy, że $-j(A)(x) \geqslant -\sup_{a\in A} d(a,a_0)$. Stąd $\|j(A)\| \leqslant d(a_0,A)$.

By pokazać (2) załóżmy, że $j(A) = j(B)$, tzn. $d(x,A) = d(x,B)$ dla dowolnego $x \in X$. Gdy $x \in A$, to $0 = d(x,A) = d(x,B)$ więc $x \in \operatorname{cl} B = B$. Tzn. $A \subset B$. Zmieniając rolami A i B otrzymamy $A \supset B$.

Zauważmy, że dla dowolnych $x,y \in X$

$$|j(A)(x) - j(A)(y)| = |d(x,A) - d(y,A) - (d(x,a_0) - d(y,a_0))| \leqslant 2d(x,y).$$

Dowodzi to, że istotnie każda z funkcji $j(A)$, $A \in \mathcal{BC}(X)$ jest jednostajnie ciągła i moduł (jednostajnej) ciągłości nie zależy od wyboru A. Zatem punkt (3) jest udowodniony.

Dla każdego $x \in X$ mamy $|j(A)(x) - j(B)(x)| = |d(x, A) - d(x, B)|$ a to dowodzi własności (4).

Pokażemy, że

$$\delta_H(A, B) = \sup_{x \in X}(d(x, B) - d(x, A)).$$

Istotnie

$$\delta_H(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A}(d(x, B) - d(x, A)) \leqslant \sup_{x \in X}(d(x, B) - d(x, A)).$$

Na odwrót, dla dowolnego $x \in X$, $a \in A$ oraz $b \in B$ mamy $d(x, b) \leqslant d(x, a) + d(a, b)$. Biorąc kres dolny ze względu na $b \in B$ otrzymamy

$$d(x, B) \leqslant d(x, a) + d(a, B) \leqslant d(x, a) + \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Biorąc kres dolny ze względu na $a \in A$,

$$d(x, B) \leqslant d(x, A) + \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Biorąc kres górny ze względu na $x \in X$ mamy

$$\sup_{x \in X}(d(x, B) - d(x, A)) \leqslant \sup_{x \in A} d(x, B) = \delta_H(A, B)$$

W takim razie otrzymujemy żądaną równość. □

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że d_H jest metryką w $\mathcal{BC}(X)$: dla dowolnych $A, B, C \in \mathcal{BC}(X)$,

$$d_H(A, C) = \|j(A) - j(C)\| \leqslant \|j(A) - j(B)\| + \|j(B) - j(C)\| = d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Można identyfikować przestrzeń $\mathcal{BC}(X)$ z obrazem $\mathcal{X} := j(\mathcal{BC}(X))$ zawartym w przestrzeni Banacha $BC(X, \mathbb{R})$; co więcej $j : \mathcal{BC}(X) \to \mathcal{X}$ jest izometrią.

Wniosek. Jeśli X jest przestrzenią zupełną, to $(\mathcal{BC}(X), d_H)$ jest też przestrzenią metryczną zupełną. Jeśli X jest przestrzenią zwartą, to $\mathcal{BC}(X)$ jest przestrzenią zwartą.

Dowód. Dla dowodu pierwszej części wystarczy pokazać, że $\mathcal{X}$ jest zbiorem domkniętym w $BC(X, \mathbb{R})$. Niech więc (A_n) będzie takim ciągiem w $\mathcal{BC}(X)$, że $j(A_n) \to f$ w $BC(X, \mathbb{R})$. Musimy dowieść, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{BC}(X)$ taki, że $f = j(A)$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$, $f(x) = \lim_{n\to\infty}[d(x, A_n) - d(x, a_0)]$; a zatem $f(x) + d(x, a_0) = \lim_{n\to\infty} d(x, A_n)$. Niech

$$A := \operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\geqslant 1} \overline{\bigcup_{m\geqslant k} A_m},$$

tzn. $A = \{x \in X \mid d(x, A_n) = 0\}$. Jest jasne, że A jest zbiorem domkniętym. Łatwo też udowodnić, że A jest też zbiorem ograniczonym (sprawdzić).

Jest to również zbiór niepusty. Niech $B_k = \bigcup_{m\geqslant k} A_m$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Konstruujemy ciąg $\{m_k\}$ następująco: wybieram najmniejszą liczbę $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $d_H(A_q, A_p) < \frac{\varepsilon}{2^2}$ dla dowolnego $q, p \geqslant n$; jest to możliwe, bo ciąg (A_n) jest ciągiem Cauchy'ego (względem metryki Hausdorffa). Niech $m_1 = n$. Dla $k > 1$, liczbę m_k wybieram jako najmniejszą liczbę $> m_{k-1}$ taką, że $d_H(A_{m_k}, A_p) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ dla $p \geqslant m_k$.

Weźmy dowolne $b \in A_n = A_{m_1}$ i niech $a_1 = b$ i załóżmy, że wyraz $a_{k-1} \in A_{m_{k-1}}$, dla $k > 1$ został wybrany. Skonstruujemy $a_k \in A_{m_k}$: ponieważ $d_H(A_{m_k}, A_{m_{k-1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$, to również $\delta_H(A_{m_{k-1}}, A_{m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$; zatem $d(a_{k-1}, A_{m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. Istnieje więc $a_k \in A_{m_k}$ taki, że $d(a_{k-1}, a_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. Jest jasne, że $a_k \in B_k$. Łatwo sprawdzić, że ciąg $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego; zatem $a_k \to a$ gdy $k \to \infty$. Ponieważ rodzina $\{B_k\}$ jest zstępująca, to $a \in \overline{B_k}$ dla dowolnego k. W takim razie $a \in A$. Ponadto

$$d(b, a_k) = d(a_1, a_k) \leqslant \sum_{j=2}^{k} d(a_{j-1}, a_j) < \varepsilon \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{2^{j-1}} = \varepsilon.$$

Zatem $d(b, a) < \varepsilon$.

Innymi słowy pokazaliśmy także, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0, że $\delta_H(A_n, A) < \varepsilon$ przy $n \geqslant n_0$.

Wykażemy, że $f(x) = d(x, A) - d(x, a_0)$ na X. Aby to było prawdą potrzeba i wystarcza ażeby $d(x, A_n) \to d(x, A)$ dla dowolnego $x \in X$. Istotnie: ustalmy $x \in X$, niech $\varepsilon > 0$ i weźmy $a \in A$ takie, że $d(x, A) \leqslant d(x, a) < d(x, A) + \varepsilon$. Ponieważ $a \in A$, to istnieje ciąg $a_n \in A_n$ taki, że $a_n \to a$. Wtedy

$$d(x, A_n) \leqslant d(x, a_n) \to d(x, a) < d(x, A) + \varepsilon$$

zatem dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $d(x, A_n) < d(x, A) + \varepsilon$.

Weźmy n_0 takie, że $\delta_H(A_n, A) < \varepsilon/2$ przy $n \geqslant n_0$. Dla $n \geqslant n_0$, wybieramy $a_n \in A_n$ ta, by $d(x, a_n) < d(x, A_n) + \varepsilon/2$. Wtedy, dla $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} d(x, A) \leqslant d(x, a_n) + d(a_n, A) &\leqslant d(x, A_n) + \varepsilon/2 + \sup_{b \in A_n} d(b, A) = \\ &= d(x, A_n) + \varepsilon/2 + d_H^-(A_n, A) < d(x, A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$

$$d(x, A) - \varepsilon < d(x, A_n) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Jeśli przestrzeń X jest zwarta, to jest ograniczona. Zatem zbiór $\mathcal{X}$ jest jednakowo (jednostajnie) ciągły i jednostajnie ograniczony; z twierdzenia Ascoli-Arzeli, $\mathcal{X}$ jest zbiorem zwartym. Tak więc $\mathcal{BC}(X)$ (wraz z metryka Hausdorffa) jest przestrzenią zwartą. □

1.3.2 Ćwiczenie: Jeśli zbiory $A_n, A \in \mathcal{BC}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $A_n \to A$ w sensie d_H (tzn. $d_H(A_n, A) \to 0$), to

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{n\to\infty} A_m = \operatorname*{Lim\,inf}_{n\to\infty} A_n.$$

Implikacja odwrotna na ogół nie zachodzi.

1.3.5 Fakt: *Niech $\mathcal{Z}$ będzie przestrzenią* zwartych *podzbiorów przestrzeni metrycznej X z metryką Hausdorffa. Jeśli X jest ośrodkowa, to $\mathcal{Z}$ jest też ośrodkowa.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{Z}$ jest poprawnie określoną przestrzenią metryczną. Niech $G = \{x_1, x_2, \dots\}$ będzie zbiorem gęstym w X. Określmy $\mathcal{G}$ jako rodzinę skończonych podzbiorów zbioru G. Wtedy $\mathcal{G}$ jest zbiorem przeliczalnym i gęstym w $\mathcal{Z}$. Przeliczalność jest oczywista; pokażemy gęstość. Weźmy $K \in \mathcal{Z}$ oraz $\varepsilon > 0$. Istnieje skończony podzbiór $S \subset G$ (tzn. $S \in \mathcal{G}$) taki, że $K \subset \bigcup_{s \in S} B(s, \varepsilon)$ oraz $S \subset B(K, \varepsilon)$. Zatem $d_H(S, K) < \varepsilon$. □

1.3.6 Wniosek: *Jeśli X jest przestrzenią zupełną, ośrodkową (tzn. przestrzenią polską), to również $\mathcal{Z}$ jest przestrzenią polską.*

DOWÓD. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\mathcal{L}$ jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{BC}(X)$. Istotnie niech $K_n \to K$ w sensie metryki d_H oraz $K_n \in \mathcal{L}$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $K \subset B(K_n, \varepsilon/4)$ oraz $K_n \subset B(K, \varepsilon/4)$. Niech $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \subset K_n$ będzie $\varepsilon/4$-siecią dla K_n. Dla $j = 1, ..., m$, niech $x_j' \in K$ tak, aby $d(x_j', x_j) < \varepsilon/4$.

Weźmy $x \in K$ oraz $x' \in K_n$ tak, aby $d(x, x') < \varepsilon/4$. Istnieje $j = 1, ..., m$ takie, że $d(x', x_j) < \varepsilon/2$. Zatem $d(x, x_j) < \varepsilon/2$. Wówczas też $d(x, x_j') < \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Zatem $\{x_1', ..., x_m'\}$ jest ε-siecią dla K. Ponieważ K jest zbiorem domkniętym, więc zupełnym i posiada ε-sieć dla każdego $\varepsilon > 0$, to jest zbiorem zwartym na mocy twierdzenia Hausdorffa. □

1.3.7 UWAGA: Oczywiście wielkość $\delta_H(A, B)$ można określić dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$. Jest jednak jasne, że gdy A (odp. B) nie jest ograniczony, to $\delta_H(A, B) = \infty$.

Rozważmy obecnie odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$. Powiemy, że φ jest *H-półciągłe z góry* (co zapisujemy H-usc) w $x_0 \in X$ jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X\ \ [d(x, x_0) < \delta \implies \delta_H(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon],$$

gdzie tutaj d_H oznacza metrykę Hausdorffa w Y.

Nietrudno zauważyć, że $\delta_H(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon$ wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi(x) \subset B(\varphi(x_0), \varepsilon)$. A zatem jeśli φ jest usc w x_0 , to jest też tam H-usc.

1.3.3 ĆWICZENIE: Pokazać, że jeśli $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości, to z H-półciągłości z góry w punkcie x_0 wynika półciągłość z góry w x_0.

Podobnie mówimy, że $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *H-półciągłe z dołu* (H-lsc) w punkcie $x_0 \in X$ jeśli

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X\ \ [d(x, x_0) < \delta \implies \delta_H(\varphi(x_0), \varphi(x)) < \varepsilon.$$

Podobnie jak wyżej, łatwo zauważyć, że $\delta_H(\varphi(x_0), \varphi(x)) < \varepsilon$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x_0) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$. Wobec tego:

1.3.8 FAKT: *Jeśli φ jest H-lsc w x_0, to jest lsc w x_0. Gdy φ ma zwarte wartości, to z lsc w x_0 wynika H-lsc w x_0.*

DOWÓD: Załóżmy, że φ jest H-lsc w $x_0 \in X$ i weźmy zbiór otwarty V taki, że $V \cap \varphi(x_0) \neq \emptyset$. Wtedy istnieje $y_0 \in V \cap \varphi(x_0)$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $B(y_0, \varepsilon) \subset V$. Na mocy H-lsc, istnieje $\delta > 0$ taka, że $\varphi(x_0) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ o ile $d(x, x_0) < \delta$. Niech $d(x, x_0) < \delta$; wtedy $d(y_0, \varphi(x)) < \varepsilon$ czyli istnieje $y \in \varphi(x)$ taki, że $d(y_0, y) < \varepsilon$, tzn. $y \in \varphi(x) \cap B(y_0, \varepsilon) \subset \varphi(x) \cap V$. Dowodzi to, że φ jest lsc.

Na odwrót, przypuśćmy, że φ ma zwarte wartości i jest lsc w x_0. Przypuśćmy, że φ nie jest H-lsc w x_0. Istnieje więc $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, istnieje $x_n \in B(x_0, 1/n)$ takie, że $\varphi(x_0) \not\subset B(\varphi(x_n), \varepsilon)$. Tzn. istnieje $z_n \in \varphi(x_0)$ takie, że $d(z_n \varphi(x_n)) \geqslant \varepsilon$. Ze zwartości $\varphi(x_0)$ wynika (bez zmniejszenia ogólności), że $z_n \to y_0 \in \varphi(x_0)$. Z kolei własność lsc implikuje, że istnieje ciąg $y_n \in \varphi(x_n)$ taki, że $y_n \to y_0$. W takim razie $d(z_n, y_n) \to 0$. Lecz

$$d(z_n, y_n) \geqslant d(z_n, \varphi(x_n)) \geqslant \varepsilon :$$

sprzeczność. □

Mówimy, że $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest H-ciągłe w x_0 gdy jest jednocześnie H-usc i H-lsc w punkcie x_0, tzn.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\quad \forall\, x \in B(x_0, \delta)\quad d_H(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \varepsilon.$$

Jak wynika z powyższych faktów odwzorowanie φ o zwartych wartościach jest H-ciągłe w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy jest ciągłe.

Przy pomocy metryki Hausdorffa można też definiować warunek Lipschitza dla odwzorowań wielowartościowych. Mianowicie mówimy, że $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza jeśli, każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że

$$\forall\, x_1, x_2 \in U \ \ d_H(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant Ld(x_1, x_2)$$

dla pewnej stałej $L \geqslant 0$ zależnej tylko od x.

1.4 Przykłady

Podamy teraz kilka przykładów odwzorowań górnie i dolnie półciągłych.

(1) Niech $r : X \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ będzie funkcją (rzeczywistą) półciągłą z góry, zaś $f : X \to Y := \mathbb{R}^N$ odwzorowaniem ciągłym. Wtedy odwzorowanie $\varphi : X \multimap \mathbb{R}^N$ dane wzorem $\varphi(x) = D_Y(f(x), r(x)) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y - f(x)\| \leqslant r(x)\}$ jest górnie półciągłe. Odwzorowanie $X \ni x \to B(f(x), r(x)) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y - f(x)\| < r(x)\}$ (przy założeniu, że $r(x) > 0$ na X) na ogół nie jest usc.

Istotnie, jeśli $K \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem domkniętym, $x_n \in \varphi^{-1}(K)$ oraz $x_n \to x$, to istnieje $y_n \in K \cap \varphi(x_n)$. Zatem $\|f(x_n) - y_n\| \leqslant r(x_n)$. Oczywiście ciąg (y_n) jest ograniczony; zatem (przechodząc do podciągu) można założyć, że $y_n \to y \in K$. Zatem $\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} r(x_n) \leqslant r(x)$. A więc $y \in \varphi(x) \cap K$, tzn. $y \in \varphi^{-1}(K)$.

Zauważmy, że nie można powyżej „uciec" od skończonej wymiarowości (w przeciwdziedzinie). Jednak, jak łatwo zobaczyć, odwzorowanie $\varphi : X \multimap Y$, gdzie Y jest dowolną przestrzenią metryczną, dane wzorem $\varphi(x) = D(f(x), r(x))$ $(x \in X)$, jest H-usc. Jest również jasne, że jeśli Y jest przestrzenią zwartą, to takie φ jest usc.

1.4.1 Ćwiczenie: Niech $F : X \multimap \mathbb{R}^N$ będzie odwzorowaniem usc. Wtedy $\varphi : X \to \mathbb{R}^N$ dane wzorem $\varphi(x) := F(x) \cap D(f(x), r(x))$, $x \in X$ (f i r są jak wyżej) jest odwzorowaniem usc.

(2) Dla dowolnej przestrzeni Y odwzorowania $X \ni x \to D(f(x), r(x))$ oraz $x \ni x \to B(f(x), r(x))$ są lsc o ile r jest półciągłe z dołu.

Istotnie, weźmy zbiór otwarty $V \subset Y$ i niech $x \in \varphi^{-1}(V)$, tzn. $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$. W obu przypadkach istnieje $y \in V$ taki, że $d(f(x), y) < r(x)$. Funkcja $g = r - d(f(\cdot), y) : X \to \mathbb{R}$ jest półciągła z dołu: zatem istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $x' \in X$, jeśli $d(x, x') < \delta$, to $g(x') > 0$. Innymi słowy $y \in \varphi(x')$; a więc $B(x, \delta) \subset \varphi^{-1}(V)$.

(3) Dla dowolnej przestrzeni Y, odwzorowania $X \ni x \to D(f(x), r(x))$ oraz $X \ni x \to B(f(x), r(x))$ są (lokalnie) lipschitzowskie o ile takie są funkcje r i f.

1.4.2 Ćwiczenie: Udowodnić powyższe stwierdzenie.

(4) Rozważmy trzy przestrzenie X, Y oraz Z. Niech $U : X \to \mathcal{P}(Z)$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym zaś $f : \mathrm{Gr}\,(U) \to Y$. Zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ wzorem

$$\varphi(x) := \{f(x, u) \mid u \in U(x)\}.$$

Jeśli f jest ciągłe, zaś U lsc, to φ jest lsc.

Jeśli f jest ciągłe, U jest usc i ma zwarte wartości, to φ jest usc.

Weźmy $y \in \varphi(x)$ oraz ciąg $x_n \to x$. Wtedy $y = f(x, u)$ gdzie $u \in U(x)$. Skoro U jest lsc, to mamy ciąg $u_n \in U(x_n)$ taki, że $u_n \to u$. Stąd (i z ciągłości f) wynika, że $y_n \to y$ gdzie

$y_n = f(x_n, u_n) \in \varphi(x_n)$. To dowodzi lsc odwzorowania φ.

Zauważmy, że wartości φ są zwarte gdy wartości U są zwarte . Weźmy $x \in X$, $\varepsilon > 0$ i rozważmy otoczenie $V := B(\varphi(x), \varepsilon)$. Jest ono też otoczeniem punktu $f(x, u)$ dla dowolnego $u \in U(x)$. Ciągłość f implikuje, że dla każdego $u \in U(x)$, istnieje $\delta_u > 0$ takie, że gdy $(x', u') \in \mathrm{Gr}(U)$ oraz $d(x, x'), d(u, u') < \delta_u$, to $f(x', u') \in V$. Zbiór $U(x)$ jest zwarty; zatem istnieją punkty $u_1, \ldots, u_n \in U(x)$ takie, że $U(x) \subset W := \bigcup_{i=1}^{n} B(u_i, \delta_i)$ gdzie $\delta_i = \delta_{u_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Z kolei górna półciągłość U implikuje, że istnieje $\delta_0 > 0$ taka, że jeśli $x' \in X$ oraz $d(x, x') < \delta_0$, to $U(x') \subset W$. Niech

$$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n\}.$$

Jeśli $x' \in X$ oraz $d(x, x') < \delta$, to $\varphi(x') \subset V$.

(5) **Odwzorowania marginalne:** Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ oraz funkcję $f : \mathrm{Gr}(F) \to \mathbb{R}$. *Funkcją marginalną* związaną z w/w nazywamy funkcję $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ daną wzorem

$$\forall\, x \in X \quad g(x) = \sup_{y \in F(x)} f(x, y).$$

Zachodzą następujące fakty:

(i) Jeśli f oraz F są lsc, to $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest też lsc.

(ii) Jeśli f oraz F są usc i wartości są zwarte, to $g : X \to \mathbb{R}$ jest usc.

Dla dowodu (i) załóżmy, że $x_n \to x$, ustalmy $\lambda < g(x)$ oraz wybierzmy $y \in F(x)$ tak aby $\lambda < f(x, y)$. Wtedy istnieje ciąg $y_n \to y$ (bo F jest lsc) oraz $f(x_n, y_n) \leqslant g(x_n)$. Skoro f jest lsc, to otrzymujemy, że

$$\lambda < f(x, y) \leqslant \liminf_{n \to \infty} f(x_n, y_n) \leqslant \liminf_{n \to \infty} g(x_n).$$

Zatem także

$$g(x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} g(x_n).$$

Aby udowodnić stwierdzenie (ii), weźmy $x \in X$ oraz ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest funkcją półciągłą z góry, to dla dowolnego $y \in F(x)$, istnieje $\delta_y > 0$ takie, że gdy $(x', y') \in \mathrm{Gr}(F)$ oraz $d(x, x') < \delta_y$, $d(y, y') < \delta_y$, to $f(x', y') < f(x, y) + \varepsilon$. Zbiór $F(x)$ jest zwarty więc dla pewnych $y_1, \ldots, y_m \in F(x)$, $F(x) \subset W := \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \delta_i)$ gdzie $\delta_i := \delta_{y_i}$. Dalej mamy $\delta_0 > 0$ takie, że $F(x') \subset W$ o ile $x' \in X$ oraz $d(x', x) < \delta_0$. Weźmy

$$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m\}.$$

Jeśli teraz $x' \in X$ oraz $d(x, x') < \delta$, to dla każdego $y \in F(x')$ mamy

$$f(x', y) \leqslant \max_{i=1,\ldots,m} f(x, y_i) + \varepsilon \leqslant g(x) + \varepsilon$$

a więc

$$\forall\, x' \in B(x, \delta) \quad g(x') \leqslant g(x) + \varepsilon.$$

Dowodzi to, że g jest też funkcją półciągłą z góry. Oczywiście $g(x) \in \mathbb{R}$ na X.

1.4.3 ĆWICZENIE: Udowodnić następujące stwierdzenia:
(a) Jeśli powyżej Y jest przestrzenią zwartą, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest usc, to

$$g(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y), \quad \text{dla } x \in X,$$

jest usc.
(b) Jeśli odwzorowanie wielowartościowe F jest lsc (odp. usc o zwartych wartościach), to funkcja $(x,y) \to d(y, F(x))$ jest półciągła z góry (odp. półciągła z dołu) na $\mathrm{Gr}\,(F)$.

(iii) Zdefiniujmy tzw. *odwzorowanie marginalne* $M(x) := \{y \in F(x) \mid g(x) = f(x,y)\} \subset Y$. Jeżeli f jest ciągła, F jest ciągła i ma zwarte wartości, to M ma niepuste zwarte wartości oraz jest usc.

Pokażemy najpierw, że $M(x) \neq \emptyset$. Weźmy $y_n \in F(x)$ taki, że $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, y_n)$. Jasne, że $y_n \to y \in F(x)$ (ewentualnie po przejściu do podciągu). Zatem

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x,y) \leqslant g(x).$$

Tak więc $g(x) = f(x,y)$ czyli $y \in M(x)$.

Niech teraz $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}\,(M)$ i załóżmy, że $x_n \to x$. Zatem $g(x_n) = f(x_n, y_n)$ oraz $y_n \in F(x_n)$. Skoro F ma zwarte wartości i jest (w szczególności) usc, to mamy podciąg (y_{n_k}) taki, że $y_{n_k} \to y \in F(x)$. Wiemy też, że g jest funkcją ciągłą. Zatem

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x,y).$$

Zatem $y \in M(x)$. W takim razie M jest usc i ma zwarte wartości.

(6) Jeśli Y jest przestrzenią zwartą, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $M(x) = \{y \in Y \mid g(x) = \sup_{y\in Y} f(x,y)\}$ ma niepuste zwarte wartości i jest usc.

(7) Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha i $A : X \to Y$ operatorem liniowym i ciągłym odwzorowującym X na Y. Wtedy odwzorowanie $\varphi : Y \to \mathcal{P}(X)$ dane wzorem $\varphi(y) = A^{-1}(y)$ jest lsc i ma domknięte wypukłe wartości.

Weźmy zbiór otwarty $U \subset X$. Musimy pokazać, że $\varphi^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym. Zauważmy, że $\varphi^{-1}(U) = \{y \in Y \mid A^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset\} = A(U)$. Z twierdzenia Banacha o operatorze otwartym wynika, że zbiór ten jest otwarty. Jest jasne, że zbiory $A^{-1}(y)$ są domknięte i wypukłe.

(8) Niech $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ będzie półciągła z dołu. Jeśli Y jest przestrzenią zwartą oraz, dla dowolnego $x \in X$, funkcja $f(x,\cdot) : Y \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to przekształcenie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y \times \mathbb{R})$ dana wzorem

$$\varphi(x) = \mathrm{Epi}\,(f(x,\cdot)),$$

dla $x \in X$, jest usc i ma domknięte wartości.

Domkniętość wartości odwzorowanie φ jest oczywista. Dla dowodu usc weźmy ciąg $x_n \in \varphi^{-1}(K)$, gdzie K jest domknięty w $Y \times \mathbb{R}$, oraz załóżmy, że $x_n \to x$. A więc istnieje $(y_n, \lambda_n) \in \varphi(x_n) \cap K$, tzn. $f(x_n, y_n) \leqslant \lambda_n$. Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że $y_n \to y \in Y$. Zatem

$$f(x,y) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda_n =: \lambda \leqslant \infty.$$

Jeśli $\lambda < \infty$, to $(y, \lambda) \in K \cap \varphi(x)$. Przypuśćmy więc, że $\lambda = \infty$. Wtedy, bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że $\lambda_n \to \infty$. Skoro jednocześnie (z ciągłości $f(x,\cdot)$) $f(x, y_n) \to f(x,y)$, to dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $f(x, y_n) \leqslant \lambda_n$. A zatem $(y_n, \lambda_n) \in K \cap \varphi(x)$.

(9) Niech X będzie przestrzeni zwartą, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \times Y \to Z$ odwzorowaniem ciągłym oraz $\varphi : X \multimap Y$, $\psi : X \multimap Z$ odwzorowaniami o domkniętych wykresach. Wtedy $C : X \to \mathcal{P}(Y)$, dane wzorem

$$C(x) := \{y \in \varphi(x) \mid f(x,y) \in \psi(x)\},$$

ma domknięte wartości oraz wykres.

Wystarczy pokazać domkniętość wykresu. Jeśli $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}(C)$ oraz $(x_n, y_n) \to (x, y)$, to $y_n \in \varphi(x_n)$, $f(x_n, y_n) \in \psi(x_n)$ oraz $y \in \varphi(x)$, $f(x, y) \in \psi(x)$. Tak więc $y \in C(x)$.

(10) **Odwzorowania stożkowe:** Niech X będzie przestrzenią metryczną, E ośrodkową przestrzenią Banacha oraz $T : X \multimap E$ odwzorowaniem wielowartościowym takim, że $T(x)$ jest domkniętym wypukłym stożkiem dla dowolnego $x \in X$. Rozważmy odwzorowanie $N : X \to \mathcal{P}(E^*)$ dane wzorem

$$N(x) = T(x)^- := \{p \in E^* \mid \forall\, y \in T(x) \ \ \langle p, y\rangle \leqslant 0\}$$

dla $x \in X$. Wtedy N ma $*$-słabo domknięte wartości oraz następujące warunki są równoważne:

(a) odwzorowanie N ma ciągowo domknięty wykres o ile w $X \times E^*$ rozważymy na X zwykłą topologię zaś na E^* topologię $*$-słabą (tzn. jeśli $p_n \in N(x_n)$, $x_n \to x_0$ w X oraz $p_n \rightharpoonup p_0$ w E^*, to $p_0 \in N(x_0)$);

(b) odwzorowanie T jest lsc.

Łatwo sprawdzić, że $N(x)$ jest zbiorem wypukłym i $*$-słabo domkniętym (oraz domkniętym) dla $x \in X$. Przypuśćmy teraz, że T jest lsc i niech $p_n \in N(x_n)$, $x_n \to x_0$ w X oraz $p_n \rightharpoonup p_0$ w E^*. Przypuśćmy, że $p_0 \notin N(x_0)$. Zatem istnieje $y_0 \in T(x_0)$ taki, że $\langle p_0, y_0\rangle > 0$. Ponieważ T jest lsc, to istnieje $y_n \in T(x_n)$ taki, że $y_n \to y_0$. W takim razie $\langle p_n, y_n\rangle \leqslant 0$. Funkcja $E^* \times E \ni (p, y) \to \langle p, y\rangle \in \mathbb{R}$ jest ciągowo ciągła (na E^* mamy $*$-słabą topologię). Istotnie wykażemy, że $\langle p_n, y_n\rangle \to \langle p_0, y_0\rangle$. Mamy

$$|\langle p_n, y_n\rangle - \langle p_0, y_0\rangle| \leqslant |\langle p_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle p_n - p_0, y_0\rangle| \leqslant \|p_n\|\|y_n - y_0\| + |\langle p_n - p_0, y_0\rangle| \to 0$$

ponieważ ciąg $(\|p_n\|)$ jest ograniczony na mocy twierdzenia Banacha-Steinhausa. Stąd $\langle p_0, y_0\rangle \leqslant 0$: sprzeczność.

Aby udowodnić dostateczność warunku (a) dla lsc odwzorowania T należy wprowadzić definicję *ciągowej granicy górnej* w $*$-słabej topologii.

Niech $\psi : X \multimap E^*$ będzie odwzorowaniem o domkniętych wartościach i $x_0 \in X$ punktem skupienia. Wtedy

$$p_0 \in sw^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} \psi(x) \iff \exists\, x_n \to x_0 \ \exists\, p_n \in \psi(x_n) \quad p_n \rightharpoonup p_0.$$

1.4.1 Lemat (Walkup-Wets): *Jeśli x_0 jest punktem skupienia, to zachodzi równość*

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x\to x_0} T(x) = [sw^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)]^-.$$

Dowód: Udowodnimy najpierw inkluzję $\subset$. Niech $y_0 \in \operatorname{Lim\,inf}_{x\to x_0} T(x)$ i weźmy $p_0 \in sw^*\text{-}\operatorname{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)$; mamy pokazać, że $\langle p_0, y_0\rangle \leqslant 0$. Istnieją więc ciągi $x_n \to x$, $p_n \rightharpoonup p_0$, $p_n \in N(x_n)$. W takim razie istnieje też ciąg $y_n \to y_0$, $y_n \in T(x_n)$. Jest jasne, że $\langle p_n, y_n\rangle \leqslant 0$. Stąd $\langle p_0, y_0\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle p_n, y_n\rangle \leqslant 0$.

Załóżmy nie wprost, że $y_0 \in [sw^*\text{-}\operatorname{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)]^-$ lecz $y_0 \notin \operatorname{Lim\,inf}_{x\to x_0} T(x)$. Zatem istnieje $\varepsilon > 0$ oraz ciąg $x_n \to x_0$ taki, że $B(y_0, \varepsilon) \cap T(x_n) = \emptyset$. Z twierdzenia o oddzielaniu zbiorów wypukłych, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, istnieje forma liniowa ciągła $p_n \in E^*$ taka, że

$$\sup_{y\in T(x_n)} \langle p_n, y\rangle \leqslant \inf_{y\in B(y_0,\varepsilon)} \langle p_n, y_0\rangle = \langle p_n, y_0\rangle - \varepsilon\|p_n\|.$$

Oczywiście można przyjąć, że $\|p_n\| = 1$; czyli, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{y \in T(x_n)} \langle p_n, y\rangle \leqslant \langle p_n, y_0\rangle - \varepsilon.$$

Ponieważ $T(x_n)$ jest stożkiem, to wnosimy, że $\sup_{y\in T(x_n)}\langle p_n, y\rangle = 0$ a to oznacza, że $p_n \in N(x_n)$ oraz $\varepsilon \leqslant \langle p_n, y_0\rangle$.

Z twierdzenia Banacha-Alaoglu, ciąg (p_n) posiada podciąg (p_{n_k}) zbieżny do pewnego p_0, $\|p_0\| \leqslant 1$. Oczywiście $p_0 \in sw^*\text{-}\operatorname{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)$ a więc $\langle p_0, y_0\rangle \leqslant 0$. W takim razie

$$\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty} \langle p_n, y_0\rangle = \langle p_0, y_0\rangle = 0 :$$

sprzeczność. $\square$

Wracamy do dowodu dostateczności warunku (a). Ponieważ $\operatorname{Gr}(N)$ jest ciągowo domknięty (w $X \times E^*$ gdzie E^* wyposażona jest w $*$-słabą topologię), to

$$sw^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x) \subset N(x_0).$$

W takim razie

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x\to x_0} T(x) = [sw^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)]^- \supset N(x_0)^- = T(x_0).$$

Dowodzi to, że T jest lsc

Przypomnijmy jeszcze w tym miejscu, że jeśli $K \subset E$ jest, to $K^- := \{p \in E^* \mid \langle p, y\rangle \leqslant 0\ \forall\, y \in K\}$. Oczywiście K^- jest stożkiem wypukłym i domkniętym. Jest więc też $*$-słabo oraz słabo domknięty.

Podobnie gdy $P \subset E^*$, to $P^- := \{y \in E \mid \langle p, y\rangle \leqslant 0\ \forall\, p \in P\}$ jest stożkiem domkniętym i wypukłym. Zbiór $(K^-)^-$ jest domkniętym i wypukłym stożkiem rozpiętym przez K, tzn.

$$(K^-)^- = \overline{\operatorname{conv} \bigcup_{\lambda\geqslant 0} \lambda K}.$$

Istotnie: Niech $L = \overline{\operatorname{conv} \bigcup_{\lambda\geqslant 0} \lambda K}$. Jeśli $y \in L$, to $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ gdzie $y_n \in \operatorname{conv} \bigcup_{\lambda\geqslant 0} \lambda K$. Weźmy $p \in K^-$. Zatem $\langle p, y_n\rangle \leqslant 0$; czyli również $\langle p, y\rangle \leqslant 0$ a więc $y \in (K^-)^-$. Na odwrót, przypuśćmy, że $y \in (K^-)^-$ oraz $y \notin L$. Skoro L jest wypukły i domknięty, to istnieje forma $p \in E^*$, $\|p\| = 1$ taka,że

$$\sup_{z\in L} \langle p, z\rangle < \langle p, y\rangle.$$

Ponieważ L jest stożkiem, to $\sup_{z\in L}\langle p, z\rangle = 0$ czyli $p \in K^-$ a więc $\langle p, y\rangle \leqslant 0$: sprzeczność.

W szczególności gdy K jest stożkiem domkniętym i wypukłym, to $K = (K^-)^-$.

1.4.2 Uwaga: Założenie ośrodkowości powyżej było potrzebne aby skorzystać z wersji twierdzenia Alaoglu, która mówi, że z ograniczonego ciągu funkcjonałów liniowych i ciągłych można było wybrać podciąg zbieżny. Bez tego założenia, twierdzenie Alaoglu daje możność wyboru zbieżnego podciągu uogólnionego. W takim wypadku następujący fakt jest prawdziwy: odwzorowanie T jest lsc wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $r > 0$ zbiór $\operatorname{Gr}(N) \cap [X \times D(0, r)]$, gdzie $D(0, r)$ oznacza kule domkniętą w E^* o promieniu r, jest domknięty (o ile w $X \times E^*$) rozważyć te topologię co wyżej. Dowód, podobny do powyższego oparty jest wtedy na dwóch faktach: jeśli $(p_s)_{s\in S}$ jest ograniczonym ciągiem uogólnionym w E^*, $(x_s)_{s\in S}$ jest ciągiem uogólnionym w X, $p_s \rightharpoonup p_0$ oraz $x_s \to x_0$, to $\langle p_s, x_s\rangle \to \langle p_0, x_0\rangle$. Ponadto jeśli zdefiniować granice górną $w^*\text{-}\operatorname{Lim\,sup}_{x\to x_0} \psi(x)$ w następujący sposób: $p_0 \in w^*\text{-}\operatorname{Lim\,sup}_{x\to x_0} \psi(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór skierowany S oraz ciągi uogólnione $(x_s)_{s\in S}$, $(p_s)_{s\in S}$ takie, że $x_s \to x_0$, $p_s \rightharpoonup p_0$ oraz (p_s) jest ograniczony, to

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x\to x_0} T(x) = [w^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x)]^-.$$

W sytuacji gdy E jest przestrzenią ośrodkową, to

$$sw^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x) = w^*\text{-}\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to x_0} N(x),$$

zaś, wspomniana powyżej domkniętość zbioru $\mathrm{Gr}\,(N) \cap [X \times D(0,r)]$, dla dowolnego $R > 0$, równoważna jest ciągowej domkniętości $\mathrm{Gr}\,(N)$ (oczywiście chodzi topologię iloczynu $X \times E^*$, w której E^* ma $*$-słabą topologię.

1.5 Operacje na odwzorowaniach wielowartościowych

Niech $\varphi_i : X \to \mathcal{P}(Y)$, $i \in I$, będzie rodzina odwzorowań wielowartościowych. Definiujemy odwzorowanie $\bigcup_{i\in I} \varphi_i : X \to \mathcal{P}(Y)$ wzorem

$$\left(\bigcup_{i\in I} \varphi_i\right)(x) := \bigcup_{i\in I} \varphi_i(x), \quad x \in X.$$

1.5.1 FAKT: (1) *Jeśli I jest zbiorem skończonym oraz φ_i jest usc dla dowolnego $i \in I$, to odwzorowanie $\bigcup_{i\in I} \varphi_i$ jest usc. Gdy wykres $\mathrm{Gr}\,(\varphi_i)$ jest domknięty dla każdego $i \in I$, to wykres $\mathrm{Gr}\,\left(\bigcup_{i\in I} \varphi_i\right)$ jest domknięty.*

(2) *Jeśli, dla każdego $i \in I$, φ_i jest lsc, to $\bigcup_{i\in I} \varphi_i$ jest lsc.*

DOWÓD. Wynika natychmiast z tego, że dla dowolnego zbioru $B \subset Y$,

$$\left(\bigcup_{i\in I} \varphi_i\right)^{-1}(B) = \bigcup_{i\in I} \varphi_i^{-1}(B).$$

Ponadto oczywiście $\mathrm{Gr}\,(\bigcup_{i\in I} \varphi_i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Gr}\,(\varphi_i)$. □

Podobnie można zdefiniować odwzorowanie $\bigcap_{i\in I} \varphi_i : X \to (Y)$ wzorem

$$\left(\bigcap_{i\in I} \varphi_i\right)(x) := \bigcap_{i\in I} \varphi_i(x), \quad x \in X,$$

przy założeniu, że ten ostatni zbiór jest niepusty.

1.5.2 FAKT: (1) *Jeśli, dla dowolnego $i \in I$, $\varphi_i : X \multimap Y$ jest usc i zbiór I jest skończony, to $\bigcap_{i\in I} \varphi_i$ jest usc.*

(2) *Jeśli, dla każdego $i \in I$, wykres $\mathrm{Gr}\,(\varphi_i)$ jest domknięty, to $\mathrm{Gr}\,(\bigcap_{i\in I} \varphi_i)$ jest domknięty.*

DOWÓD. Własność (2) jest oczywista, bo

$$\mathrm{Gr}\,(\bigcap_{i\in I} \varphi_i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Gr}\,(\varphi_i).$$

Udowodnimy (1). Wystarczy pokazać, że jeśli $\varphi_1, \varphi_2 : X \multimap Y$ są usc, to $\varphi_1 \cap \varphi_2$ jest usc. Weźmy $x_0 \in X$ oraz zbiór otwarty V taki, że $\varphi_1(x_0) \cap \varphi_2(x_0) \subset V$. Zbiory $A_1 := \varphi_1(x_0) \setminus V$, $A_2 := \varphi_1(x_0) \setminus V$

są domknięte oraz rozłączne. Istnieją więc rozłączne zbiory otwarte V_1, V_2 takie, że $A_1 \subset V_1$, $A_2 \subset V_2$. Istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że dla $x \in U$, $\varphi_1(x) \subset V_1 \cup V$, $\varphi_2(x) \subset V_2 \cup V$. Zatem, dla $x \in U$, $\varphi_1(x) \cap \varphi_2(x) \subset (V_1 \cup V) \cap (V_2 \cup V) = V$. Dowodzi to górnej półciągłości odwzorowania $\varphi_1 \cap \varphi_2$. □

1.5.3 Przykład: Na ogół iloczyn mnogościowy odwzorowań lsc nie jest lsc. Niech $\varphi_1, \varphi_2 : [-\pi, \pi] \multimap \mathbb{R}^2$ dane będą wzorami:

$$\varphi_1(t) := \{x = (x_1, x_2) \mid \|x\| \leqslant 1, x_2 \geqslant 0\},$$

$$\varphi_2(t) := \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 = \lambda \cos t,\ x_2 = \lambda \sin t,\ \lambda \in [-1, 1]\}$$

dla $t \in [-\pi, \pi]$. Chociaż oba odwzorowania są nawet ciągłe oraz $\varphi_1(t) \cap \varphi_2(t) \neq \emptyset$, to $\varphi_1 \cap \varphi_2$ nie jest lsc. Nie jest ono lsc np. w punktach $t = 0, \pi$.

Niech $\varphi_i : X \to \mathcal{P}(Y_i)$, $i = 1, 2$, gdzie Y_i jest przestrzenią metryczną. Rozważmy odwzorowanie $\varphi_1 \times \varphi_2 : X \to \mathcal{P}(Y_1 \times Y_2)$ dane wzorem

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x) := \varphi_1(x) \times \varphi_2(x),\ \ x \in X.$$

1.5.4 Fakt. (1) *Jeżeli φ_i jest lsc, to $\varphi_1 \times \varphi_2$ jest lsc.*

(2) *Jeśli oba odwzorowania mają zwarte wartości i są usc, to również takie jest $\varphi_1 \times \varphi_2$.*

Dowód: (1) jest natychmiastowe (z ciągowej charakteryzacji lsc). Pokażemy (2). Niech $x_0 \in X$ i weźmy zbiór otwarty V w $Y_1 \times Y_2$ taki, że $\varphi_1(x_0) \times \varphi_2(x_0) \subset V$. Korzystając ze zwartości nietrudno pokazać, że istnieją zbiory otwarte V_1, V_2 w Y_1 i Y_2, odpowiednio, takie, że $\varphi_i(x_0) \subset V_i$, $i = 1, 2$ oraz $V_1 \times V_2 \subset V$. Zatem znajdziemy otoczenie U punktu x_0 takie, że dla $x \in U$, $\varphi_i(x) \subset V_i$, $i = 1, 2$. Zatem, dla $x \in U$, $\varphi_1(x) \times \varphi_2(x) \subset V$. □

Niech teraz $Y = Y_1 = Y_2$ będzie przestrzenią unormowaną i niech funkcje $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ będą ciągłe.

1.5.5 Fakt: (1) *Jeśli φ_1, φ_2 są lsc, to suma $f_1\varphi_1 + f_2\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ dana wzorem*

$$(f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2)(x) := f_1(x)\varphi_1(x) + f_2(x)\varphi_2(x) = \{f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2 \mid y_i \in \varphi_i(x),\ i = 1, 2\},$$

dla $x \in X$, jest lsc.

(2) *Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 : X \multimap Y$ są usc i maja zwarte wartości, to $f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2$ jest usc i ma zwarte wartości.*

Dowód: Rozważmy odwzorowanie $T : X \times Y \times Y \to Y$ dane wzorem

$$T(x, y_1, y_2) = f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2,\ \ x \in X,\ y_1, y_2 \in Y.$$

Łatwo widać, że T jest ciągłe. I dalej łatwo spostrzec, że

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 = T \circ (id_X \times \varphi_1 \times \varphi_2).$$

Zatem teza wynika z faktu, że złożenie odwzorowań lsc (usc) jest lsc (usc). □

1.5.6 Fakt: *Niech Y będzie przestrzenią Banacha. Jeśli $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest lsc (usc), to odwzorowanie* $\operatorname{cl}\operatorname{conv}\varphi : X \multimap Y$ *dane wzorem*

$$(\operatorname{cl}\operatorname{conv}\varphi)(x) := \operatorname{cl}\operatorname{conv}\varphi(x),\ \ x \in X$$

jest lsc (usc) i ma zwarte wartości.

DOWÓD: Z twierdzenia Mazura, $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi$ ma zwarte wartości. Weźmy zbiór otwarty $V \supset \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi(x)$. Znajdziemy *wypukły* zbiór otwarty W taki, że

$$\varphi(x) \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi(x) \subset W \subset \mathrm{cl}\,W \subset V$$

(jak to zrobić?). Zatem istnieje otoczenie U punktu x takie, że dla $x' \in U$, $\varphi(x') \subset W$; stąd $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi(x') \subset \mathrm{cl}\,W \subset V$. Pokazaliśmy więc, że $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi$ jest usc o ile φ jest usc.

Przypuśćmy, że φ jest lsc i niech $y_0 \in \mathrm{conv}\,\varphi(x_0)$. Weźmy też ciąg $x_n \to x_0$. Zatem $y_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ gdzie $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, oraz $y_i \in \varphi(x_0)$, $i = 1, 2, .., n$. Na mocy lsc istnieją ciągi (y_n^i), $i = 1, ..., n$, takie, że $y_n^i \to y_i$ oraz $y_n^i \in \varphi(x_n)$. Zatem $y_n := \sum_{i=1}^n \lambda_i y_n^i \in \mathrm{conv}\,\varphi(x_n)$ oraz $y_n \to y_0$. Pokazaliśmy więc, że już odwzorowanie $\mathrm{conv}\,\varphi$ jest lsc. Zwartość wartości w tym przypadku nie była istotna. Dolna półciągłość odwzorowania $\mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi$ wynika poniższego, bardziej ogólnego faktu. □

Zajmiemy się teraz własnościami półciągłości odwzorowań, które powstają z innych przy pomocy operacji topologicznych.

1.5.7 FAKT: *Niech* $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$.

(1) *Odwzorowanie* φ *jest lsc wtedy i tylko wtedy, gdy lsc jest odwzorowanie* $\mathrm{cl}\,\varphi : X \ni x \to \mathrm{cl}\,\varphi(x) \subset Y$.

(2) *Jeśli* φ *jest usc, to* $\mathrm{cl}\,\varphi$ *jest też usc.*

DOWÓD: (1) Niech $y_0 \in \varphi(x_0)$ oraz $x_n \to x_0$. Jeśli $\mathrm{cl}\,\varphi$ jest lsc, to istnieje $y_n' \to y_0$ taki, że $y_n' \in \mathrm{cl}\,\varphi(x_n)$. Lecz wtedy łatwo znajdziemy ciąg $y_n \in \varphi(x_n)$ taki, że $d(y_n, y_n') < 1/n$. Zatem $y_n \to y_0$; to oznacza, że φ jest lsc.

Na odwrót, przypuśćmy, że φ jest lsc i weźmy zbiór otwarty V taki, że $V \cap \mathrm{cl}\,\varphi(x) \neq \emptyset$. Wtedy, oczywiście, również $V \cap \varphi(x) \neq \emptyset$. Zatem istnieje otocznię U punktu x takie, że $\emptyset \neq \varphi(x') \cap V \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x') \cap V$ o ile $x' \in U$.

Aby dowieść (2) załóżmy, że K jest domknięty, $x_n \in (\mathrm{cl}\,\varphi)^{-1}(K)$ oraz $x_n \to x$. Przypuśćmy nie wprost, że $\mathrm{cl}\,\varphi(x) \cap K = \emptyset$. Istnieje więc zbiór otwarty V taki, że $K \subset V$ oraz $\mathrm{cl}\,V \cap \mathrm{cl}\,\varphi(x) = \emptyset$. Skoro $\mathrm{cl}\,\varphi(x_n) \cap K \neq \emptyset$, to $\emptyset \neq \varphi(x_n) \cap V \subset \varphi(x_n) \cap \mathrm{cl}\,V$. Stąd $\emptyset \neq \varphi(x) \cap \mathrm{cl}\,V \subset \mathrm{cl}\,\varphi(x) \cap \mathrm{cl}\,V$: sprzeczność. □

Fakt odwrotny do (2) powyżej na ogół nie zachodzi.

1.5.8 FAKT. *Niech* $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ *ma wypukłe wartości oraz załóżmy, że dla dowolnego* $x \in X$, $\mathrm{int}\,\varphi(x) \neq \emptyset$.

(1) *Odwzorowanie* $\mathrm{int}\,\varphi : X \ni x \mapsto \mathrm{int}\,\varphi(x) \subset Y$ *jest lsc wtedy i tylko wtedy, gdy* φ *jest lsc.*

(2) *Jeśli* φ *ma domknięte wartości i* $\mathrm{int}\,\varphi$ *jest usc, to* φ *jet usc.*

DOWÓD: Fakt ten wynika z równości

$$\mathrm{cl}\,[\mathrm{int}\,\varphi(x)] = \mathrm{cl}\,\varphi(x)$$

dla dowolnego $x \in X$. Jeśli φ jest lsc, to $\mathrm{cl}\,\varphi$, a więc także $\mathrm{int}\,\varphi$ jest lsc. Gdy $\mathrm{int}\,\varphi$ jest lsc, to $\mathrm{cl}\,[\mathrm{int}\,\varphi]$ a wiec także $\mathrm{cl}\,\varphi$ oraz φ są lsc. Podobnie, jeśli φ ma domknięte wartości, zaś $\mathrm{int}\,\varphi$ jet usc, to $\mathrm{cl}\,[\mathrm{int}\,\varphi]$ jest usc; ale to oznacza, że i $\mathrm{cl}\,\varphi = \varphi$ jest usc □

Wyjaśnimy teraz kiedy iloczyn mnogościowy odwzorowań lsc jest lsc. Powiemy, że odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *quasi-otwarte* jeśli, dla dowolnego $x \in X$, $\mathrm{int}\,\varphi(x) \neq \emptyset$ oraz wykres $\mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi)$ jest otwarty.

1.5.9 PRZYKŁAD: (1) Jeśli $r : X \to (0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to odwzorowanie $\varphi : X \multimap X$ dane wzorem $\varphi(x) = D(x, r(x))$ jest quasi-otwarte. Istotnie, dla każdego $x \in X$, $\mathrm{int}\,\varphi(x) = B(x, r(x)) \neq$

$\emptyset$. Ponadto funkcja $X \times X \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := r(x) - d(x, y)$ jest ciągła. Jeśli $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi)$, to $y_0 \in B(x_0, r(x_0))$ oraz $f(x_0, y_0) > 0$. Istnieją więc otoczenia U i V punktów x_0 oraz y_0, odpowiednio, takie, że $f(x, y) > 0$ na $U \times V$. Oznacza, to, że dla $x \in U$ oraz $y \in V$, $y \in B(x, r(x))$ tj. $U \times V \subset \mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi)$.

(2) Ogólniej: jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą, to odwzorowanie $\varphi : X \to Y$ dane wzorem $\varphi(x) = D(f(x), r(x))$ jest quasi-otwarte (dowód podobny do powyższego pozostawiam czytelnikowi).

1.5.10 Uwaga: Można wykazać, że odwzorowanie $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ o wypukłych wartościach jest quasi-otwarte wtedy i tylko wtedy, gdy F jest lsc i $\mathrm{int}\,\varphi(x) \neq \emptyset$ dla wszystkich $x \in X$.

1.5.11 Fakt *Niech $\varphi_1 : X \to \mathcal{P}(Y)$ będzie lsc zaś $\varphi_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$ będzie quasi-otwarte. Jeśli, dla dowolnego $x \in X$, $\varphi_1(x) \cap \varphi_2(x) \neq \emptyset$ oraz $\varphi_1(x) \cap \varphi_2(x) \subset \mathrm{cl}\,(\varphi_1(x) \cap \mathrm{int}\,\varphi_2(x))$, to odwzorowanie $\varphi_1 \cap \varphi_2$ jest lsc.*

Dowód. Niech $U \subset Y$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $x_0 \in \varphi^{-1}(U)$, to $\varphi(x_0) \cap U \neq \emptyset$. Stąd również

$$\varphi_1(x_0) \cap \mathrm{int}\,\varphi_2(x_0) \cap U \neq \emptyset.$$

Wybierzmy $y \in \varphi_1(x_0) \cap \mathrm{int}\,\varphi_2(x_0)$. Wtedy $(x_0, y) \in \mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi_2)$. Zatem znajdziemy otoczenia V' punktu x_0 oraz W punktu y takie, że $V' \times W \subset \mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi_2)$ i $W \subset U$. Dolna półciągłość φ_1 implikuje istnienie otoczenia V'' punktu x_0 takiego, że $V'' \subset \varphi_1^{-1}(W)$. Jeśli $x \in V := V' \cap V''$, to $\varphi_1(x) \cap W \neq \emptyset$ i jeśli $y' \in \varphi_1(x) \cap W$, to $(x, y') \in \mathrm{Gr}\,(\mathrm{int}\,\varphi_2)$, czyli – w szczególności – $y' \in \varphi_2(x)$. Tak więc $y' \in \varphi_1(x) \cap \varphi_2(x) \cap W \subset \varphi(x) \cap U$. □

W podobnym duchu mamy ważny w dalszym ciągu lemat.

1.5.12 Lemat: *Niech K będzie zbiorem domkniętym i wypukłym w przestrzeni unormowanej X oraz $r : X \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ funkcją ciągłą taką, że $r(x) > d(x, K)$ dla $x \notin K$. Wtedy odwzorowanie $\varphi : X \ni x \multimap \varphi(x) := D(x, r(x)) \cap K$ jest lsc oraz ma wypukłe, domknięte wartości.*

Dowód: Weźmy zbiór domknięty $C \subset X$ i załóżmy, że $x_n \in \varphi^{+1}(C)$, $x_n \to x$ oraz, że $x \notin \varphi^{+1}(C)$, tzn. $\varphi(x) \cap [X \setminus C] \neq \emptyset$. Jeśli $r(x) = 0$, to $x \in K$ oraz $\varphi(x) = \{x\}$ i wtedy $x \notin C$. Zatem $d(x_n, C) \to d(x, C) > 0$. Z drugiej strony $\varphi(x_n) \subset C$, czyli $d(x_n, C) \leqslant r(x_n) \to 0$; sprzeczne. Zakładamy zatem,że $r(x) > 0$. Istnieje $y \in B(x, r(x)) \cap K$ i $y \notin C$. Weźmy $\delta > 0$ takie, że $\|y - x\| < r(x) - 2\delta$. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $y \in B(x_n, r(x_n))$ dla $n \geqslant N$ (tu odgrywa rolę wypukłość K – w jaki sposób?). Zatem, dla $n \geqslant N$, $y \in B(x_n, r(x_n) \cap K \cap [X \setminus C] \subset \varphi(x_n) \cap [X \setminus C]$; sprzeczność. □

Rozdział 2

Istnienie selekcji i aproksymacji wykresowych

Niech $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ będzie odwzorowaniem wielowartościowym. *Selekcją odwzorowania* φ nazywamy funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f(x) \in \varphi(x)$ dla wszystkich $x \in X$. Oczywiście każde odwzorowanie posiada selekcje – jest to konsekwencją aksjomatu wyboru. Tak więc interesujące jest istnienie selekcji w odpowiednim sensie regularnych (np. ciągłych, mierzalnych itp.).

Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna Hausdorffa X jest *parazwarta*, jeśli w dowolne jej pokrycie otwarte $\{U_i\}_{i\in I}$ można *wpisać lokalnie skończone pokrycie otwarte* $\{V_j\}_{j\in J}$, tzn. znajdzie się pokrycie otwarte $\{V_j\}_{j\in J}$ takie, że:

• dla dowolnego $j \in J$, istnieje $i \in I$ takie, że $V_j \subset U_i$ (mówi się wtedy, że rodzina $\{V_j\}$ jest *wpisana w* $\{U_i\}$);

• każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie V takie, że zbiór $\{j \in J \mid V_j \cap V \neq \emptyset\}$ jest skończony (mówimy wtedy, że rodzina $\{V_j\}$ jest *lokalnie skończona*).

Na przykład każda przestrzeń metryczna jest parazwarta; każda przestrzeń zwarta jest parazwarta. Z kolei każda przestrzeń parazwarta jest normalna.

Będziemy często używać następującego ważnego twierdzenia.

2.0.13 Twierdzenie (o rozkładzie jedności): *Przestrzeń Hausdorffa X jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu jej pokryciu otwartemu $\{U_i\}_{i\in I}$ można przyporządkować ciągły rozkład jedności. To znaczy, że istnieje rodzina $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ funkcji ciągłych $\lambda_i : X \to [0,1]$ $(i \in I)$, zwana* rozkładem jedności, *taka, że*:

(1) *rodzina* $\{\operatorname{supp}\lambda_i\}_{i\in I}$ ([1]) *jest lokalnie skończona oraz* $\operatorname{supp}\lambda_i \subset U_i$ *dla każdego* $i \in I$;

(2) *dla dowolnego* $x \in X$, $\sum_{i\in I}\lambda_i(x) = 1$ ([2]).

W szczególności, w każde pokrycie otwarte $\{U_i\}_{i\in I}$ można wpisać rozkład jedności $\{\lambda_j\}_{j\in J}$. To znaczy $\{\lambda_j\}$ jest rozkładem jedności oraz, dla dowolnego $j \in J$, istnieje $i_j \in I$ takie, że $\operatorname{supp}\lambda_j \subset U_{i_j}$.

Jeśli X jest przestrzenią metryczną, to każdemu pokryciu otwartemu można przyporządkować rozkład jedności składający się z funkcji Lipschitza ([3]). □

Przypuśćmy, że dana jest rodzina $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ podzbiorów zbioru X. *Gwiazdą zbioru $A \subset X$ względem rodziny $\mathcal{A}$* nazywamy zbiór $\operatorname{st}(A, \mathcal{A}) := \bigcup\{A_s \in \mathcal{A} \mid A \cap A_s \neq \emptyset\}$. Mówimy,

[1]Przypomnijmy, że *nośnikiem* funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór $\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

[2]Zauważmy, że w świetle (1), dowolny punkt $x \in X$ posiada otoczenie V_x takie, że zbiór $I_x = \{i \in I \mid \lambda_i(y) \neq 0, \text{ dla pewnego } y \in V\}$ jest skończony; stąd, dla $y \in V_x$, w sumie $\sum_{i\in I}\lambda_i(y)$ znajduje się jedynie skończona ilość składników niezerowych. W takim razie $\sum_{i\in I}\lambda_i(y) = \sum_{i\in I_x}\lambda_i(y)$ i, co za tym idzie, funkcja $X \ni x \mapsto \lambda(x) := \sum_{i\in I}\lambda_i(x)$ jest poprawnie określona i ciągła.

[3]Stąd wynika, że funkcja λ, określona w powyższym przypisie redakcyjnym, jest lokalnie lipschitzowska.

że rodzina $\mathcal{A}$ *jest gwiaździście* (odp. *punktowo gwiaździście*) *wpisana* w rodzinę $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t\in T}$ jeśli dla dowolnego $s \in S$, istnieje $t \in T$ takie, że $\mathrm{st}(A_s, \mathcal{A}) \subset B_t$ (odp. dla każdego $x \in X$, istnieje $t \in T$ takie, że $\mathrm{st}(x, \mathcal{A}) := \mathrm{st}(\{x\}, \mathcal{A}) \subset B_t$).

Ma miejsce następujący fakt.

2.0.14 Fakt: *Dla przestrzeni Hausdorffa X następujące warunki są równoważne:*

(1) *Przestrzeń X jest parazwarta;*

(2) *w każde pokrycie otwarte przestrzeni X można wpisać punktowo gwiaździście lokalnie skończone pokrycie otwarte;*

(3) *w każde pokrycie otwarte przestrzeni X można wpisać gwiaździście lokalnie skończone pokrycie otwarte.* □

2.1 Twierdzenie Michaela o selekcji

Zaczniemy od najbardziej znanego twierdzenia o istnieniu selekcji – twierdzenie Michaela.

2.1.1 Twierdzenie (Michaela): *Niech X będzie przestrzenią parazwartą a Y przestrzenią lokalnie wypukłą Frecheta ([4]). Jeśli $\varphi : X \multimap Y$ jest lsc ([5]), ma domknięte i wypukłe wartości, to posiada ciągłą selekcję $f : x \to Y$.*

Twierdzenie to sformułowaliśmy w dużej ogólności. Zwykle poruszaliśmy się w zakresie przestrzeni metrycznych. Oczywiście każda przestrzeń metryczna jest *parazwarta*, zatem twierdzenie Michaela równie dobrze dotyczy przestrzeni metrycznej X. Przyczyna, dla której formułujemy to twierdzenie ogólniej wynika przede wszystkim z chęci przedstawienia możliwie ogólnej jego wersji, ale także z chęci użycia techniki dowodowej, która – w przypadku przestrzeni metrycznej – przestaje być przejrzysta.

Dowód twierdzenia Michaela oparty jest na poniższym lemacie

2.1.2 Lemat: *Niech $\psi : X \to \mathcal{P}(Y)$ będzie odwzorowaniem lsc o wypukłych wartościach. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje ciągłe odwzorowanie $f = f_{\psi,\varepsilon} : X \to Y$ takie, że $B(f(x), \varepsilon) \cap \psi(x) \neq \emptyset$.*

Dowód: Rodzina $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y\in Y}$, gdzie $U_y = \psi^{-1}(B(y, \varepsilon))$, jest otwartym pokryciem przestrzeni X. Niech $\{\lambda_y\}_{y\in Y}$ będzie rozkładem jedności podporządkowanym pokryciu $\mathcal{U}$. Niech

$$f(x) := \sum_{y\in Y} \lambda_y(x) y, \quad x \in X.$$

Wówczas $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą spełniającą tezę lematu. Istotnie, ustalmy $x \in X$, oraz niech $\{y_1, y_2, \dots, y_m\} = \{y \in Y \mid \lambda_y(x) \neq 0\}$. Zatem $x \in \operatorname{supp} \lambda_{y_i} \subset U_{y_i} = \psi^{-1}(B(y_i, \varepsilon))$, czyli istnieje $y_i' \in \varphi(x) \cap B(y_i, \varepsilon)$, dla dowolnych $i = 1, \dots, m$, oraz $f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_{y_i}(x) y_i$. Stąd, dla $y := \sum_{i=1}^m \lambda_{y_i} y_i' \in \psi(x)$ mamy

$$y - f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_{y_i}(x)(y_i - y_i') \in B(0, \varepsilon)$$

[4]Tzn. Y jest lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną, metryzowalną w sposób zupełny; zatem Y jest przestrzenią liniowo-metryczną zupełną, w której kule są zbiorami wypukłymi.

[5]w kontekście twierdzenia Michaela) dolna półciągłość odwzorowania $\varphi : X \to Y$ oznacza oczywiście, dla dowolnego $x_0 \in X$ oraz zbioru otwartego $V \subset Y$ takiego, że $\varphi(x_0) \cap C \neq \emptyset$, to istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$ dla każdego $x \in U$.

(bo kula $B(0,\varepsilon)$ jest wypukła i $y_i - y_i' \in B(0,\varepsilon)$). Jednocześnie, wypukłość $\psi(x)$ implikuje, że $y \in \psi(x)$. Zatem $y \in B(f(x),\varepsilon) \cap \psi(x)$. □

2.1.3 Uwaga: Odwzorowanie $X \ni \to B(f(x),\varepsilon)$ jest quasi-otwarte . Zatem odwzorowanie $\psi_\varepsilon : X \to \mathcal{P}(Y)$ dane wzorem

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi(x) \cap B(f_{\psi,\varepsilon}(x),\varepsilon), \quad x \in X$$

jest dolnie półciągłe (patrz przykład 1.5.9 i fakt 1.5.11).

Dowód (twierdzenia Michaela): Korzystając z lematu, definiujemy indukcyjnie ciąg dolnie półciągłych odwzorowań $\psi_{n-1} : X \to \mathcal{P}(Y)$, $n \in \mathbb{N}$, o wypukłych wartościach oraz ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, takie, że $\psi_0 = \varphi$, $f_n = f_{\psi_{n-1},1/n}$ oraz $\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x) \cap B(f_n(x),1/n)$ przy $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Ustalmy $x \in X$; dla każdego $m \in \mathbb{N}$, weźmy $y_m(x) \in \psi_m(x)$. Wtedy

$$d(y_m(x), f_m(x)) < 1/m.$$

Ponieważ, dla $n \leqslant m$, $\psi_m(x) \subset \psi_n(x)$, to $d(y_m(x), f_n(x)) < 1/n$ oraz

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant d(f_m(x), y_m(x)) + d(y_m(x), f_n(x)) < 1/m + 1/n \leqslant 2/n.$$

Stąd ciąg funkcyjny $(f_m)_{m=1}$ spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego ([6]). W takim razie, dla każdego $x \in X$,

$$f(x) := \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} y_m(x) \in \varphi(x).$$

Oczywiście $f_m \to f$ jednostajnie, gdzie $f : X \to Y$ jest funkcją ciągłą określoną powyższym wzorem. □

2.1.4 Uwaga: (1) Zauważmy, że w dowodzie skorzystaliśmy jedynie z faktu, że wartości $\varphi(x)$, $x \in X$, są zbiorami zupełnymi w Y a nie z zupełności Y (oczywiście zupełność przestrzeni Y implikuje, że jej domknięte podzbiory są zupełne).

(2) Teza twierdzenia Michaela jest jednocześnie warunkiem dostatecznym parazwartości, tzn.: jeśli przestrzeń Hausdorffa X ma te własność, że dla każdego lsc odwzorowania $\varphi : X \to \mathbb{E}$ o wartościach wypukłych w przestrzeni Banacha ma ciągłą selekcję, to X jest przestrzenią parazwartą.

Założenie wypukłości jest w twierdzeniu Michaela bardzo istotne.

2.1.5 Przykład: (1) Niech X będzie sferą parzysto-wymiarową, tzn. $X = S^n$ gdzie $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Jak wiadomo (twierdzenie o zaczesaniu sfery) nie istnieje ciągłe nie znikające pole styczne na S^n. Tak więc jeśli $v : S^n \to S^n$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że dla dowolnego $x \in S^n$, $\langle v(x), x\rangle = 0$, to v ma miejsce zerowe.

Rozważmy odwzorowanie wielowartościowe $\varphi : S^n \multimap S^n$ zadane wzorem:

$$\varphi(x) = \{y \in S^n \mid \langle y, x\rangle = 0\} \text{ dla } x \in S^n.$$

Łatwo dostrzec, że $\varphi(x)$ jest sferą jednostkową $n-1$-wymiarową leżącą w podprzestrzeni $\{x\}^-$. Oczywiście φ jest odwzorowaniem o zwartych wartościach, ciągłym w sensie metryki Hausdorffa, a więc – w szczególności – półciągłym z dołu. Gdyby istniała ciągła selekcja $f : S^n \to S^n$, to $f \neq 0$ na S^n oraz $\langle f(x), x\rangle = 0$. Sprzeczność.

[6]Zauważmy, że dla każdego $x \in X$, ciąg $(f_m(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego; czyli również $(y_m(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\varphi(x)$.

(2) Niech $\varphi(0) = S^1$ i $\varphi(x) = S^1 \setminus B(|x|^{-1}x, |x|)$ dla $x \in D^2 := D(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Odwzorowanie $\varphi : D^2 \multimap D^2$ jest nawet ciągłe, lecz nie ma ciągłej selekcji, dlaczego?

2.1.6 Wniosek: *Przy założeniach twierdzenie Michaela załóżmy, że $A \subset X$ jest zbiorem domkniętym i $f_0 : A \to Y$ jest selekcją obcięcia $\varphi|_A$. Istnieje wówczas* przedłużenie *ciągłe $f : X \to Y$ odwzorowania f_0 (tzn. $f|_A = f_0$), której jest selekcją φ.* □

2.1.1 Ćwiczenie: Udowodnić ten wniosek.

Twierdzenie Michaela ma szereg zastosowań. Podamy tu dwa takie zastosowania.

2.1.7 Twierdzenie (o przedłużaniu): *Jeśli X jest przestrzenią parazwartą, Y przestrzenią Frécheta, $A \subset X$ zbiorem domkniętym i $f_0 : A \to Y$ odwzorowaniem ciągłym, to istnieje odwzorowanie $f : X \to Y$ takie, że $f|_A = f_0$, tzn. f jest* przedłużeniem f_0.

Dowód: Rozważmy $\varphi : X \multimap Y$ dane wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{gdy } x \in A; \\ Y & \text{gdy } x \in X \setminus A, \end{cases} \quad x \in X.$$

Wówczas odwzorowanie φ spełnia założenie twierdzenia Michaela i jego ciągła selekcja jest szukanym przedłużeniem f_0. □

2.1.8 Twierdzenie (o retrakcji): *Niech $A \subset \mathbb{E}$ będzie zbiorem domkniętym i wypukłym w przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje retrakcja $r : \mathbb{E} \to A$ (tzn. odwzorowanie ciągłe takie, że $r(x) = x$, o ile $x \in A$) taka, że $\|x - r(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)d(x, A)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{E}$.*

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$ i rozważmy odwzorowanie $vp : \mathbb{E} \multimap A$ dane wzorem:

$$\varphi(x) = A \cap D(x, (1+\varepsilon)d(x, A)), \quad x \in \mathbb{E}.$$

Funkcja $\mathbb{E} \ni x \mapsto \rho(x) := (1+\varepsilon)d(x, A)$ jest oczywiście ciągła, stąd odwzorowanie $\mathbb{E} \ni x \mapsto D(x, \rho(x))$ jest quasi-otwarte. Tak więc odwzorowanie φ spełnia założenia twierdzenia Michaela i jego ciągła selekcja jest szukaną retrakcją. □.

2.1.A Informacja o twierdzeniu Fryszkowskiego

Niech $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Przypomnijmy, że $L^1(\Omega, \mathbb{E})$, gdzie $\mathbb{E}$ jest przestrzenią Banacha, oznacza przestrzeń Banacha *całkowalnych w sensie Bochnera* funkcji $u : \Omega \to \mathbb{E}$ z normą $\|u\| := \int_\Omega \|u(t)\|\, d\mu(t)$.

Symbolem $M(\Omega, \mathbb{E})$ oznacza przestrzeń odwzorowań mierzalnych (silnie mierzalnych) funkcji $u : \Omega \to \mathbb{E}$. Jasne, że

$$L^1(\Omega, \mathbb{E}) \subset M(\Omega, \mathbb{E}).$$

Przypuśćmy, że $\varphi : \Omega \to \mathscr{P}(\mathbb{E})$ i rozważmy zbiór

$$N_\varphi := \{u \in M(\Omega, \mathbb{E}) \mid u(t) \in \varphi(t) \text{ dla p.w. } t \in \Omega\}$$

lub

$$N_\varphi := \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{E}) \mid u(t) \in \varphi(t) \text{ dla p.w. } t \in \Omega\}.$$

Jest jasne, że jeśli wartości odwzorowania φ są wypukłe (odp. domknięte), to zbiór K_φ jest wypukły (odp. domknięty). Ta własność nie zachodzi, gdy wartości φ nie są wypukłe. Jednak wtedy, dla dowolnego $A \in \mathscr{A}$, $u, v \in K_\varphi$,

$$\chi_A u + \chi_{\Omega \setminus A} v = \chi_A u + (1 - \chi_A)v \in K_\varphi.$$

2.1.9 DEFINICJA: Zbiór $K \subset M(\Omega, \mathbb{E})$ (lub $K \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$) nazywa się zbiorem *rozkładalnym*, gdy dla dowolnego $A \in \mathscr{A}$, $u, v \in K_\varphi$,

$$\chi_A u + (1 - \chi_A)v \in K.$$

2.1.10 UWAGA: Tak więc zbiór K_φ jest *rozkładalny* przy *dowolnym* odwzorowaniu φ. Okazuje się, że zbiór domknięty $K \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ jest rozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje mierzalne odwzorowanie $\varphi : \Omega \multimap \mathbb{E}$ (definicja mierzalności odwzorowań wielowartościowych pojawi się za chwilę) takie, że $K = K_\varphi$.

Załóżmy teraz, że Ω jest przestrzenią metryczną, $\mathscr{A}$ jest σ-ciałem w Ω zawierającym σ-ciało $\mathscr{B}(\Omega)$ zbiorów borelowskich w Ω, $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ jest skończoną, zupełną i regularną miarą (tzn. dla dowolnego $A \in \mathscr{A}$ i $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $F \subset A$ i $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$); dodatkowo zakładamy, że przestrzeń dualna $\mathbb{E}^*$ jest ośrodkowa.

2.1.11 PRZYKŁAD: Jeżeli Ω jest lokalnie zwartą σ-zwartą (np. lokalnie zwartą ośrodkową) przestrzenią metryczną i μ jest dodatnią miarą Radona (stowarzyszoną z pewny dodatnim funkcjonałem rzeczywistym na przestrzeni ciągłych funkcji rzeczywistych o zwartym nośniku określonych na Ω), to μ jest zupełną σ-skończoną regularną miarą to some positive real linear functional on the space of all zdefiniowaną na σ-ciele $\mathscr{A}$ zawierającym $\mathscr{B}(\Omega)$; w istocie $(\mathscr{A}, \mu)$ jest uzupełnieniem Lebesgue'a σ-ciała borelowskiego $(\mathscr{B}(\Omega), \mu|_{\mathscr{B}(\Omega)})$.

2.1.12 TWIERDZENIE (Bressan-Colombo-Fryszkowski): *Przy powyższych założeniach, jeśli vp* $: X \multimap L^1(\Omega, \mathbb{E})$, *gdzie* X *jest ośrodkową przestrzenią metryczną, jest lsc i ma wartości rozkładalne, to* φ *ma ciągłą selekcję* $f : X \to L^1(\Omega, \mathbb{E})$.

Dowód tego twierdzenia jest dość trudny.

2.2 ε-selekcje

Podobnie jak wypukłość wartości w twierdzeniu Michaela istotne jest również założenie dolnej półciągłości. Łatwo znaleźć przykład odwzorowania usc $\varphi : X \multimap Y$ o zwartych wypukłych wartościach, dla którego nie istnieją ciągłe selekcje.

2.2.1 PRZYKŁAD: Rozważmy odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{dla } x = 0; \\ 1 & \text{dla } x > 0; \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

łatwo dostrzec, że każda selekcja odwzorowania φ jest funkcją nieciągłą.

Jednak można nieco złagodzić założenie dolnej półciągłości i zamiast o selekcjach mówić o tzw. ε-selekcjach, gdzie $\varepsilon > 0$ lub, ogólniej, ε jest pewną funkcją ciągłą. Mianowicie załóżmy, że $\varphi : X \to \mathscr{P}(Y)$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną, zaś Y jest przestrzenią metryczną, jest odwzorowaniem wielowartościowym i niech $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ będzie funkcją. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest *ε-selekcją* (lub *jednostajną ε-aproksymacją*) odwzorowania φ jeśli, dla dowolnego $x \in X$,

$$d(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon(x).$$

Tak więc f jest ε-selekcją φ jeśli, dla dowolnego $x \in X$, $d(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon(x)$, tzn. $f(x) \in B(\varphi(x), \varepsilon(x))$.

2.2.2 Definicja: Mówimy, że odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$, gdzie X i Y są przestrzeniami topologicznymi, jest *sub-lsc*, gdy dla dowolnych $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, istnieje otoczenie V punktu x takie, że $\bigcap_{y\in V} B(\varphi(y), \varepsilon) \neq \emptyset$.

2.2.1 Ćwiczenie: Wykazać, że każde odwzorowanie lsc jest sub-lsc.

2.2.3 Twierdzenie (Deutsch-Kenderov): *Niech X będzie przestrzenią parazwartą, zaś $\mathbb{E}$ przestrzenią Banacha. Odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathbb{E})$ o wartościach wypukłych jest sub-lsc wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ istnieje ciągła ε-selekcja $f : X \to \mathbb{E}$.*

Dowód: Pokażemy jedynie dostateczność. Zakładamy więc, że $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathbb{E})$ ma wypukłe wartości i jest sub-lsc. Ustalmy funkcję ciągłą $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$. Dla dowolnego $x \in X$, znajdziemy otoczenie V_x i $y_x \in \varphi(x)$ takie, że $y_x \in B(\varphi(z), \varepsilon(x)/2)$ dla dowolnego $z \in V_x$. Niech $U_x := V_x \cap \varepsilon^{-1}((\varepsilon(x)/2, +\infty))$. Wtedy U_x jest otwartym otoczeniem x. Niech $\{p_s\}_{s\in S}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $\{U_x\}_{x\in X}$, tzn. dla dowolnego $s \in S$ istnieje $x_s \in X$ takie, że $\operatorname{supp} p_s \subset U_{x_s}$. Niech $y_s := y_{x_s}$ i

$$f(x) := \sum_{s\in S} p_s(x) y_s, \quad x \in X.$$

Wtedy f jest przekształceniem ciągłym i dla $x \in X$, jeśli $p_s(x) \neq 0$, to $x \in U_{x_s}$, czyli $x \in V_{x_s}$ a więc $y_s \in B(\varphi(x), \varepsilon(x_s)/2)$ oraz $\varepsilon(x_s)/2 < \varepsilon(x)$. Wybierzmy $y'_s \in \varphi(x)$ such that $\|y_s - y'_s\| < \varepsilon(x_s)/2 < \varepsilon(x)$. Hence

$$d(f(x), \varphi(x)) \leqslant \left\| f(x) - \sum_{s\in S} p_s(x) y'_s \right\| \leqslant \sum_{s\in S} p_s(x) \|y_s - y'_s\| < \varepsilon(x). \qquad \square$$

Pojęcie ε-selekcji odwzorowania φ można uogólnić. Jeśli Y jest przestrzenią wektorowo-topologiczną, to można mówić na przykład o tzw. V-selekcjach, gdzie V jest (ustalonym) otoczeniem zera w Y. Funkcja $f : X \to Y$ jest *V-selekcją* dla φ jeżeli, dla dowolnego $x \in X$, $f(x) \in \varphi(x) + V$.

Wprowadzimy pojęcie jeszcze ogólniejsze. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ odwzorowaniem wielowartościowym oraz $\mathcal{U}$ otwartym otoczeniem (w $X \times Y$) wykresu $\operatorname{Gr}(\varphi)$. Wobec tego, dla dowolnego $x \in X$, $\varphi(x) \subset \mathcal{U}(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{U}\}$. Powiemy, że funkcja f jest *$\mathcal{U}$-selekcją* odwzorowania φ, jeżeli dla dowolnego $x \in X$, $f(x) \in \mathcal{U}(x)$. Tak więc $f : X \to Y$ jest $\mathcal{U}$-selekcją wtedy i tylko wtedy, gdy f jest selekcją odwzorowania wielowartościowego $X \ni x \mapsto \mathcal{U}(x)$.

Rozważmy sytuację gdy Y jest przestrzenią metryczną. Okazuje się, że wtedy pojęcia $\mathcal{U}$-selekcji i ε-selekcji są porównywalne.

2.2.4 Twierdzenie: *Niech X będzie przestrzenią topologiczną a Y przestrzenią metryczną, $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ odwzorowaniem wielowartościowym.*

(1) *Jeśli przestrzeń X jest parazwarta, φ jest górnie półciągłe oraz ma zwarte wartości, to dla dowolnego otoczenia $\mathcal{U}$ wykresu $\operatorname{Gr}(\varphi)$, istnieje ciągła funkcja $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ taka, że każda ε-selekcja jest $\mathcal{U}$-selekcją.*

(2) *Jeśli odwzorowanie φ jest H-dolnie półciągłe, to dla dowolnej funkcji ciągłej $\varepsilon : X \to$*

$(0, +\infty)$, *istnieje otwarte otoczenie* $\mathcal{U}$ *wykresu* $\mathrm{Gr}(\varphi)$ *takie, że każda* $\mathcal{U}$*-selekcja jest również* ε*-selekcją.*

DOWÓD: (1) Ustalmy $x \in X$. Oczywiście $\{x\} \times \varphi(x) \subset \mathcal{U}$. Zatem istnieje liczba $\varepsilon_x > 0$ oraz otoczenie otwarte U_x punktu x (w X) takie, że $U_x \times B(\varphi(x), 2\varepsilon_x) \subset \mathcal{U}$. W szczególności, dla dowolnego $y \in U_x$, $B(\varphi(x), 2\varepsilon_x) \subset \mathcal{U}(y)$. Z drugiej strony, wykorzystując górną półciągłość odwzorowania φ, bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że dla $y \in U_x$, $\varphi(y) \subset B(\varphi(x), \varepsilon_x)$.

Rozważmy rozkład jedności $\{\lambda_j : X \to [0,1]\}_{j\in J}$ wpisany w pokrycie otwarte $\{U_x\}_{x\in X}$. Zatem, dla każdego $j \in J$, istnieje $x_j \in X$ takie, że $\operatorname{supp}\lambda_j \subset U_j := U_{x_j}$. Dla $j \in J$, połóżmy $\varepsilon_j := \varepsilon_{x_j}$ i rozważmy funkcję $\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\varepsilon(x) = \sum_{j\in J} \lambda_j(x)\varepsilon_j \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Jest jasne, że ε jest funkcja ciągłą oraz $\varepsilon > 0$ na X.

Niech $x \in X$. Istnieje $j \in J$ takie, że $\lambda_j(x) > 0$ (tzn. $x \in U_j$) oraz $\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon_j$. Zatem $B(\varphi(x_j), 2\varepsilon_j) \subset \mathcal{U}(x)$ oraz $\varphi(x) \subset B(\varphi(x_j), \varepsilon_j)$. Wobec tego

$$B(\varphi(x), \varepsilon(x)) \subset B(\varphi(x_j), \varepsilon(x) + \varepsilon_j) \subset B(\varphi(x_j), 2\varepsilon_j) \subset \mathcal{U}(x).$$

Tak więc jeśli $f : X \to Y$ jest ε-selekcją φ, to $f(x) \in B(\varphi(x), \varepsilon(x)) \subset \mathcal{U}(x)$ co dowodzi, że f jest $\mathcal{U}$-selekcją φ.

(2) Dla każdego $(z, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$, niech

$$U(z, y) = \left[\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon(z)}{2}, +\infty\right) \cap U_z\right] \times B\left(y, \frac{\varepsilon(z)}{4}\right)$$

gdzie U_z jest otoczeniem punktu z takim, że $\delta_H(\varphi(z), \varphi(x)) < \frac{\varepsilon(z)}{4}$ dla $x \in U_z$ istniejącym w świetle założonej H-dolnej półciągłości odwzorowania φ. Oczywiście $U(z, y)$ jest otoczeniem punkty (z, y). Połóżmy

$$\mathcal{U} := \bigcup_{(x,y)\in\mathrm{Gr}(\varphi)} U(x, y).$$

Wtedy $\mathcal{U}$ jest zbiorem otwartym, $\mathrm{Gr}(\varphi) \subset \mathcal{U}$. Przypuśćmy, że $f : X \to Y$ jest $\mathcal{U}$-selekcją i niech $x \in X$. Wówczas $(x, f(x)) \in \mathcal{U}$, tzn. istnieje $z \in X$ oraz $y \in \varphi(z)$ takie, że $x \in U_z$, $x \in \varepsilon^{-1}(\frac{\varepsilon(z)}{2}, +\infty)$ oraz $f(x) \in B(y, \frac{\varepsilon(z)}{4})$. Zatem $\frac{\varepsilon(z)}{2} < \varepsilon(x)$, $d_H^+(\varphi(x), \varphi(z)) < \frac{\varepsilon(z)}{4}$ oraz $d(f(x), y) < \frac{\varepsilon(z)}{4}$. Stąd $y \in \varphi(z) \subset B(\varphi(x), \frac{\varepsilon(z)}{4})$ oraz

$$d(f(x), \varphi(x)) \leqslant d(f(x), y) + d(y, \varphi(x)) < 2\frac{\varepsilon(z)}{4} < \varepsilon(x).$$

Tak więc f jest ε-selekcją dla φ. □

Udowodniony rezultat oznacza, że (gdy X jest przestrzenią parazwartą, Y jest przestrzenią metryczną) pojęcia ε-selekcji (z ciągłą funkcją ε) oraz $\mathcal{U}$-selekcji (gdzie $\mathcal{U}$ jest otwartym otoczeniem $\mathrm{Gr}(\varphi)$) są dla odwzorowania φ równoważne o ile φ jest odwzorowaniem ciągłym o zwartych wartościach.

2.3 Aproksymacje wykresowe

Przenalizujemy bliżej pojęcie $\mathcal{U}$-selekcji. Przede wszystkim zauważmy, że $f : X \to Y$ jest $\mathcal{U}$-selekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Gr}(f) \subset \mathcal{U}$. Takie odwzorowanie f nazywamy także $\mathcal{U}$-*aproksymacją wykresową* odwzorowania φ. Tak więc pojęcia $\mathcal{U}$-selekcji i $\mathcal{U}$-aproksymacji *pokrywają się.*

Jeśli X i Y są przestrzeniami metrycznymi oraz $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$, to mówimy, że f jest *ε-aproksymacją wykresową* dla φ jeśli, dla dowolnego $x \in X$,

$$f(x) \in B(\varphi(B(x, \varepsilon(x))), \varepsilon(x)).$$

W szczególności, dla stałej $\varepsilon > 0$, $f : X \to Y$ jest ε-aproksymacją gdy $f(x) \in B(\varphi(B(x, \varepsilon)), \varepsilon)$ dla $x \in X$.

Innymi słowy f jest ε-aproksymacja wykresową odwzorowania φ jeśli, dla każdego $x \in X$, istnieje $x' \in X$ oraz $y' \in \varphi(x')$ takie, że $d(x, x'), d(f(x), y') < \varepsilon(x)$.

Pojęcia ε-selekcji i ε-aproksymacji nie są, jak łatwo widzieć, równoważne.

Mamy jednak następujący fakt.

2.3.1 TWIERDZENIE: *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi oraz $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ odwzorowaniem wielowartościowym.*

(1) *Jeśli φ jest usc i ma zwarte wartości, to dla dowolnego otoczenia $\mathcal{U}$ wykresu* $\mathrm{Gr}(\varphi)$, *istnieje ciągła funkcja $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ taka, że każda ε-aproksymacja φ jest $\mathcal{U}$-aproksymacją.*

(2) *Jeśli $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to istnieje otoczenie $\mathcal{U}$ wykresu* $\mathrm{Gr}(\varphi)$ *takie, że każda $\mathcal{U}$-aproksymacja jest ε-aproksymacją.*

DOWÓD: (1) Górna półciągłość φ implikuje, że, dla dowolnego $x \in X$, istnieje liczba $r(x) > 0$ taka, że

$$B(x, r(x)) \times B(\varphi(B(x, 2r(x))), r(x)) \subset \mathcal{U}.$$

Niech $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w pokrycie otwarte $\{B(x, r(x))\}_{x\in X}$. Zatem, dla każdego $j \in J$, istnieje $x_j \in X$ takie, że $\operatorname{supp} \lambda_j \subset B(x_j, r(x_j))$. Niech $r_j := r(x_j)$ i zdefiniujmy

$$\varepsilon(x) = \sum_{j\in J} \lambda_j(x) r_j, \quad x \in X.$$

Przypuśćmy, że $f : X \to Y$ jest ε-aproksymacją wykresową φ. Dla $x \in X$, istnieje $i \in J$ takie, że $\lambda_i(x) > 0$ (stąd $x \in B(x_i, r_i)$) oraz $\varepsilon(x) \leqslant r_i$. Skoro $f(x) \in B(\varphi(B(x, \varepsilon(x))), \varepsilon(x))$, to mamy $x' \in B(x, \varepsilon(x))$ i $y' \in \varphi(x')$ takie, że $f(x) \in B(y', \varepsilon(x))$. Stąd $y' \in \varphi(B(x_i, 2r_i))$ oraz $f(x) \in B(\varphi(B(x_i, 2r_i)), r_i)$. Zatem

$$(x, f(x)) \in B(x_i, r_i) \times B(\varphi(B(x_i, 2r_i)), r_i) \subset \mathcal{U}.$$

(2) Dla dowolnego $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$, połóżmy

$$U(x, y) := \left[\varepsilon^{-1}\left(\frac{\varepsilon(x)}{2}, +\infty\right) \cap B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right)\right] \times B\left(y, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right)$$

oraz

$$\mathcal{U} = \bigcup_{(x,y)\in \mathrm{Gr}(\varphi)} U(x, y).$$

Oczywiście $\mathcal{U}$ jest otwartym otoczeniem wykresu $\mathrm{Gr}(\varphi)$. Niech $f : X \to Y$ będzie $\mathcal{U}$-aproksymacją odwzorowania φ. Zatem istnieje $x' \in X$ oraz $y' \in \varphi(x')$ takie, że $(x, f(x)) \in U(x', y')$. W takim razie $\varepsilon(x) > \frac{\varepsilon(x')}{2}$, $d(x, x') < \varepsilon(x)$ oraz $d(f(x), y') < \varepsilon(x)$. Tak więc f jest ε-aproksymacją. $\square$

2.3.2 UWAGA: (1) Gdy $\varepsilon > 0$ jest stałą, to dowód się upraszcza: wystarczy przyjąć, że $\mathcal{U} = B(\mathrm{Gr}(\varphi), \varepsilon)$, tzn. $\mathcal{U}$ jest ε-otoczeniem wykresu $\mathrm{Gr}(\varphi)$ (gdy w $X \times Y$ rozważamy metrykę max, tzn. dla $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, $d_{X\times Y}((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$).

(2) W kontekście warunku (2) powyżej, zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$, istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$B(x,\delta) \times B(\varphi(x),\delta) \subset \mathcal{U}.$$

Istotnie, z ciągłości ε wynika, że istnieje $0 < \delta < \varepsilon(x)/2$ takie, ze dla $x' \in B(x,\delta)$, $|\varepsilon(x') - \varepsilon(x)| < \varepsilon(x)/2$. Niech $x' \in B(x,\delta)$ oraz $y' \in B(\varphi(x),\delta)$. Wtedy $\varepsilon(x') > \varepsilon(x)/2$, $x' \in B(x,\varepsilon(x)/2)$ oraz $y' \in B(y,\varepsilon(x)/2)$ dla pewnego $y \in \varphi(x)$. Tak więc $(x',y') \in U(x,y) \subset \mathcal{U}$.

W szczególności, gdy $\varepsilon > 0$ jest stałą, to

$$B(x,\varepsilon) \times B(\varphi(x),\varepsilon) \subset \mathcal{U} = B(\mathrm{Gr}\,(\varphi),\varepsilon).$$

(3) Wreszcie: dla danej funkcji $\varepsilon : X \to (0,+\infty)$, funkcja f jest ε-aproksymacją odwzorowania $\varphi : X \multimap \mathcal{P}(Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest jego $\mathcal{U}$-aproksymacją, gdzie

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon) : \bigcup_{(x,y)\in \mathrm{Gr}\,(\varphi)} B((x,y),\varepsilon),$$

gdzie w iloczynie $X \times Y$ rozważamy np. metrykę max.

Rozważanie $\mathcal{U}$-aproksymacji (a nie tylko ε-aproksymacji, gdzie ε jest dodatnią funkcją lub stałą) wynika z następującej obserwacji:

2.3.3 TWIERDZENIE: *Przypuśćmy, że X, Y, Z są przestrzeniami metrycznymi, $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ i $g : Y \to Z$ jest odwzorowaniem ciągłym. Dla danego otoczenia $\mathcal{V}$ wykresu* $\mathrm{Gr}\,(g \circ \varphi)$ *istnieje takie otoczenie $\mathcal{U}$ wykresu* $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$*, że dla dowolnej $\mathcal{U}$-aproksymacji $f : X \to Y$ odwzorowania φ, złożenie $g \circ f$ jest $\mathcal{V}$-aproksymacją $g \circ \varphi$.*

DOWÓD: Niech $G : X \times Y \to X \times Z$ dane będzie wzorem $G(x,y) = (x,g(y))$, $x \in X$, $y \in Y$. Niech $\mathcal{U} := G^{-1}(\mathcal{V})$. Wtedy oczywiście $\mathcal{U}$ jest otwartym otoczeniem wykresu $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$. Weryfikację tezy przy wskazanym doborze $\mathcal{U}$ pozostawiam Czytelnikowi. □

2.3.4 UWAGA: Powyższe twierdzenie można wzmocnić. Mianowicie przypuśćmy, że $\varphi : X \multimap Y$ ma zwarte wartości i jest usc, zaś $\psi : Y \to Z$ jest takie, że $\psi^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym dla każdego $y \in Y$ i $\psi(B)$ jest zbiorem domkniętym, o ile $B \subset Y$ jest domknięty. Wtedy: dla danego otoczenie otwartego $\mathcal{V}$ wykresu $\mathrm{Gr}\,(\psi \circ \varphi)$ znajdą się otoczenia $\mathcal{U}$ wykresu $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ i $\mathcal{W}$ wykresu $\mathrm{Gr}\,(\psi)$ takie, że jeśli $f : X \to Y$ jest $\mathcal{U}$-aproksymacją odwzorowania φ, zaś $g : Y \to Z$ jest $\mathcal{W}$-aproksymacją odwzorowania ψ, to złożenie $g \circ f$ jest $\mathcal{U}$-aproksymacją złożenia $\psi \circ \varphi$.

Fakt ten pozostanie prawdziwy także, gdy odstąpić od zwartości wartości odwzorowania φ. W takiej jednak sytuacji musimy zażądać, aby otoczenie $\mathcal{V}$ było *grube*. Mówimy, że otoczenie $\mathcal{V}$ pewnego odwzorowana wielowartościowego $\Phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ jest *grube*, jeśli dla każdego $x \in X$ znajdą się otoczenie V_x punktu x i V_Φ zbiory $\varphi(x)$ takie, że $V_x \times V_\Phi \subset \mathcal{V}$ ([7]).

Najlepiej znanym twierdzeniem o istnieniu aproksymacji wykresowych jest twierdzenie Celliny Tu podajemy jego pewne uogólnienie

2.3.5 TWIERDZENIE: *Załóżmy, że X jest przestrzenią parazwartą, Y jest przestrzenią lokalnie wypukłą (np. unormowaną), zaś $\mathcal{U}$ jest otoczeniem otwartym wykresu* $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ *usc odwzorowania $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ takim, że dla każdego $x \in X$ istnieją otoczenie U_x punktu x oraz wypukłe otoczenie V_x zbioru $\varphi(x)$ takie, że $U_x \times V_x \subset \mathcal{U}$ (tak więc żądamy, by $\mathcal{U}$ było otoczeniem grubym ([8])). Wtedy istnieje $\mathcal{U}$-aproksymacja $f : X \to Y$ dla φ taka, że $f(X) \subset \mathrm{conv}\,\varphi(X)$.*

[7] Przykładem grubego otoczenie wykresu $\mathrm{Gr}\,(\Phi)$ jest zbiór $\mathcal{U}(\varepsilon)$ zdefiniowany wyżej (podmieniając φ na Φ), gdzie $\varepsilon : X \to (0,+\infty)$.

[8] Jeśli odwzorowanie $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ ma wypukłe wartości, to otoczenie $\mathcal{U}(\varepsilon)$. gdzie ε jest funkcją, jest otoczeniem o własnościach, których wymagamy – patrz też przykład 2.3.6.

Dowód: Dla dowolnego $x \in X$ wybierzmy U_x oraz V_x jak wyżej. Ewentualnie zmniejszając U_x, można założyć, że $\varphi(U_x) \subset V_x$. Niech $\mathcal{W}$ będzie pokryciem otwartym punktowo gwiaździście wpisanym w pokrycie $\{U_x\}_{x\in X}$. Niech teraz $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\mathcal{W}$. Zatem, dla dowolnego $j \in J$, istnieje $W_j \in \mathcal{W}$ takie, że $\operatorname{supp}\lambda_j \subset W_j$. Wybierzmy też $y_j \in \varphi(W_j)$. Definiujemy

$$f(x) = \sum_{j\in J} \lambda_j(x) y_j \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Wtedy f jest funkcją ciągłą. Pokażemy, że f jest $\mathcal{U}$-aproksymacją odwzorowania φ. Weźmy $x \in X$ i niech $J(x) := \{j \in J \mid x \in \operatorname{supp}\lambda_j\}$. Wtedy oczywiście $f(x) = \sum_{j\in J(x)} \lambda_j(x)y_j$. Jeśli $j \in J(x)$, to $W_j \subset \operatorname{st}(x, \mathcal{W}) \subset U_{\overline{x}}$ dla pewnego $\overline{x} \in X$; w takim razie $y_j \in \varphi(W_j) \subset \varphi(U_{\overline{x}}) \subset V_{\overline{x}}$. Czyli $f(x) \in V_{\overline{x}}$. Ponieważ oczywiście $x \in U_{\overline{x}}$, więc

$$(x, f(x)) \in U_{\overline{x}} \times V_{\overline{x}} \subset \mathcal{U}.$$

Dowodzi to, że f jest $\mathcal{U}$-aproksymacją dla φ. $\square$

2.3.6 Przykład: Jeśli X i Y są jednocześnie przestrzeniami metrycznymi (w Y rozważamy metrykę, w której kule są wypukłe), φ ma wartości wypukłe (i jest usc), to z powyższego twierdzenia wynika, że φ posiada ε-aproksymacje dla dowolnej funkcji ciągłej $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$. W szczególności otrzymujemy klasyczne twierdzenie Celliny: dla dowolnej stałej $\varepsilon > 0$, znajdziemy $f : X \to Y$ takie, że $\operatorname{Gr}(f)$ leży w ε-otoczeniu $\operatorname{Gr}(\varphi)$.

Istotnie, weźmy funkcję ciągłą $\varepsilon : X \to (0, +\infty)$ oraz $\mathcal{U}$ takie jak w poprzednim twierdzeniu. Z uwagi po tym twierdzeniu wynika, że dla każdego $x \in X$, istnieje $\delta > 0$ takie, że $U_x \times V_x \subset \mathcal{U}$, gdzie $U_x = B(x, \delta)$ oraz $V_x = B(\varphi(x), \delta) = \varphi(x) + B(0, \delta)$. Ponieważ zbiór $\varphi(x)$ jest wypukły, to V_x jest również wypukłym otoczeniem $\varphi(x)$. Zatem spełnione są założenia powyższego twierdzenia. Stąd każda (istniejąca) $\mathcal{U}$-aproksymacja φ jest również ε-aproksymacją.

2.3.7 Uwaga: Twierdzenie Celliny dotyczy w istocie odwzorowań usc o wypukłych wartościach. Kwestia istnienia aproksymacji wykresowych odwzorowań o niewypukłych wartościach jest znacznie bardziej złożona.

Rozdział 3

Mierzalność odwzorowań wielowartościowych

Niech $(\Omega, \mathcal{A})$ będzie przestrzenią mierzalną, tzn. Ω jest zbiorem, zaś $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω.

Przypomnijmy, że funkcja $f : \Omega \to X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną, jest *mierzalna* (dokładniej: *$\mathcal{A}$-mierzalna*), jeśli $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset X$ (równoważnie: $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego zbioru domkniętego $C \subset X$).

3.0.1 Ćwiczenie: Pokazać, że f jest funkcją mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset X$ ([1]).

Mówimy, że funkcja $f : \Omega \to X$ jest *prosta*, jeśli przyjmuje tylko skończoną ilość wartości. Zatem istnieją zbiory parami rozłączne A_j, $j = 1, \dots, n$ oraz $x_1, \dots, x_n \in X$ takie, że $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$ oraz $f(\omega) = x_j$ gdy $\omega \in A_j$. Łatwo widać, że funkcja prosta f jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A_j \in \mathcal{A}$ dla $j = 1, \dots, n$ (lub wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $x \in X$).

Mówimy, że funkcja $f : \Omega \to X$ jest *silnie mierzalna*, jeżeli istnieje ciąg (f_n) funkcji prostych mierzalnych $f_n : \Omega \to X$ taki, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$, $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$. Ponieważ, jak łatwo pokazać, granica punktowa ciągu funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną, to silna mierzalność implikuje mierzalność. Jeśli X jest przestrzenią ośrodkową, to mierzalność implikuje silną mierzalność.

Załóżmy dodatkowo, że $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ będzie miarą. Wtedy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. σ-ciało $\mathcal{A}$ jest *μ-zupełne*, gdy dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ takiego, że $\mu(A) =$ oraz dowolnego $A' \subset A$, zachodzi $A' \in \mathcal{A}$. Przy tym założeniu można nieco uogólnić pojęcie silnej mierzalności: $f : \Omega \to X$ jest silnie mierzalna jeżeli istnieje ciąg mierzalnych funkcji prostych $f_n : \Omega \to X$ zbieżny prawie wszędzie do f, tzn. istnieje zbiór $N \subset \Omega$, $\mu(N) = 0$, taki, że $f_n(\omega) \to f(\omega)$ dla $\omega \in \Omega \setminus N$.

3.1 Mierzalność i osłabiona mierzalność

Będziemy się teraz zajmować mierzalnością odwzorowań wielowartościowych $\varphi : \Omega \multimap X$ (tzn. odwzorowań o *domkniętych* wartościach), gdzie $(\Omega, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną.

3.1.1 Definicja: Powiemy, że odwzorowanie φ jest *mierzalne* jeśli, dla dowolnego *domkniętego*

[1] Przypomnijmy, że *zbiory borelowskie* są elementami najmniejszego σ-ciała podzbiorów X, które zawiera wszystkie zbiory otwarte; nazywane jest ono σ-ciałem zbiorów borelowskich i oznaczane symbolem $\mathcal{B}(X)$.

zbioru $C \subset X$,

$$\varphi^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

3.1.2 Przykład: Jeśli Ω jest (dodatkowo) przestrzenią metryczną, zaś φ jest odwzorowaniem usc, to φ jest mierzalne.

3.1.3 Uwaga: (1) Odwzorowanie φ jest mierzalne w *słabszym sensie*, jeśli $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego *otwartego* zbioru $U \subset X$. Pojęcie to jest nieco słabsze niż pojęcie mierzalności.

(2) Jeśli Ω jest przestrzenią metryczną, φ jest odwzorowaniem lsc, to φ jest mierzalne w słabszym sensie.

3.1.1 Ćwiczenie: Pokazać, że mierzalność $\varphi : \Omega \multimap X$ implikuje mierzalność w słabszym sensie ([2]); ta ostatnia własność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego domkniętego $C \subset X$, $\varphi^{+1}(C) \in \mathcal{A}$.

3.1.4 Fakt: *Odwzorowanie $\varphi : \Omega \multimap X$ jest mierzalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otwartego $U \subset X$, $\varphi^{+1}(U) \in \mathcal{A}$.*

Dowód: wynika natychmiast z własności (13) Faktu 1.1.2. □

3.1.5 Uwaga: Oczywiście jeśli φ ma tę własność, że $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$, to φ jest odwzorowaniem mierzalnym. Jednak — w przeciwieństwie do odwzorowań jednowartościowych — mierzalność (bez dodatkowych założeń) nie implikuje, że (duże ani małe) przeciwobrazy zbiorów borelowskich są w $\mathcal{A}$. Spowodowane to jest określonymi własnościami przeciwobrazów.

Użyteczny bywa następujący fakt.

3.1.6 Twierdzenie. *Niech $\varphi : \Omega \multimap X$ będzie mierzalne w słabszym sensie. Wówczas funkcja rzeczywista $\Omega \ni \omega \mapsto d(x, \varphi(\omega)) \in \mathbb{R}$ jest mierzalna dla dowolnego $x \in X$. Jeśli X jest przestrzenią ośrodkową, to ma również miejsce implikacja odwrotna ([3]).*

Dowód: Ustalmy $x \in X$. Z założenia, dla dowolnego $r > 0$, $\varphi^{-1}(B(x,r)) \in \mathcal{A}$. Z drugiej strony

$$\varphi^{-1}(B(x,r)) = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap B(y,r) \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid d(x, \varphi(\omega)) < r\}.$$

Dowodzi to, że funkcja $\omega \mapsto d(x, \varphi(\omega))$ jest mierzalna.

Przypuśćmy, że X jest przestrzenią ośrodkową. Analogicznie jak powyżej dla dowolnego $x \in X$ oraz $r > 0$,

$$\varphi^{-1}(B(x,r)) = \{\omega \in \Omega \mid d(x, \varphi(\omega)) < r\} \in \mathcal{A}.$$

Ośrodkowość implikuje, że każdy zbiór otwarty $U \subset X$ ma postać $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$ gdzie $x_n \in X$ oraz $r_n > 0$. Zatem

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B(x_n, r_n)) \in \mathcal{A}.$$ □

Jeśli $\mathcal{A}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω, $\mathcal{A}'$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω', to symbolem $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ oznaczamy najmniejsze σ-ciało podzbiorów zbioru $\Omega \times \Omega'$ zawierające wszystkie „prostokąty” postaci $A \times A'$, gdzie $A \in \mathcal{A}$ oraz $A' \in \mathcal{A}'$. W szczególności $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$

[2] Ponieważ X jest przestrzenią metryczną, to zbiór $U \in F_\sigma$, tzn. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ gdzie C_n jest zbiorem domkniętym (np. $C_n = \{x \in U \mid d(x, X \setminus U) > 1/n\}$).

[3] W dowodzie nie użyjemy domkniętości wartości φ.

oznacza najmniejsze σ-ciało w $\Omega \times X$ zawierające wszystkie zbiory postaci $A \times B$, gdzie $A \in \mathcal{A}$ oraz $B \in \mathcal{B}(X)$.

3.1.7 Lemat: *Niech Y będzie przestrzenią metryczną. Jeśli X jest przestrzenią ośrodkową, $f : \Omega \times X \to Y$ jest odwzorowaniem Carathéodory'ego (tzn. dla dowolnego $x \in X$, funkcja $f(\cdot, x) : \Omega \to Y$ jest mierzalna oraz, dla dowolnego $\omega \in \Omega$, funkcja $f(\omega, \cdot) : X \to Y$ jest ciągła), to f jest funkcją $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-mierzalną.*

Dowód: Niech $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie zbiorem gęstym w X. Dla dowolnego $x \in X$ i $n \in \mathbb{N}$, niech k_n będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $x \in B(x_{k_n}, 1/n)$. Wtedy oczywiście $x_{k_n} \to x$, gdy $n \to \infty$. Rozważmy funkcję $f_n : \Omega \times X \to Y$ daną wzorem

$$f_n(\omega, x) = f(\omega, x_{k_n}), \quad \omega \in \Omega,\ x \in X.$$

Ponieważ, przy ustalonym $\omega \in \Omega$, funkcja $f(\omega, \cdot)$ jest ciągła, więc dla ustalonego $(\omega, x) \in \Omega \times X$, $f_n(\omega, x) \to f(\omega, x)$. Oznacza to, że ciąg (f_n) jet punktowo zbieżny do f. Wystarczy wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, f_n jest funkcją $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(X)$-mierzalną. W tym celu, zauważmy, że dla $\omega \in \Omega$ oraz $x \in X_k = B(x_k, 1/n) \setminus \bigcup_{m=1}^{k-1} B(x_m, 1/n)$, $f_n(\omega, x) = f(\omega, x_k)$. Ponadto $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$. Zatem, dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(Y)$,

$$f_n^{-1}(B) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(\omega, x) \in \Omega \times X_k \mid f_n(\omega, x) \in B\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(\cdot, x_k)^{-1}(B) \times X_k.$$

Oczywiście $f(\cdot, x_k)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ i $X_k \in \mathcal{B}(X)$. Zatem $f_n^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ □

3.1.2 Ćwiczenie: Pokazać, że lemat powyższy pozostaje prawdziwe jeżeli założyć, że $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą zupełną, $f(\cdot, x)$ jest mierzalna dla dowolnego $x \in X$ oraz $f(\omega, \cdot)$ jest ciągła dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$.

3.1.8 Lemat: *Przypuśćmy, że $f : \Omega \times X \to Y$ jest odwzorowaniem Caratheódory'ego (odp. w sensie z poprzedniego ćwiczenia). Wtedy, jeśli funkcja $u : \Omega \to X$ jest silnie mierzalna (lub jest mierzalne, lecz X jest przestrzenią ośrodkową) (i odp. miara μ jest zupełna), to superpozycja $\Omega \ni t \mapsto f(t, u(t)) \in Y$ jest odwzorowaniem mierzalnym.*

Dowód: Silna mierzalność (lub mierzalność wraz z ośrodkowością X) implikuje istnienie ciągu $u_n \to u$ prawie wszędzie, gdzie u_n, $n \in \mathbb{N}$, jest funkcją prostą. Zauważmy, że dla dowolnego $n \geqslant 1$, funkcja $\Omega \ni t \mapsto f(t, u_n(t))$ jest mierzalna (dlaczego?). Ponadto, dla p.w. $t \in \Omega$, $f(t, u_n(t)) \to f(t, u(t))$ (dlaczego?). To kończy dowód, bo funkcja $f(\cdot, u(\cdot))$ – jako granica p.w. ciągu funkcji mierzalnych – jest mierzalna. □

3.1.9 Twierdzenie: *Niech $\varphi : \Omega \multimap X$ i niech X będzie przestrzenią ośrodkową. Jeśli funkcja $\Omega \ni \omega \mapsto d(x, \varphi(\omega)) \in \mathbb{R}$ jest mierzalna dla dowolnego $x \in X$, to $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$.*

Dowód: Ponieważ wartości φ są domknięte, to

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid d(x, \varphi(\omega)) = 0\}.$$

Oczywiście funkcja $f(\omega, x) = d(x, \varphi(\omega))$ jest funkcją Carathédory'ego; zatem, na mocy powyższego lematu, funkcja ta jest $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-mierzalna. W szczególności

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid f(\omega, x) = 0\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X). \qquad \square$$

3.1.10 Twierdzenie: *Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą zupełną i niech X będzie przestrzenią polską (tzn. przestrzenią metryczną zupełną i ośrodkową). Jeśli $\varphi : \Omega \multimap X$ ma wykres $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(x)$, to $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(X)$.*

W dowodzie wykorzystamy, trudny i ważny, lemat.

3.1.11 LEMAT (twierdzenie o projekcji): *Jeśli* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *jest zupełna przestrzenią z miarą,* X *jest przestrzenią polską, to dla dowolnego* $Z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$,

$$\pi_\Omega(Z) \in \mathcal{A},$$

gdzie $\pi_\Omega : \Omega \times X \to \Omega$ *jest rzutowaniem na „oś"* Ω*; tzn.* $\pi_\Omega(\omega, x) := \omega$ *dla* $(\omega, x) \in \Omega \times X$. □

DOWÓD TWIERDZENIA: Zauważmy, że

$$\varphi^{-1}(B) = \pi_\Omega(Z),$$

gdzie $Z = [\mathrm{Gr}\,(\varphi) \cap (\Omega \times B)]$. Ponieważ $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$, to $Z \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ i teza wynika z lematu o projekcji. □

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie.

3.1.12 TWIERDZENIE: *Niech* $\varphi : \Omega \multimap X$. *Jeśli* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *jest przestrzenią z miarą zupełną, zaś* X *jest przestrzenią polską, to następujące warunki są równoważne:*

(i) φ *jest odwzorowaniem mierzalnym;*

(ii) $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ *dla dowolnego otwartego zbioru* $U \subset X$*;*

(iii) *funkcja* $\omega \mapsto d(x, \varphi(\omega))$ *jest mierzalna dla dowolnego* $x \in X$*;*

(iv) $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$*;*

(v) $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *dla dowolnego* $B \in \mathcal{B}(X)$*;*

(vi) $\varphi^{+1}(B) \in \mathcal{A}$ *dla dowolnego* $B \in \mathcal{B}(X)$.

DOWÓD: Wynika z powyżej sformułowanych lematów i twierdzeń. Implikacja (i)$\Rightarrow$(ii) zachodzi zawsze (bez założeń o X i Ω); implikacja (ii)$\Rightarrow$(iii) zachodzi dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{A})$ oraz ośrodkowej przestrzeni X; implikacja (iii)$\Rightarrow$(iv) zachodzi dla dowolnej przestrzeni mierzalnej $(\Omega, \mathcal{A})$ oraz ośrodkowej przestrzeni X; implikacja (iv)$\Rightarrow$(v) zachodzi dla przestrzeni polskiej i przestrzeni z miarą zupełną; implikacja (v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(i) zachodzi zawsze. □

3.1.13 PRZYKŁAD: Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i niech $\varphi : \Omega \multimap X$ gdzie X jest przestrzenią polską. Jeśli $\Omega \in \mathcal{L}_n$, tzn. Ω jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, to powiemy, że odwzorowanie φ jest mierzalne w sensie Lebesgue'a gdy jest mierzalne w sensie σ-ciała podzbiorów Ω mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Jeśli $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, tzn. Ω jest zbiorem borelowskim, to mówimy, że φ jet odwzorowaniem borelowskim jeśli jest mierzalne w sensie $\mathcal{B}(\Omega)$. W tych sytuacjach mamy:

(i) Jeśli $\Omega \in \mathcal{L}_n$, to odwzorowanie φ jest mierzalne w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{B}(X)$ (w tym celu wystarczy przypomnieć, że $(\Omega, \mathcal{L}_n, \mu)$, gdzie μ oznacza miarę Lebesgue'a, jest zupełną przestrzenią z miarą).

(ii) Jeśli $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ jest zbiorem borelowskim w $\mathbb{R}^n \times X$, to φ jest mierzalne w sensie Lebesgue'a.

(iii) Jeśli $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz φ jest odwzorowaniem borelowskim, to $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times X)$.

3.1.14 UWAGA: Zauważmy też, że można w rozważanej sytuacji opisać $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ w następujący sposób. Jeśli Z jest gęstym, przeliczalnym podzbiorem X, to

$$\mathrm{Gr}\,(\varphi) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{z \in Z} [\varphi^{-1}(B(z, 1/k)) \times B(z, 1/k)].$$

Tak więc na to by $\mathrm{Gr}\,(\varphi) \in \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (odp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times X)$ potrzeba i wystarcza (odp. wystarcza), aby $\varphi^{-1}(B(x, r)) \in \mathcal{L}_n$ (odp. $\mathcal{B}(\Omega)$) dla dowolnych $x \in X$ i $r > 0$.

3.2 Mierzalne selekcje

Niech, jak wyżej, $(\Omega, \mathcal{A})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $\varphi : \Omega \multimap X$ będzie odwzorowaniem o (domkniętych) wartościach w przestrzeni metrycznej X. Funkcję mierzalną $f : \Omega \to X$ taką, że $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$) nazywamy *mierzalną selekcją* odwzorowania φ.

3.2.1 Twierdzenie (Kuratowskiego, Rylla-Nardzewskiego): *Niech $\varphi : \Omega \multimap X$, gdzie X jest przestrzenią polską, będzie odwzorowaniem mierzalnym. Wówczas φ posiada mierzalną selekcję.*

Dowód: Niech $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem gęstym w X. Zdefiniujmy indukcyjnie ciąg odwzorowań:

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_n(\omega) = \varphi_{n-1}(\omega) \cap D(x_{i(n,\omega)}, n^{-1}), \ \ \omega \in \Omega$$

gdzie $i(n, \omega) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_{n-1}(\omega) \cap D(x_i, n^{-1}) \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że liczba $i(n, \omega)$ jest określona poprawnie (dlaczego?). Dowiedziemy przy pomocy indukcji, że φ_n jest odwzorowaniem mierzalnym.

Oczywiście φ_0 jest odwzorowaniem mierzalnym. Załóżmy, że odwzorowanie φ_{n-1} jest mierzalne; pokażemy, że również odwzorowanie φ_n jest mierzalne. Niech $C \subset X$ będzie zbiorem domkniętym. Wtedy

$$\varphi_n^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega \mid [\varphi_{n-1}(\omega) \cap D(x_{i(n,\omega)}, n^{-1})] \cap C] \neq \emptyset\} =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} [\{\omega \in \Omega \mid \varphi_{n-1}(\omega) \cap [D(x_i, n^{-1}) \cap C] \neq \emptyset\} \cap \{\omega \in \Omega \mid i(n, \omega) = i\}].$$

Zauważmy, że

$$\{\omega \in \Omega \mid i(n, \omega) = i\} = \bigcap_{j=1}^{i-1} [\{\omega \in \Omega \mid \varphi_{n-1}(\omega) \cap D(x_j, n^{-1}) =$$
$$= \emptyset\} \cap \{\omega \in \Omega \mid \varphi_{n-1}(\omega) \cap D(x_i, n^{-1}) \neq \emptyset\}] \in \mathcal{A}.$$

Zatem $\varphi_n^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

Dla dowolnego $\omega \in \Omega$, wartość $\varphi_n(\omega) \neq \emptyset$ i jest zbiorem domkniętym; ponadto $\varphi_n(\omega) \subset \varphi_{n-1}(\omega)$ oraz $\operatorname{diam}(\varphi_n(\omega)) \to 0$ gdy $n \to \infty$. Z twierdzenia Cantora $\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega) = \{f(\omega)\}$. Mamy więc zdefiniowaną poprawnie funkcję $f : \Omega \to X$. Oczywiście $f(\omega) \in \varphi(\omega)$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$. Pozostało dowieść, że funkcja f jest mierzalna. Niech więc $C \subset X$ będzie domknięty. Oczywiście

$$f^{-1}(C) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid \varphi_n(\omega) \cap C \neq \emptyset\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(C).$$

Z drugiej strony jeśli $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(C)$, to znowu na mocy twierdzenia Cantora

$$\emptyset \neq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega)\right] \cap C$$

czyli $f(\omega) \in C$, a więc $\omega \in f^{-1}(C)$. Wobec tego

$$f^{-1}(C) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(C) \in \mathcal{A}. \qquad \square$$

3.2.2 Uwaga: Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego-Kuratowskiego jest również prawdziwe dla odwzorowań $\varphi : \Omega \multimap X$, gdzie $(\Omega, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, X jest przestrzenią polską, zaś φ jest odwzorowaniem mierzalnym w osłabionym sensie.

3.2.1 Problem: Udowodnić stwierdzenie z powyższej uwagi.

3.2.3 Twierdzenie (Castaing): *Niech $\varphi : \Omega \multimap X$ będzie odwzorowaniem, X przestrzenią polską. Jeśli*

(i) *φ jest odwzorowaniem mierzalnym, to*

(ii) *istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji mierzalnych na Ω o wartościach w X taki, że $\varphi(\omega) = \mathrm{cl}\,\{f_n(\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Jeśli $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą zupełną, to (ii)$\Rightarrow$(i).

Dowód: (i)$\Rightarrow$(ii). Załóżmy, że φ jest odwzorowaniem mierzalnym i niech $\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem gęstym w X. Zatem, dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$, zbiór

$$A_{m,n} := \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \cap D(x_m, 2^{-n}) \neq \emptyset\} = \varphi^{-1}(D(x_m, 2^{-n})) \in \mathcal{A}.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie $\varphi_{m,n} : \Omega \multimap X$ wzorem

$$\varphi_{m,n}(\omega) = \begin{cases} \varphi(\omega) \cap D(x_m, 2^{-n}) & \text{gdy } \ \omega \in A_{m,n} \\ \varphi(\omega) & \text{gdy } \ \omega \notin A_{m,n}. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla domkniętego $C \subset X$,

$$\varphi_{m,n}^{-1}(C) = [\varphi^{-1}(C) \cap (\Omega \setminus A_{m,n})] \cup [\varphi^{-1}(C \cap D(x_m, 2^{-n})) \cap A_{m,n}] \in \mathcal{A}.$$

Zatem $\varphi_{m,n}$ jest odwzorowaniem mierzalnym.

Z twierdzenia Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego istnieje funkcja mierzalna $f_{m,n} : \Omega \to X$ taka, że $f_{m,n}(\omega) \in \varphi_{m,n}(\omega)$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$. Wykażemy, że rodzina przeliczalna $\{f_{m,n}(\omega) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ jest gęsta w $\varphi(\omega)$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$. Niech $\omega \in \Omega$ oraz $x \in \varphi(\omega)$. Wtedy, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje x_m takie, że $d(x, x_m) \leqslant 2^{-(n+1)}$. W takim razie $\omega \in A_{m,n+1}$ oraz $d(f_{m,n+1}(\omega), x_m) \leqslant 2^{-(n+1)}$. Stąd

$$d(x, f_{m,n+1}(\omega)) \leqslant 2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Przypuśćmy, że istnieje rodzina $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ selekcji φ, która jest gęsta w φ. Dla dowolnego otwartego $U \subset X$,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U) &= \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{cl}\,\{f_n(\omega)\} \cap U \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid \{f_n(\omega)\} \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(U) \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie φ jest mierzalne. □

3.3 Operacje na odwzorowaniach mierzalnych

3.3.1 Twierdzenie: *Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą zupełną i $\varphi : \Omega \multimap \mathbb{E}$ odwzorowaniem mierzalnym, gdzie $\mathbb{E}$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Wówczas odwzorowanie*

$$\Omega \ni \omega \mapsto \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\,\varphi(\omega) \subset \mathbb{E}$$

jest odwzorowaniem mierzalnym.

Dowód: Z twierdzenie Castainga wynika, że istnieje ciąg $(f_n : \Omega \to \mathbb{E})$ odwzorowań mierzalnych taki, że $\varphi(\omega) = \operatorname{cl} \{f_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$. Niech

$$\Lambda := \{(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \text{oraz } \sum_{i=1}^{b} \lambda_i = 1\}.$$

Zbiór Λ jest przeliczalny (dlaczego?).

Rozważmy także rodzinę $g_{n,\lambda} : \Omega \to \mathbb{E}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda$, daną wzorem

$$g_{n,\lambda}(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Jest jasne, że dla każdego $\omega \in \Omega$:

- dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \Lambda$, $g_{n,\lambda}(\omega) \in \operatorname{conv} \varphi(\omega)$;
- $\operatorname{cl} \{g_{n,\lambda}(\omega)\}_{n \in \mathbb{N}, \lambda \in \Lambda} = \operatorname{cl} \operatorname{conv} \varphi(\omega)$.

To, w świetle drugiej części twierdzenia Castainga, kończy dowód. □

3.3.2 Twierdzenie: *Jeśli X jest przestrzenią polską, zaś $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ przestrzenią z miarą zupełną i jeśli $\varphi_n : \Omega \multimap X$ jest ciągiem odwzorowań mierzalnych, to odwzorowania $\varphi : \Omega \to X$ oraz $\psi : \Omega \multimap X$, dane wzorami*

$$\varphi(\omega) := \operatorname{cl} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega) \right), \quad \psi(\omega) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

są odwzorowaniami mierzalnymi.

Dowód: Dla zbioru otwartego $U \subset X$,

$$\varphi^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\omega) \right) \cap U) \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(\omega) \cap U) \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{-1}(U) \in \mathcal{A}.$$

Następnie zauważmy, że

$$\operatorname{Gr}(\psi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Gr}(\varphi_n).$$

Wiemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Gr}(\varphi_n) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$. Stąd $\operatorname{Gr}(\psi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$. □

3.3.3 Ćwiczenie: Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą zupełną, X jest przestrzenią polską i $\varphi_n : \Omega \multimap X$, $n \in \mathbb{N}$, odwzorowaniami mierzalnymi. Wówczas odwzorowania:

$$\Omega \ni \omega \mapsto \operatorname*{Lim\,sup}_{n \to \infty} \varphi_n(\omega),$$

$$\Omega \ni \omega \mapsto \operatorname*{Lim\,inf}_{n \to \infty} \varphi_n(\omega)$$

są mierzalne, o ile mają niepuste wartości.

Wskazówka: Wykorzystać ćwiczenie 1.2.3 oraz dostrzec, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto D(\varphi_n(\omega), \varepsilon)$ jest mierzalne, gdyż jego wykres

$$\operatorname{Gr}(D(\varphi_n(\cdot, \varepsilon)) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid d(x, \varphi_n(\omega)) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X),$$

ponieważ funkcja $\Omega \times X \ni (\omega, x) \mapsto d(x, \varphi_n(\omega))$ jest $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-mierzalna jak funkcja Carathéodory'ego.

3.4 Silna mierzalność odwzorowań wielowartościowych

Będziemy teraz rozważać nieco bardziej szczególny przypadek, gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ jest σ-ciałem mierzalnych w sensie Lebesgue'a podzbiorów zbioru Ω, zaś $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest miarą Lebesgue'a. Będziemy nadal rozważać odwzorowania wielowartościowe $\varphi : \Omega \multimap X$, gdzie X jest przestrzenią metryczną, tzn. odwzorowania o domkniętych wartościach).

Powiemy, że odwzorowanie φ ma *własność Łuzina*, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $F \subset \Omega$ (domknięty w $\mathbb{R}^N$) taki, że $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$ oraz $\varphi|F$ jest odwzorowaniem ciągłym (tzn. usc i lsc jednocześnie).

Mówimy, że $\psi : \Omega \multimap X$ jest *odwzorowaniem prostym*, gdy jest mierzalne i istnieją niepuste zbiory *zwarte* $C_1, \ldots, C_n \subset X$ takie, że dla każdego $\omega \in \Omega$, $\psi(\omega) = C_i$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$. Innymi słowy, ψ jest odwzorowaniem prostym, jeśli istnieją parami rozłączne zbiory $A_i \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, takie, że $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ oraz $\psi(\omega) = C_i$ dla $\omega \in A_i$.

3.4.1 FAKT: *Odwzorowanie $\psi : \Omega \multimap X$ przyjmujące skończoną liczbę wartości zwartych $\{C_1, \ldots, C_n\}$ jest proste wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$,*

$$A_i := \{\omega \in \Omega \mid \psi(\omega) = C_i\} \in \mathcal{A}.$$

DOWÓD: Załóżmy, że odwzorowanie proste ψ jest mierzalne i weźmy dowolne $j \in J_0$ gdzie

$$J_0 := \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \text{nie istnieje zbiór } C_i,\ i \neq j, \text{ zawarty w } C_j\}.$$

Oczywiście $J_0 \neq \emptyset$. Dla $j \in J_0$, $A_j = \Omega \setminus \psi^{-1}(X \setminus C_j) \in \mathcal{L}$.

Niech

$$J_1 := \{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J_0 \mid \text{nie istnieje zbiór } C_i,\ i \notin J_0,\ i \neq j, \text{ zawarty w } C_j\}.$$

Oczywiście, dla dowolnego $j \in J_1$, istnieje $i \in J_0$ takie, że $C_i \subset C_j$; ponadto $A_j \cup \bigcup\{A_i \mid i \in J_0,\ C_i \subset C_j\} = \Omega \setminus \psi^{-1}(X \setminus C_j) \in \mathcal{L}$. Stąd, dla $j \in J_1$, $A_j \in \mathcal{L}$ (bo zbiory A_i są parami rozłączne). Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy J_{n-1}; niech

$$J_n := \{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J_{n-1} \mid \text{nie istnieje zbiór } C_i,\ i \notin J_{n-1},\ i \neq j, \text{ zawarty w } C_j\}.$$

Przy założeniu, że zbiory A_i, przy $i \in J_{n-1}$, są mierzalne wnosimy, że A_j, dla $j \in J_n$, jest zbiorem mierzalnym. Po skończonej ilości kroków otrzymamy, że $A_j \in \mathcal{L}$ dla dowolnego $j = 1, \ldots, n$.

Dostateczność podanego warunku jest raczej oczywista: jeśli $A_i \in \mathcal{L}$ dla $i = 1, \ldots, n$, to dla dowolnego zbioru domkniętego $C \subset X$, $\psi^{-1}(C) = \bigcup\{A_i \mid C_i \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{L}$. $\square$

3.4.2 DEFINICJA: Powiadamy, że odwzorowanie $\varphi : \Omega \multimap X$ o *zwartych wartościach* jest *silnie mierzalne*, gdy istnieje ciąg (φ_n) odwzorowań prostych mierzalnych taki, że $d_H(\varphi_n(\omega), \varphi(\omega)) \to 0$ przy $n \to \infty$ dla p.w. (prawie wszystkich) $\omega \in \Omega$ ([4]).

3.4.3 FAKT: *Każde odwzorowanie silnie mierzalne jest mierzalne i istnieje zbiór miary zero $N \subset \Omega$ taki, że $\varphi(\Omega \setminus N)$ jest zbiorem ośrodkowym w X.*

DOWÓD: Istnieje zbiór $N \subset \Omega$, $\mu(N) = 0$, oraz ciąg (φ_n) odwzorowań prostych mierzalnych taki, że $d_H(\varphi_n(\omega), \varphi(\omega)) \to 0$ dla $\omega \in \Omega \setminus N$. Wtedy $\varphi(\Omega \setminus N) \subset Y$ gdzie $Y := \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \varphi_n(\Omega)}$. Oczywiście

[4] Tzn. dla dowolnego $\omega \in \Omega \setminus N$ gdzie $\mu(N) = 0$.

Y jest przestrzenią ośrodkową. Pokażemy mierzalność. Niech $U \subset X$ będzie otwarty; wtedy

$$(\Omega \setminus N) \cap \varphi^{+1}(U) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqslant k}^{\infty} \varphi_n^{+1}(U_m) \cap (\Omega \setminus N) \in \mathcal{L},$$

gdzie $U_m = \{x \in U \mid d(x, X \setminus U) > 1/m\}$. Istotnie, jeśli $\omega \in \varphi^{+1}(U) \cap (\Omega \setminus N)$ (czyli $\varphi(\omega) \subset U$), to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi(\omega) \subset U_m$. Ponieważ $\varphi_n(\omega) \to \varphi(\omega)$ (w sensie metryki Hausdorffa), to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\varphi_n(\omega) \subset U_m$ dla $n \geqslant k$. Tak więc $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqslant k}^{\infty} \varphi_n^{+1}(U_m)$. Na odwrót jeśli $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqslant k}^{\infty} \varphi_n^{+1}(U_m) \cap (\Omega \setminus N)$, to dla pewnych $m, k \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(\omega) \subset U_m$ o ile $n \geqslant k$. Zatem $\varphi(\omega) \subset \overline{U}_m \subset U$, czyli $\omega \in \varphi^{+1}(U) \cap (\Omega \setminus N)$. Z zupełności $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ wynika, że $\varphi^{+1}(U) \in \mathcal{L}$. □

3.4.4 Twierdzenie: *Silna mierzalność odwzorowania $\varphi : \Omega \multimap X$ o zwartych wartościach jest równoważna własności Łuzina dla φ, o ile $\mu(\Omega) < \infty$ ([5]).*

Dowód: Dostateczność: niech $\varphi : \Omega \multimap X$ będzie odwzorowaniem o zwartych wartościach spełniającym własność Łuzina. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje zbiór domknięty $F \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$ oraz $\varphi|F$ jest ciągłe; czyli H-ciągłe bo ma zwarte wartości.

Niech $\mathcal{Z}$ oznacza hiperprzestrzeń podzbiorów zwartych w X, tzn.

$$\mathcal{Z} := \{Z \subset X \mid Z \text{ jest zbiorem zwartym w } X\}.$$

Oczywiście $(\mathcal{Z}, d_H)$ jest przestrzenią metryczną. Rozważmy funkcję $f : \Omega \to \mathcal{Z}$ daną wzorem $f(\omega) = \varphi(\omega) \in \mathcal{Z}$ dla $\omega \in \Omega$. Łatwo widać, że f ma również własność Łuzina (sprawdzić).

Niech, dla $m \in \mathbb{N}$, $D_m = D(0, m) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y\| \leqslant m\}$ będzie domkniętą kulą w $\mathbb{R}^N$ o środku w zerze i promieniu m; połóżmy $\Omega_m = \Omega \cap D_m$. Wtedy $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$.

Z własności Łuzina dla f wynika, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, istnieje zbiór domknięty $F_m \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus F_m) < 1/m$ oraz $f|F_m$ jest ciągła. Oczywiście można założyć, że $F_m \subset F_{m+1}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Niech $E_m := F_m \cap D_m$; wtedy $E_m \subset \Omega_m$ oraz $\mu(\Omega_m \setminus E_m) < 1/m$. Zbiór E_m jest zwarty oraz $E_m \subset E_{m+1}$.

Skorzystamy z następującego ogólnego faktu:

Jeśli odwzorowanie f jest ciągłe na zbiorze zwartym i przyjmuje wartości w przestrzeni metrycznej, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje funkcja prosta mierzalna (jednowartościowa) taka, że jej odległość (jednostajna) od funkcji f jest mniejsza od ε.

W naszym przypadku znajdziemy funkcję prostą mierzalną $f_m : E_m \to \mathcal{Z}$ taką, że dla dowolnego $\omega \in E_m$, $d_H(f(\omega), f_m(\omega)) < 1/m$. Mierzalność f_m oznacza, że $E_m = \bigcup_{j=1}^{n_m} A_j^m$, gdzie $A_j^m \in \mathcal{L}$ przy $j = 1, \dots, n_m$, oraz $f_m(\omega) = C_j^m \in \mathcal{Z}$ dla $\omega \in A_j$ $(j = 1, \dots, n_m)$. Dodatkowo przyjmijmy, że $A_0^m := \Omega \setminus E_m \in \mathcal{L}$ i niech $C_0^m = \{x_0\}$ gdzie x_0 jest ustalonym punktem w X. Zdefiniowaliśmy wobec tego odwzorowanie proste $\varphi_m : \Omega \multimap X$ o zwartych wartościach: $\varphi_m(\omega) = C_j^m$ dla $\omega \in A_j^m$, $j = 0, 1, \dots, n_m$.

Pokażemy, że ciąg (φ_m) zbiega prawie wszędzie do odwzorowania φ (w sensie metryki Hausdorffa). Niech $N = \Omega \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Zatem

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geqslant n} (\Omega_m \setminus E_m).$$

Ponieważ, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\bigcap_{m \geqslant n} (\Omega_m \setminus E_m)) = 0$, więc $\mu(N) = 0$. Weźmy $\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $1/k < \varepsilon$ oraz $\omega \in E_m$ dla $m \geqslant k$. Zatem dla $m \geqslant k$,

$$d_H(\varphi(\omega), \varphi_m(\omega)) = d_H(f(\omega), f_m(\omega)) < 1/m < \varepsilon.$$

[5] Tego ostatniego założenia nie wykorzystamy w dowodzie dostateczności.

Konieczność: obecnie załóżmy, że φ jest odwzorowaniem silnie mierzalnym i niech $0 < \mu(\Omega) < \infty$ (gdy $\mu(\Omega) = 0$ to nie ma czego dowodzić). W takim razie istnieje zbiór $N \subset \Omega$ miary zero oraz ciąg (φ_n) mierzalnych funkcji prostych o zwartych wartościach taki, że dla $\omega \in \Omega \setminus N$, $d_H(\varphi(\omega), \varphi_n(\omega)) \to 0$, gdy $n \to \infty$. Podobnie jak poprzednio niech $f, f_n : \Omega \to \mathcal{Z}$ będą funkcjami danymi wzorami $f(\omega) = \varphi(\omega) \in \mathcal{Z}$, $f_n(\omega) = \varphi_n(\omega) \in \mathcal{Z}$ dla $\omega \in \Omega$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieją zbiory mierzalne i parami rozłączne A_j^n, $j = 1, \ldots, k_n$, takie, że $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k_n} A_j^n$ oraz $f_n(\omega) = C_j^n$, dla $\omega \in A_j^n$, gdzie C_j^n jest zbiorem zwartym w X.

Ustalmy dowolne $0 < \varepsilon < \mu(\Omega)$; poszukujemy zbioru zwartego $D \subset \Omega$ takiego, aby $\mu(\Omega \setminus D) < \varepsilon$ oraz $\varphi|D$ była H-ciągła. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i $j = 1, \ldots, k_n$ można znaleźć zbiór zwarty $F_j^n \subset A_j^n$ tak, aby $\sum_{j=1}^{k_n} \mu(A_j^n \setminus F_j^n) = \mu(\Omega \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ gdzie $F_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} F_j^n$. Oczywiście $f_n|F_n$ jest funkcją ciągłą (bo jest stała). Niech $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Wtedy

$$\mu(\Omega \setminus F) = \mu\left(\bigcup(\Omega \setminus F_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Omega \setminus F_n) < \varepsilon/2.$$

Zatem zbiór F jest zwarty i niepusty. Ponadto, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $f_n|F$ jest ciągła.

Skorzystamy teraz z twierdzenia Jegorowa, które orzeka, że:

Jeśli $f_n \to f$ prawie wszędzie, f, f_n są funkcjami mierzalnymi określonymi na Ω z $\mu(\Omega) < \infty$ i o wartościach w przestrzeni metrycznej, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $E_\varepsilon \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ oraz $f_n \to f$ jednostajnie na E.

W naszej sytuacji znajdziemy zbiór zwarty $E \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus E) < \varepsilon/2$ oraz $f_n \to f$ jednostajnie na E. Wobec tego $f_n \to f$ jednostajnie na zbiorze zwartym $D = E \cap F$. Ponieważ f_n jest funkcją ciągłą na D, to także funkcja $f|D$ jest ciągła. Ponadto $\mu(\Omega \setminus D) = \mu((\Omega \setminus E) \cup (\Omega \setminus F)) < \varepsilon$. Oczywiście ciągłość f na D oznacza ciągłość φ na D. □

3.4.5 Twierdzenie: *Jeśli X jest przestrzenią polską, odwzorowanie $\varphi : \Omega \multimap X$ ma zwarte wartości i jest mierzalne, to φ jest silnie mierzalne.*

Dowód: Niech $\mathcal{Z}$ oznacza, jak wyżej, przestrzeń zbiorów zwartych z metryką Hausdorffa oraz niech $f : \Omega \to \mathcal{Z}$ będzie funkcją daną wzorem $f(\omega) = \varphi(\omega) \in \mathcal{Z}$ dla $\omega \in \Omega$. Jak wiadomo, $\mathcal{Z}$ jest też przestrzenią polską. Dla silnej mierzalności φ wystarczy pokazać, że f jest odwzorowaniem mierzalnym: wówczas bowiem (na mocy ośrodkowości $\mathcal{Z}$) istnieje ciąg funkcji prostych mierzalnych $f_n : \Omega \to \mathcal{Z}$ taki, że $f_n \to f$ p.w. na ω; jasne, że każda funkcja f_n wyznacza pewną funkcję prosta $\varphi_n : \Omega \multimap X$ oraz $\varphi_n \to \varphi$ w sensie odległości Hausdorffa.

Skorzystamy z twierdzenia Castainga: z mierzalności φ wynika, że istnieje ciąg funkcji mierzalnych $g_n : \Omega \to X$ taki, że $\varphi(\omega) = \overline{\{g_n(\omega)\}}$ dla każdego $\omega \in \Omega$. W celu wykazania mierzalności f wystarczy pokazać, że dla dowolnego $C \in \mathcal{Z}$, funkcja $\Omega \ni \omega \mapsto d_H(C, f(\omega)) \in \mathbb{R}$ jest mierzalna. Zauważmy, że

$$d_H(C, f(\omega)) = d_H(C, \varphi(\omega)) = \max\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{x \in C} d(g_n(\omega), x), \sup_{x \in C} \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x, g_n(\omega))\}.$$

Jest jasne, że jeśli $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem gęstym w C, to dla każdego $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{x \in C} d(x, g_n(\omega)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \in \mathbb{N}} d(x_k, g_n(\omega))$$

oraz

$$\sup_{x \in C} \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x, g_n(\omega)) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_k, g_n(\omega)).$$

W takim razie funkcje $\omega \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{x \in C} d(g_n(\omega), x)$ oraz $\omega \mapsto \sup_{x \in C} \inf_{n \in \mathbb{N}} d(x, g_n(\omega))$ są mierzalne; wobec tego także funkcja $\omega \mapsto d_H(C, f(\omega))$ jest mierzalna. □

Udowodnimy jeszcze:

3.4.6 Twierdzenie: *Niech $\varphi : \Omega \multimap X$, gdzie X jest przestrzenią ośrodkową i $(\Omega, \mathcal{A})$ jest przestrzenią mierzalną, ma zwarte wartości, to odwzorowanie $f = f_\varphi : \Omega \to \mathcal{Z}$, dane wzorem $f(\omega) = \varphi(\omega)$ dla $\omega \in \Omega$, jest mierzalne wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest mierzalne.*

Dowód: Załóżmy, że f jest funkcja mierzalną i niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Wtedy

$$\varphi^{+1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega) \subset U\}.$$

Rozważmy zbiór $\mathcal{U} := \{K \in \mathcal{Z} \mid K \subset U\}$. Zatem oczywiście $\varphi^{+1}(U) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in \mathcal{U}\} = f^{-1}(\mathcal{U})$. Jest jasne, że zbiór $\mathcal{U}$ jest otwarty w $\mathcal{Z}$. Istotnie, jeśli $K \in \mathcal{U}$, to istnieje $r > 0$ takie, że $B(K, r) \subset U$. Jeśli więc $K' \in \mathcal{Z}$ oraz $d_H(K', K) < r$, to $K' \subset B(K, r)$; czyli $K' \in \mathcal{U}$ bo $K' \subset U$. Mierzalność funkcji f gwarantuje, że $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$.

Na odwrót, załóżmy, że φ jest odwzorowaniem mierzalnym. Weźmy $r > 0$ oraz $K \in \mathcal{Z}$. Pokażemy, że zbiór $f^{-1}(B_{\mathcal{Z}}(K, r))$ jest mierzalny gdzie $B_{\mathcal{Z}}(K, r)$ oznacza kulę w przestrzeni $\mathcal{Z}$ o środku w $K \in \mathcal{Z}$ i promieniu r. Zauważmy, że

$$f^{-1}(B_{\mathcal{Z}}(K, r)) = \varphi^{+1}(B(K, r)) \cap \{\omega \in \Omega \mid \sup_{z \in K} d(z, \varphi(\omega)) < r\}.$$

Równość ta jest oczywista: $f(\omega) \in B_{\mathcal{Z}}(K, r)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(\omega) \subset B(K, r)$ oraz $K \subset B(\varphi(\omega), r)$ a drugi warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_{z \in K} d(z, \varphi) < r$. Jest jasne, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$,

$$\sup_{z \in K} d(z, \varphi(\omega)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d(z_n, \varphi(\omega))$$

gdzie $\{z_n\}$ jest ośrodkiem w K. Mierzalność φ implikuje, że funkcja $\omega \mapsto d(z_n, \varphi(\omega))$ jest mierzalna; zatem mierzalna jest również funkcja $\omega \mapsto sup_{n \in \mathbb{N}} d(z_n, \varphi(\omega))$ jest mierzalna. Zatem mierzalność zbiorów $\varphi^{+1}(B(K, r))$ oraz $\{\omega \in \Omega \mid sup_{z \in K} d(z, \varphi(\omega)) < r\}$ implikuje mierzalność zbioru $f^{-1}(B_{\mathcal{Z}}(K, r)$. Z kolei ośrodkowość $\mathcal{Z}$ implikuje, że z mierzalności przeciwobrazów poprzez f kul w $\mathcal{Z}$ wynika mierzalność przeciwobrazów poprzez f zbiorów otwartych. □

Uwaga: Jeśli powyżej założyć, że φ jest silnie mierzalne, to ośrodkowość X nie jest potrzebna (w dowodzie konieczności mierzalności φ w ogóle ośrodkowość nie była potrzebna).

3.5 Odwzorowania wielowartościowe Carathéodory'ego

Zajmiemy się teraz wielowartościowymi odwzorowaniami Carathéodory'ego. Jak poprzednio dane są dwie przestrzenie metryczne X, Y i przestrzeń mierzalna $(\Omega, \mathcal{A})$.

3.5.1 Twierdzenie: *Przypuśćmy, że X jest przestrzenią ośrodkową. Jeśli odwzorowanie o zwartych wartościach $\varphi : \Omega \times X \multimap Y$ jest odwzorowaniem Carathéodory'ego, tzn. dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$, odwzorowanie $\varphi(\omega, \cdot) : X \multimap Y$ jest H-ciągłe (jest to równoważne ciągłości) oraz dla dowolnego $x \in X$, odwzorowanie $\varphi(\cdot, x) : \Omega \multimap Y$ jest mierzalne, to φ jest $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$-mierzalne.*

Dowód: Należy postępować taj jak w dowodzie lematu 3.1.7 po zastąpieniu φ odwzorowaniem $f_\varphi : \Omega \times X \to \mathcal{Z}_Y$, gdzie $\mathcal{Z}_Y$ jest hiperprzestrzenią zbiorów zwartych w Y. □

3.5.2 Lemat: *Niech $\varphi : \Omega \times X \multimap Y$ będzie odwzorowaniem Carathéodory'ego o zwartych wartościach, X przestrzenią ośrodkową, zaś Y przestrzenią polską $f : \Omega \to X$ funkcją mierzalną,* *to odwzorowanie* $G : \Omega \ni \omega \mapsto \varphi(\omega, f(\omega) \subset Y$ *jest mierzalne, o ile zadana jest miara zupełna na* $\mathcal{A}$.

DOWÓD: Wystarczy pokazać, że wykres $\mathrm{Gr}\,(G) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$. Rozważmy odwzorowanie $g : \Omega \times Y \to \Omega \times X \times Y$ dane wzorem $g(\omega, y) := (\omega, f(\omega), y)$ dla $\omega \in \Omega$ i $y \in Y$; jest ono mierzalne w tym sensie, że dla dowolnego zbioru $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, $g^{-1}(C) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$ (wynika to natychmiast z faktu, że odwzorowanie $\Omega \ni \omega \mapsto (\omega, f(\omega))$ jest mierzalne, gdy w dziedzinie rozważyć σ-ciało produktowe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$). Następnie zauważmy, że

$$\mathrm{Gr}\,(G) = g^{-1}(\mathrm{Gr}\,(\varphi)),$$

co wraz z poprzednim twierdzeniem kończy dowód. □

3.5.3 TWIERDZENIE: *Przy założeniach z lematu, przypuśćmy dodatkowo, że* X *jest przestrzenią polską, niech* $\psi : \Omega \to X$ *będzie odwzorowaniem mierzalnym o zwartych wartościach. Wtedy* $G : \Omega \to \mathcal{P}(Y)$ *dane wzorem*

$$G(\omega) := \varphi(\{\omega\} \times \psi(\omega)), \quad \omega \in \Omega,$$

ma zwarte wartości i jest mierzalne.

DOWÓD: Dla dowolnego $\omega \in \Omega$, zbiór $G(\omega, \psi(\omega))$ jest zwarty, bo Zgodnie z twierdzeniem Castainga znajdzie się przeliczalna rodzina $f_n : \Omega \to Y$ odwzorowań mierzalnych taka, że $\psi(\omega) = \mathrm{cl}\,\{f_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$. Niech

$$G_n(\omega) := \varphi(\omega, f_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Z lematu wynika mierzalność odwzorowań $G_n : \Omega \multimap Y$. Następnie wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $\omega \in \Omega$

$$G(\omega) := \mathrm{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(\omega).$$

Rzeczywiście: inkluzja $\supset$ jest oczywista; jeśli $y \in G(\omega)$, $\omega \in \Omega$, to $y \in \varphi(\omega, x)$, gdzie $x \in \psi(\omega)$. Wtedy (bez zmniejszenia ogólności) można założyć, że $x = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$. Ponieważ $\varphi(\omega, \cdot)$ jest lsc, więc istnieje ciąg $(y_n) \subset Y$ taki, że $y_n \in \varphi(\omega, f_n(\omega))$ i $y_n \to y$: to kończy dowód inkluzji $\subset$. Mierzalność G jest konsekwencją twierdzenia 3.3.2. □

Fakty opisywane w powyższym lemacie i twierdzeniu nie są prawdziwe, gdy założyć, że odwzorowanie φ jest jedynie górnie Carathéodory'ego.

Mówimy, że $\varphi : \Omega \times X \multimap Y$ jest *górnie Carathéodory'ego* jeśli dla dowolnego $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega, \cdot) : X \multimap Y$ jest usc i dla każdego $x \in X$, $\varphi(\cdot, x) : \Omega \multimap Y$ jest mierzalne.

3.5.4 TWIERDZENIE: *Przypuśćmy, że* Y *jest przestrzenią polską. Jeżeli* $\varphi : \Omega \times X \multimap Y$ *ma zwarte wartości, jest górnie Carathéodory'ego i* $f : \Omega \to X$ *jest odwzorowaniem silnie mierzalnym, to odwzorowanie* $\varphi(\cdot, f(\cdot)) : \Omega \multimap Y$ *posiada silnie mierzalną selekcję.*

DOWÓD: Niech ciąg funkcji prostych mierzalnych $f_n \to f$ p.w. na Ω, tzn. istnieje $M \subset \Omega$, $\mu(M) = 0$ oraz $v_n(\omega) \to v(\omega)$ przy $n \to \infty$ dla $\omega \in \Omega \setminus M$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, istnieją zbiory mierzalne $A_1^n, \ldots, A_{k_n}^n$ takie, że $\bigcup_{j=1}^{k_n} A_j^n = \Omega$ oraz $f_n|A_j^n = x_j^n$, $j = 1, \ldots, k_n$. Z twierdzenia o selekcji mierzalnej wynika, że dla wszystkich n oraz $j = 1, \ldots, k_n$ istnieje mierzalna, a więc (z ośrodkowości Y) silnie mierzalna funkcja $w_j^n : \Omega \to Y$ taka, że $w_j^n(\omega) \in \varphi(\omega, x_j^n)$ dla $\omega \in \Omega$. Zdefiniujmy $w_n : \Omega \to Y$ wzorem: dla $\omega \in A_j^n$, $w_n(\omega) = w_j^n(\omega)$, $j = 1, \ldots, k_n$. Oczywiście funkcja w_n jest silnie mierzalna oraz $w_n(\omega) \in \varphi(\omega, f_n(\omega))$ na Ω. Ustalmy $\omega \in \Omega \setminus M$. Odwzorowanie

$\varphi(\omega,\cdot)$ ma zwarte wartości i jest usc $w_n(\omega) \in \varphi(\omega, f_n(\omega))$, ponadto $f_n(\omega) \to v(\omega)$; zatem ciąg $(w_n(\omega))$ posiada zbieżny podciąg. Oznacza to, iż zbiór $G_n(\omega) := \overline{\{w_k(\omega)\}_{k\geqslant n}}$ jest zwarty. Rodzina $\{G_n(\omega)\}$ jest zstępująca, czyli zbiór $G(\omega) := \bigcap_{n\geqslant 1} G_n(\omega)$ jest niepusty i zwarty. Zauważmy, że dla dowolnego $y \in Y$,

$$d(y, G(\omega)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d(y, G_n(\omega)).$$

Odwzorowanie $G_n : \Omega \setminus M \multimap Y$ jest mierzalne, $d(y, G_n(\omega)) = \sup_{k\geqslant n} d(y, w_k(\omega))$ dla każdego $y \in Y$. Zatem także G jest mierzalne. Z twierdzenia Kuratowskiego i Ryll-Nardzewskiego G posiada mierzalną selekcję $w : \Omega \setminus M \to Y$. Oczywiście $w(\omega) \in \varphi(omega, f(\omega))$ dla $\omega \in \Omega \setminus M$. Jest to oczywiście funkcja silnie mierzalna. Po jej dookreśleniu na M tak, by $w(\omega) \in \varphi(\omega, v(\omega))$ przy $\omega \in N$ otrzymujemy tezę. □

3.5.5 UWAGA: Twierdzenie pozostaje prawdziwe jeśli nie zakładać ośrodkowości Y, lecz zamiast mierzalności odwzorowania $\varphi(\cdot, x) : \Omega \multimap Y$ założyć, że ma ono silnie mierzalną selekcją. Zakładając, że silnie mierzalne są funkcje w_j^n, silnie mierzalne są też funkcje w_n. Co za tym idzie można znaleźć ośrodkową podprzestrzeń Y_0, w której wartości przyjmuje G.

Niech $(\Omega, \mathcal{L}, \mu)$ będzie jak wyżej przestrzenią z miarą Lebesgue'a oraz X, Y przestrzeniami metrycznymi. Będziemy zajmować się odwzorowaniami $F : \Omega \times X \multimap Y$.

Wiadomo, że jeśli X, Y są przestrzeniami ośrodkowymi, to $f : \Omega \times X \to Y$ jest funkcją Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy, gdy f ma *własność Scorza-Dragoni*, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty (w $\mathbb{R}^N$) $F \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$ oraz $f|F \times X$ jest funkcją ciągłą.

Mamy więc także

3.5.6 TWIERDZENIE: *Odwzorowanie $\varphi : \Omega \times X \multimap Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami ośrodkowymi, o zwartych wartościach jest odwzorowaniem Carathéodory'ego wtedy i tylko wtedy gdy ma własność Scorza-Dragoni, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty (w $\mathbb{R}^N$) $F \subset \Omega$ taki, że $\mu(\Omega \setminus F) < \varepsilon$ oraz $\varphi|F \times X$ jest funkcją ciągłą.* □

3.5.7 UWAGA: Przy założeniu, że dla każdego $x \in X$, odwzorowanie $\varphi(\cdot, x) : \Omega \to Y$ jest silnie mierzalne oraz $\mu(\Omega) < \infty$, to założenie ośrodkowości (w odniesieniu do X oraz Y) nie jest potrzebne.

Rozdział 4

Całka Bochnera i dodatkowe informacje

4.1 Mierzalność, silna mierzalność i całka Bochnera

Niech, jak wyżej, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą σ-skończoną i niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią Banacha. Przypomnijmy, że funkcja $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest *mierzalna* (odp. *silnie mierzalna*) jeśli, dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{E}$, $u^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (odp. istnieje ciąg $u_n : \Omega \to \mathbb{E}$ funkcji prostych mierzalnych taki, że $u_n \to u$ p.w. na Ω). Oczywiście każda funkcja prosta i mierzalna (tj. taka, że $u = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i$ gdzie $A_i \in \mathcal{A}$, dla $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ oraz $a_i \in \mathbb{E}$, $i, j = 1, \ldots, n$) jest silnie mierzalna; ogólniej jeśli $u = \sum_{i=1}^\infty \chi_{A_i} a_i$ gdzie $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ przy $i \neq j$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ oraz $a_i \in \mathbb{E}$ dla $i, j \in \mathbb{N}$, to u jest silnie mierzalna. Suma, iloczyn funkcji silnie mierzalnych jest silnie mierzalny. Granica p.w. funkcji silnie mierzalnych jest silnie mierzalna

Mówimy również, że funkcja u jest *słabo mierzalna*, gdy dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$, funkcja $\Omega \ni \omega \mapsto \langle p, u(\omega)\rangle \in \mathbb{R}$ jest mierzalna. Jest jasne, że funkcja silnie mierzalna jest mierzalna, zaś funkcja mierzalna jest słabo mierzalna.

4.1.1 TWIERDZENIE (Pettisa): *Funkcja $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest silnie mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy p.w. przyjmuje wartości w przestrzeni ośrodkowej (tzn. istnieje zbiór $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ taki, że zbiór $u(\Omega \setminus N)$ jest ośrodkowy) i u jest słabo mierzalna. W szczególności, gdy $\mathbb{E}$ jest przestrzenią ośrodkową, to pojęcia silnej mierzalności, mierzalności i słabej mierzalności są równoważne. Wynika stąd również, że jeśli $\mathbb{E}$ jest ośrodkowa, $u : \Omega \to \mathbb{E}$ oraz istnieje ciąg $u_n : \Omega \to E$ funkcji silnie mierzalnych taki, że dla p.w. $x \in \Omega$,*

$$u_n(x) \rightharpoonup u(x),$$

(słaba zbieżność) to u jest silnie mierzalna. □

Załóżmy, że funkcja $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest prosta i mierzalna, tzn.

$$u = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} a_i,$$

gdzie $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathbb{E}$ dla $i = 1, \ldots, n$, oraz $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Jeśli, dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$ takiego, że $a_i \neq 0$, mamy $\mu(A_i) < \infty$, to mówimy, że u jest *całkowalna* a wyrażenie

$$\int_\Omega u(x)\, dx = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) a_i \in \mathbb{E}$$

nazywamy *całką funkcji u na Ω*.

Mówimy, że silnie mierzalna funkcja $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest *całkowalna w sensie Bochnera* na Ω, jeżeli istnieje ciąg $(u_n : \Omega \to \mathbb{E})_{n=1}^{\infty}$ funkcji prostych mierzalnych i całkowalnych taki, że $u_n \to u$ p.w. na Ω oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|u(x) - u_n(x)\|\, dx = 0.$$

Wówczas też kładziemy

$$\int_\Omega u(x)\, dx := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\, dx.$$

Definicja ta jest poprawna: ponieważ $u - u_n$ jest funkcją mierzalną, to $\|u - u_n\|$ jest funkcja mierzalną; zatem warunek z definicji ma sens. Ponadto

$$\left\| \int_\Omega u_n(x)\, dx - \int_\Omega u_m(x)\, dx \right\| = \left\| \int_\Omega (u_n(x) - u_m(x))\, dx \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \|u_n(x) - u_m(x)\|\, dx \leqslant \int_\Omega \|u(x) - u_n(x)\|\, dx + \int_\Omega \|u(x) - u_m(x)\|\, dx.$$

Zatem ciąg całek

$$\int_\Omega u_n(x)\, dx$$

jest ciągiem Cauchy'ego, co dowodzi, że jest on zbieżny. Jest również jasne, że granica nie zależy od ciągu (u_n) bo dowolne dwa ciągi aproksymujące mogą być „skombinowane" do jednego ciągu.

4.1.2 Twierdzenie (Bochnera): *Silnie mierzalna funkcja $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\|u\| : \Omega \to \mathbb{R}$ jest całkowalna. Ponadto, wtedy*

$$\left\| \int_\Omega u(x)\, dx \right\| \leqslant \int_\Omega \|u(x)\|\, dx. \qquad \square$$

Ogólniej, jeśli $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{A}$, to można rozważać całkowalność funkcji silnie mierzalnych $u : A \to \mathbb{E}$. Mówimy mianowicie, że u jest całkowalna, gdy całkowalna (na Ω) jest funkcja

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dla} \quad x \in A; \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Piszemy wówczas

$$\int_A u(x)\, dx := \int_\Omega u^*(x)\, dx.$$

Jest jasne, że jeśli $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest całkowalna w sensie Bochnera na Ω, to jest $u|_A : A \to \mathbb{E}$ całkowalna na A oraz

$$\int_A u(x)\, dx := \int_A u|_A(x)\, dx = \int_\Omega \chi_A(x) u(x)\, dx.$$

4.1.3 Twierdzenie (Bochnera): *Jeśli $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, gdzie $\mathbb{E}'$ jest przestrzenią Banacha (tzn. T jest operatorem liniowym i ciągłym), $A \in \mathcal{A}$, funkcja $u : A \to \mathbb{E}$ jest całkowalna, to funkcja $T \circ u$ jest też całkowalna oraz*

$$\int_A T \circ u(x)\, dx = T\left(\int_A u(x)\, dx \right).$$

W szczególności, dla dowolnego funkcjonału $p \in \mathbb{E}^*$, funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle$ jest całkowalna oraz

$$\int_A \langle p, u(x)\rangle\, dx = \left\langle p, \int_A u(x)\, dx \right\rangle.$$

Jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią ośrodkową, to całkowalność $u : \Omega \to \mathbb{E}$ jest równoważna całkowalności $\langle p, u(\cdot)\rangle$ dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$. □

4.1.4 Twierdzenie: *Jeśli $u_n : A \to \mathbb{E}$ są funkcjami całkowalnymi, $u_n \to u$ p.w. na A oraz istnieje funkcja $g : A \to \mathbb{R}$ całkowalna (w sensie Lebesgue'a) taka, że $\|u_n\| \leqslant g$ p.w. na A, to u jest całkowalna w sensie Bochnera na A oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \|u(x) - u_n(x)\|\, dx = 0, \quad \int_A u(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A u_n(x)\, dx.$$

Jeśli przestrzeń $\mathbb{E}$ jest ośrodkowa oraz $u_n \rightharpoonup u$ p.w. na A, to zachodzi ta sama teza.

Jeśli funkcje u_n są całkowalne na A, $u_n \rightharpoonup u$ p.w. na A i

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A \|u_n(x)\|\, dx < \infty,$$

to funkcja u jest całkowalna oraz

$$\int_A \|u(x)\|\, dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A \|u_n(x)\|\, dx.$$ □

Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$, symbolem $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ oznaczamy przestrzeń (klas równoważności względem relacji równości prawie wszędzie) funkcji silnie mierzalnych $u : \Omega \to \mathbb{E}$ takich, że $\|u\| \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ wraz z normą

$$\|u\|_{L^p} := \left(\int_\Omega \|u(x)\|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|u(x)\| := \inf_{Z\subset\Omega,\, \mu(Z)=0}\ \sup_{x\in\Omega\setminus Z} \|u(x)\|.$$

Wraz z tymi normami *przestrzenie $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ są przestrzeniami Banacha*; dla $1 \leqslant p < \infty$, $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ jest także słabo zupełna, o ile taka jest przestrzeń $\mathbb{E}$. W dowodzie zupełności istotną rolę odgrywa następujący ważny wariant twierdzenia Marcinkiewicza

4.1.5 Twierdzenie: *Jeśli dany jest ciąg $(u_n) \subset L^p(\Omega, \mathbb{E})$ spełniający warunek Cauchy'ego względem normy $\|\cdot\|_{L^p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, to istnieje podciąg (u_{n_k}) oraz funkcje $u \in L^p(\Omega, \mathbb{E})$ i $g \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ takie, że $u_{n_k} \to u$ prawie wszędzie i $\|u_{n_k}\| \leqslant g$ prawie wszędzie dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.* □

Dla $1 \leqslant p < \infty$, funkcje proste mierzalne całkowalne tworzą zbiór gesty w $L^p(\Omega, \mathbb{E})$; zatem – przy założeniu, że $\mathbb{E}$ jest przestrzenią ośrodkową – $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ jest też ośrodkowa.

Warto też zauważyć, że – w szczególnej sytuacji, gdy Ω jest przedziałem na prostej:

4.1.6 Lemat: *Funkcje schodkowe (tzn. funkcje proste postaci $u = \sum_{i=1}^n \chi_{\Omega_i} e_i$, gdzie Ω_i są przedziałami, $e_i \in \mathbb{E}$, $i = 1, \ldots, n$) tworzą gęsty podzbiór w $L^p(\Omega, \mathbb{E})$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Dowód: Niech $u \in L^p(\Omega, \mathbb{E})$. Ponieważ u jest funkcja silnie mierzalną, to istnieje ciąg (u_n) funkcji prostych taki, że $u_n \to u$ prawie wszędzie. Niech

$$v_n(s) = \begin{cases} u_n(s) & \text{gdy } \|u_n(s)\| \leqslant 2\|u(s)\|, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jest jasne, że v_n jest też funkcja prostą oraz $v_n \to u$ prawie wszędzie. Co więcej

$$\|v_n(s) - u(s)\|^p \leqslant 3^p \|u(s)\|^p$$

dla dowolnego $s \in \Omega$. Stąd i z twierdzenia Lebesgue'a

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u\|_{L^p}^p = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|v_n(s) - u(s)\|^p \, ds = 0.$$

Wystarczy teraz pokazać, że każda funkcja prosta jest granicą (w L^p) ciągu funkcji schodkowych, a więc, że te własność ma dowolna funkcja postaci $\chi_B e$, gdzie $B \subset \Omega$ jest zbiorem mierzalnym, $|B| < \infty$, zaś $e \in \mathbb{E}$. Regularność miary Lebesgue'a implikuje, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty U, że $|U \setminus B| < \varepsilon$. Z kolei U jest przeliczalną sumą rozłącznych odcinków I_i; $U = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$. Niech $u_m(s) := e$ dla $s \in J_m := \bigcup_{i=1}^m I_i$. Oczywiście $\varepsilon_m := |U \setminus J_m| \to 0$, gdy $m \to \infty$ oraz u_m jest funkcja schodkową. Wtedy

$$\|u - u_m\|_{L^p}^p = \int_{\Omega\setminus J_m} \|e\|^p \, ds + \int_{J_m\setminus\Omega} \|e\|^p \, ds \leqslant \|e\|^p(|\Omega \setminus J_m| + |J_m \setminus \Omega|) < \|e\|^p(\varepsilon_m + \varepsilon).$$

To kończy dowód. □

4.1.7 Twierdzenie (Nierówność Höldera): *Jeżeli* $u \in L^p(\Omega, E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $v \in L^q(\Omega, \mathbb{E}^*)$ *oraz* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *to funkcja* $\langle v(\cdot), u(\cdot)\rangle \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ *oraz*

$$\int_\Omega \langle v(x), u(x)\rangle \, dx \leqslant \|v\|_{L^q} \|u\|_{L^p}.$$

Jeśli $\mathbb{H}$ *jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *to* $L^2(\Omega, \mathbb{H})$ *jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym*

$$\langle u, v\rangle_{L^2} := \int_\Omega \langle u(x), v(x)\rangle \, dx.$$ □

4.1.8 Uwaga: Oczywiście, jeśli $\mathbb{E} \hookrightarrow \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F}$ jest przestrzenią Banacha (tzn. $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ i włożenie jest ciągłe ([1])), to $L^p(\Omega, \mathbb{E}) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{F})$ dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$; jeśli dodatkowo $\mu(\Omega) < \infty$, to $L^p(\Omega, \mathbb{E}) \hookrightarrow L^q(\Omega, \mathbb{F})$ o ile $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$.

4.1.9 Twierdzenie (Phillipsa): *Niech przestrzeń* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *będzie* σ*-skończona. Jeśli przestrzeń* E *jest refleksywna lub ośrodkowa,* $1 \leqslant p < \infty$, *to przestrzenią sprzężoną do* $L^p(\Omega, E)$ *jest przestrzeń* $L^q(\Omega, E^*)$ *gdzie* $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Dokładniej, dla dowolnego $\varphi \in \left[L^p(\Omega, E)\right]^*$, *istnieje* $v \in L^q(\Omega, E^*)$ *taka, że dla każdego* $u \in L^p(\Omega, E)$,

$$\langle \varphi, u\rangle = \int_\Omega \langle v(x), u(x)\rangle \, dx.$$

$L^p(\Omega, \mathbb{E})$ *jest przestrzenią refleksywną, o ile* $1 < p < \infty$ *i* $\mathbb{E}$ *jest refleksywna.* □

Można tez dowieść, że jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią jednostajnie wypukłą, to $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ jest też jednostajnie wypukła, gdy $1 > p < \infty$.

[1] Tzn. istnieje taka stała $C \geqslant 0$, że $\|x\|_{\mathbb{F}} \leqslant C\|x\|_{\mathbb{E}}$ dla każdego $x \in \mathbb{E}$.

4.2 Absolutna ciągłość i przestrzenie Sobolewa

Zajmiemy się teraz szczególnym przypadkiem: Niech $\Omega = J \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Wtedy wraz z σ-ciałem swych mierzalnych (w sensie Lebesgue'a) podzbiorów oraz miarą Lebesgue'a mamy przestrzeń z zupełną i σ-skończoną miarą.

Jeśli $A = [a, b] \subset J$, to piszemy

$$\int_a^b u(x)\,dx := \int_A u(x)\,dx$$

oraz

$$\int_b^a u(x)\,dx := -\int_a^b u(x)\,dx.$$

Niech $u : J \to \mathbb{E}$ i $t \in J$. Jeśli istnieje granica

$$u'(t) := \lim_{h\to 0,\, t+h\in J} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

to mówimy, że funkcja u jest *różniczkowalna* w punkcie t i $u'(t)$ jest *pochodną* funkcji u w punkcie t. Jeśli u jest różniczkowalna w każdym punkcie, to mówimy, że u jest *różniczkowalna* i funkcję $J \ni t \mapsto u'(t) \in \mathbb{E}$ nazywa się *pochodną*.

Jeżeli istnieje $x \in \mathbb{E}$ takie, że dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$

$$\lim_{h\to 0,\, t+h\in J} \left\langle p, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\rangle = 0,$$

to mówimy, że funkcja u jest *słabo różniczkowalna* w punkcie t i x jest *słabą pochodną* funkcji u w punkcie t. Piszemy również $u'(t)$. Jeśli u jest słabo różniczkowalna w każdym punkcie, to mówimy, że u jest *słabo różniczkowalna* i funkcję $J \ni t \mapsto u'(t) \in \mathbb{E}$ nazywa się *słabą pochodną*.

Oczywiście różniczkowalność w punkcie $t \in J$ pociąga słabą różniczkowalność i słaba pochodna jest równa pochodnej w punkcie t.

Piszemy $u \in C^1(J, \mathbb{E})$, gdy funkcja u jest różniczkowalna oraz pochodna $u' : J \to \mathbb{E}$ jest ciągła. Podobnie, piszemy $u \in C^1_w(J, \mathbb{E})$, gdy u jest słabo różniczkowalna i słaba pochodna $u' : J \to E$ jest ciągowo słabo ciągła, tzn. dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$, funkcja $J \ni t \mapsto \langle p, u'(t)\rangle$ jest ciągła. Jasne, że $C^1(J, \mathbb{E}) \subset C^1_w(I, \mathbb{E})$.

4.2.1 Uwaga: (1) Jeśli istnieje słaba pochodna $u'(t)$, to dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$ funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle$ jest różniczkowalna w punkcie t oraz

$$\frac{d}{dt}\langle p, u(\cdot)\rangle = \langle p, u'(\cdot)\rangle.$$

Jeśli $u \in C^1_w(J, \mathbb{E})$, to dla dowolnego $p \in E^*$, $\langle p, u(\cdot)\rangle \in C^1(J, \mathbb{E})$.

Przy założeniu, że przestrzeń E jest słabo ciągowo zupełna (tzn. każdy ciąg Cauchy'ego w słabym sensie, a więc ciąg (x_n) taki, że ciąg $(\langle p, x_n\rangle)$ jest Cauchy'ego dla dowolnego $p \in E^*$, jest słabo zbieżny), to ma miejsce fakt odwrotny: jeśli dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$ funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle$ jest różniczkowalna, to istnieje słaba pochodna. Jeśli funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle \in C^(J)$, to $u \in C^1_w(J, \mathbb{E})$.

(2) Jest jasne, że gdy J jest przedziałem zwartym, to $C^1(J, E)$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|u\|_{C^1} := \max\{\sup_{t\in J} \|u(t)\|, \sup_{t\in J} \|u'(t)\|\}, \quad u \in C^1(J, \mathbb{E}),$$

zaś $C^1_w(J,E)$ jest przestrzenią lokalnie wypukłą z generująca rodziną półnorm

$$\widetilde{p}(u) := \max\{\sup_{t\in J}|\langle p, u(t)\rangle|, \sup_{t\in J}|\langle p, u'(t)\rangle|\}, \quad u \in C^1_w(J,E),$$

gdzie $p \in \mathbb{E}^*$.

(3) Warto jeszcze zwrócić uwagę, że przestrzeń lokalnie wypukła $C^1_w(J,E)$ jest ciągowo zupełna o ile przestrzeń E jest słabo ciągowo zupełna.

4.2.2 Ćwiczenie: Opisać topologię w $C^1(J,\mathbb{E})$ (odp. $C^1_w(J,\mathbb{E})$), gdy J *nie* jest przedziałem zwartym.

Dla funkcji słabo różniczkowalnych ma miejsce twierdzenie o przyrostach.

4.2.3 Lemat: *Niech $u : J \to \mathbb{E}$ będzie funkcją słabo różniczkowalną. Dla dowolnych $s < t \in J$,*

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant (t-s) \sup_{\tau\in[s,t]} \|u'(\tau)\|.$$

Dowód: Weźmy $p \in \mathbb{E}^*$, $\|p\| \leqslant 1$. Z twierdzenie Lagrange'a istnieje takie $\tau \in [s,t]$, że

$$\langle p, u(t) - u(s)\rangle = \langle p, u'(\tau)\rangle(t-s) \leqslant (t-s)\|u'(\tau)\| \leqslant (t-s)M,$$

gdzie $M := \sup_{\tau\in[s,t]}\|u'(\tau)\|$. Dalej

$$\|u(t) - u(s)\| = \sup_{\|p\|\leqslant 1} \langle p, u(t) - u(s)\rangle \leqslant (t-s)M. \qquad \square$$

4.2.4 Uwaga: Jeśli $u \in C^1_w(J,\mathbb{E})$, to $M = \sup_{\tau\in[s,t]}\|u'(\tau)\| < \infty$. W przeciwnym razie istnieje ciąg $(\tau_k) \subset [s,t]$ takie, że $\|u'(\tau_k)\| \to \infty$. Można założyć, że $\tau_k \to \tau \in [s,t]$. Zatem, wykorzystując słabą ciągłość $u' : J \to \mathbb{E}$, $u'(t_k) \rightharpoonup u'(\tau)$. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa ciąg słabo zbieżny jest ograniczony: sprzeczność.

4.2.5 Twierdzenie: *Przypuśćmy, że J jest zwartym przedziałem. Jeśli $u \in C_w(J,\mathbb{E})$ (przestrzeń funkcji słabo ciągłych), to u jest funkcją silnie mierzalną i ograniczoną. Stąd $u \in L^p(J,\mathbb{E})$ dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Dowód: Funkcja u – jako słabo ciągła – jest słabo mierzalna. Niech $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ będzie ośrodkiem w J i niech $v_i := u(t_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Jeśli $v \in u(J)$, to v jest słabą granicą ciągu o wyrazach ze zbioru $V := \{v_i\}$, zatem – z twierdzenia Mazura – v jest granicą ciągu kombinacji wypukłych elementów zbioru V. Zatem v jest również granicą ciągu kombinacji wypukłych o współczynnikach wymiernych elementów ze zbioru V. Oczywiście zbiór kombinacji wypukłych o współczynnikach wymiernych elementów zbioru V jest przeliczalny. Ten zbiór jest więc ośrodkiem w $u(J)$. Z twierdzenie Pettisa funkcja u – jako słabo mierzalna i przyjmująca wartości w zbiorze ośrodkowym – jest silnie mierzalna.

Zbiór $u(J)$ jest słabo zwarty (obraz słabo ciągły zbioru zwartego). Jest więc ograniczony. Stąd $\|u(\cdot)\| \in L^p(J,\mathbb{R})$ dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$. $\square$

4.2.6 Wniosek: *Jeśli J jest dowolnym przedziałem, $u \in C_w(J,\mathbb{E})$, to $u \in L^p_{loc}(J,\mathbb{E})$, tzn. $u \in L^p([a,b],\mathbb{E})$ dla każdego zwartego przedziału $[a,b] \subset J$.* $\square$

Mówimy, że funkcja $u : J \to E$ jest *absolutnie ciągła*, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^k$ jest rodziną przedziałów rozłącznych, zawartych w J, $\sum_{i=1}^k(\beta_i -$

$\alpha_i) < \delta$, to

$$\sum_{i=1}^{k} \|u(\beta_i) - u(\alpha_i)\| < \varepsilon.$$

Jest jasne, że funkcja absolutnie ciągła jest ciągła. Suma i iloczyn (rozumiany we właściwy sensie) funkcji absolutnie ciągłych jest funkcją absolutnie ciągłą; ogólniej jeśli $\varphi : E \times E \to E$ jest funkcja spełniającą lokalnie warunek Lipschitza, $u, v : [a, b] \to E$ są absolutnie ciągłe, to funkcja $[a, b] \ni x \mapsto \varphi(u(x), v(x))$ jest absolutnie ciągła.

Niech teraz $v \in L^1_{loc}(J, E)$ (tzn. v jest całkowalna na dowolnym zwartym odcinku zawartym w J) i $a \in J$. Zdefiniowana jest wówczas funkcja *pierwotna*

$$u(t) := \int_a^t v(s)\, ds, \quad t \in J.$$

Nazwę tę uzasadnia następujący analogon twierdzenia Lebesgue'a.

4.2.7 TWIERDZENIE: *(1) Funkcja pierwotna u jest ciągła i różniczkowalna prawie wszędzie, tzn. dla p.w. $t \in J$,*

$$u'(t) = \lim_{h \to 0,\, t+h \in J} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

istnieje oraz $u'(t) = v(t)$. Jeśli $v \in C(J, \mathbb{E})$, to $u \in C^1(J, \mathbb{E})$ i $u'(t) = v(t)$ dla dowolnego $t \in J$.

(2) Jeśli $v \in C_w(J, \mathbb{E})$, to u jest słabo różniczkowalna i słaba pochodna $u'(t) = v(t)$ dla dowolnego $t \in J$; w konsekwencji $u \in C^1_w(J, \mathbb{E})$.

DOWÓD: Cześć (1) ma dowód podobny do klasycznego. Jeśli $v \in C_w(J, \mathbb{E})$, to $v \in L^1_{loc}(J, \mathbb{E})$; zatem u jest określona poprawnie. Niech $p \in \mathbb{E}^*$; z twierdzenia Bochnera

$$g(t) := \langle p, u(t) \rangle = \int_a^t \langle p, v(s) \rangle\, ds, \quad t \in J.$$

Funkcja podcałkowa po prawej stronie jest ciągła, więc g jest klasy C^1 i $g'(t) = \langle p, v(t)$ dla $t \in J$. Ponadto dla dowolnego $t \in J$ i $h \in \mathbb{R}$ takiego, że $t + h \in J$

$$\left\langle p, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\rangle = \frac{g(t+h) - g)t)}{h} - \langle p, v(t) \rangle \to 0,$$

gdy $h \to 0$. Dowodzi to części (2). □

4.2.8 WNIOSEK: *Jeśli $u \in C^1_w(J, \mathbb{E})$, to u jest ciągła i prawie wszędzie różniczkowalna (i jej pochodna jest p.w. równa słabej pochodnej).*

DOWÓD: Widzimy, że $g(t) := \int_a^t u'(s)\, ds$ jest poprawnie określona i ciągła; dla dowolnego $t \in J$, słaba pochodna $g'(t) = u'(t)$. Z wyżej wymienionej wersji twierdzenia o przyrostach wynika, że $u = g$ na J. Zatem u jest pierwotną swej słabej pochodnej; dowodzi to, że u jest p.w. różniczkowalna. □

Mówimy, że $u \in W^{1,p}(J, E)$, gdzie $1 \leqslant p \leqslant \infty$, gdy $u \in L^p(J, \mathbb{E})$ oraz istnieje $v \in L^p(J, E)$ taka, że

$$u(t) = u(a) + \int_a^t v(s)\, ds, \quad t \in J.$$

4.2.9 Uwaga: (1) Jest jasne, że gdy $|J| < \infty$, $u = u(a) + \int_a^t v(s)\,ds$, gdzie $v \in L^p(J, \mathbb{E}) \subset L^1(J, \mathbb{E})$, to u jest ciągła. Zatem u jest silnie mierzalna i ograniczona:

$$\sup_{t \in J} \|u(t)\| \leqslant \|u(a)\| + \int_a^t \|v(s)\|\,ds \leqslant \|u(a)\| + \|v\|_{L^1} < \infty.$$

Zatem $u \in L^p(J, E)$.

(2) Funkcja v w definicji przestrzeni $W^{1,p}(J, \mathbb{E})$ wyznaczona jest z dokładnością do równości p.w.

Przestrzeń $W^{1,p}(J, E)$, $1 \leqslant p < \infty$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}, \quad u \in W^{1,p}(J, E).$$

Podobnie, gdy $p = \infty$ oraz $|J| < \infty$. Zauważmy, że norma $\|u\|_{W^{1,p}}$ jest poprawnie określona, gdyż funkcja v jest wyznaczona z dokładnością do równości p.w.

Gdy $|J| < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, to $W^{1,p}(J, E) \hookrightarrow W^{1,q}(J, E)$ (włożenie jest ciągłe).

Jeśli $u \in W^{1,p}([a, b], \mathbb{E})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, to u jest różniczkowalna p.w. oraz $u'(t) = v(t)$ dla p.w. $t \in [a, b]$. Ponadto, dla dowolnych $t, s \in [a, b]$,

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant \left| \int_s^t \|u'(\tau)\|\,d\tau \right|.$$

Zatem u jest absolutnie ciągła.

Podobnie, gdy $u \in W^{1,\infty}(J, \mathbb{E})$ (J dowolny przedział), to

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant C|t - s|.$$

Jeśli $u \in W^{1,p}(J, \mathbb{E})$, gdzie $1 < p < \infty$, to $\|u(t) - u(s)\| \leqslant \left(\int_t^s \|u'(\xi)\|^p\,d\xi \right)^{1/p} |t - s|^{1/p^*}$, gdzie p^* jest wykładnikiem sprzężonym z p (tj. $1/p + 1/p^* = 1$).

4.2.10 Twierdzenie: *Niech $|J| < \infty$. Funkcja $u \in W^{1,p}(J, \mathbb{E})$ $1 \leqslant p < \infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy u jest słabo absolutnie ciągła (tzn. dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$, funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle$ jest absolutnie ciągła), u jest p.w. słabo różniczkowalna oraz $u' \in L^p(J, \mathbb{E})$.*

Dowód: Konieczność jest natychmiastowa. Udowodnimy dostateczność. Niech $u' : J \to \mathbb{E}$ oznacza (zdefiniowaną p.w.) słabą pochodną; $u' \in L^p(J, E)$. Połóżmy

$$U(t) = u(a) + \int_a^t u'(s)\,ds, \quad t \in J.$$

Oczywiście, dla każdego $p \in \mathbb{E}^*$, funkcja $\langle p, u(\cdot)\rangle$ jest różniczkowalna p.w. oraz

$$\frac{d}{dt}\langle p, u(t)\rangle = \langle p, u'(t)\rangle$$

p.w. na J. Dzięki słabej absolutnej ciągłości, dla dowolnego $p \in E^*$ oraz dla każdego $t \in J$,

$$\langle p, u(t)\rangle = \langle p, u(a)\rangle + \int_a^t \langle p, u'(s)\rangle\,ds = \langle p, U(t)\rangle.$$

Tak więc, $U(t) = u(t)$; czyli $u \in W^{1,p}(J, \mathbb{E})$. □

W dowodzie wykorzystaliśmy twierdzenie Lebesgue'a w następującym brzmieniu: *Funkcja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $g \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ *taka, że*

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)\, ds.$$

Ponadto wtedy f *jest różniczkowalna p.w. i* $f'(t) = g(t)$ *p.w. na* $[a, b]$. Powyższe twierdzenie Lebesgue'a można udowodnić też w przypadku refleksywnych przestrzeni Banacha.

4.2.11 TWIERDZENIE (Komura): *Załóżmy, że* $\mathbb{E}$ *jest przestrzenią refleksywną,* $|J| < \infty$ *Funkcja* $u : J \to \mathbb{E}$ *jest absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy* u *jest różniczkowalna p.w.,* $u' \in L^1(J, \mathbb{E})$ *oraz* $u(t) = u(0) + \int_a^t u'(s)\, ds$ *dla dowolnego* $t \in J$. □

Tak więc, gdy $\mathbb{E}$ jest przestrzenią refleksywną, to $W^{1,1}(J, \mathbb{E})$, $|J| < \infty$, pokrywa się z przestrzenią $AC(J, \mathbb{E})$ funkcji absolutnie ciągłych

4.2.A Pochodne dystrybucyjne

Powiemy, że funkcja $v \in L^1_{loc}(J, \mathbb{E})$ jest *pochodną dystrybucyjną* funkcji lokalnie całkowalnej u jeśli, dla dowolnej funkcji *próbnej*, tzn. $\varphi \in C_0^\infty(J, \mathbb{R})$ (tj. funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnej o zwartym nośniku i takiej, że jeśli $\alpha \in J$ jest krańcem (lewym lub prawym) przedziału J, to $\varphi(\alpha) = 0$) zachodzi

$$\int_J \varphi'(t) u(t)\, dt = -\int_J \varphi(t) v(t)\, dt.$$

Przypuśćmy, że $u \in W^{1,1}_{loc}(J, \mathbb{E})$, tzn. istnieje taka funkcja $v \in L^1_{loc}(J, \mathbb{E})$, że $u(t) = u(a) + \int_a^t v(s)\, ds$, gdzie $a \in J$ jest ustalonym punktem.

Wykażemy, że v jest pochodną dystrybucyjną funkcji u. Niech $\varphi \in C_0^\infty(J, \mathbb{R})$ i wybierzmy $a, b \in J$ tak, aby $a < b$ i $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$. Wówczas

$$\int_J \varphi'(t) u(t)\, dt = \int_a^b \varphi'(t) x(a)\, dt + \int_a^b \int_a^t \varphi'(t) v(s)\, ds\, dt =$$
$$\int_a^b \int_s^b \varphi'(t) v(s)\, dt\, ds = -\int_a^b \varphi(s) y v(s)\, ds = -\int_J \varphi(s) v(s)\, ds.$$

4.3 Zwartość w przestrzeniach funkcyjnych

Omówimy kilka twierdzeń o zwartości podzbiorów przestrzeni funkcyjnych. Podobnie jak poprzednio $\mathbb{E}$ oznacza przestrzeń Banacha. Symbolem $C(J, \mathbb{E})$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych $J \to \mathbb{E}$. Jest to oczywiście przestrzeń wektorowa. W przestrzeni tej rozważa się topologię *zbieżności niemal jednostajnej*. Jest to topologia metryzowalna: dla $u, v \in C(J, \mathbb{E})$,

$$d(u, v) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sup_{t \in J_n} \|u(t) - v(t)\|}{1 + \sup_{t \in J_n} \|u(t) - v(t)\|},$$

gdzie $\{J_n\}$ jest wstępującym ciągiem zwartych podzbiorów J takim, że $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = J$. Lepiej znana, lecz równoważna metryka dana jest wzorem

$$d(u, v) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\sup_{t \in J_n} \|u(t) - v(t)\|}{1 + \sup_{t \in J_n} \|u(t) - v(t)\|}.$$

Ciąg $(u_n) \subset C(J, \mathbb{E})$ jest zbieżny w tej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny niemal jednostajnie, tzn. jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze przedziału J. Topologia zbieżności niemal jednostajnej jest tez zwana *topologią zwarto-otwartą*.

Topologia zwarto-otwarta w $C(J, \mathbb{E})$ jest lokalnie wypukła: generującą rodziną półnorm jest $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$p_n(u) := \sup_{t\in J_n} \|u(t)\|, \quad u \in C(J, \mathbb{E}).$$

4.3.1 Twierdzenie (Ascoli-Arzela): *Niech J będzie dowolnym przedziałem i niech $\mathcal{U}$ będzie rodziną funkcji ciągłych $J \to \mathbb{E}$. Jeśli rodzina $\mathcal{U}$ jest jednakowo ciągła (tzn. dla dowolnych $u \in \mathcal{U}$, $t \in J$ oraz $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ o ile $|t - s| < \delta$) oraz, dla dowolnego $t \in J$, zbiór $\mathcal{U}(t) := \{u(t) \mid u \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{E}$ jest względnie zwarty, to zbiór $\mathcal{U}$ jest względnie zwarty w przestrzeni $C(J, E)$ funkcji ciągłych (z metryką zbieżności niemal jednostajnej) .* □

Oczywiście (względna) zwartość zbioru $\mathcal{U}$ oznacza, że z każdego ciągu $(u_n) \subset \mathcal{U}$ można wybrać podciąg zbieżny.

Zacznijmy od ogólnego kryterium (zwanego twierdzeniem Eberleina-Schmulyana-Grothendiecka).

4.3.2 Twierdzenie: *Niech $A \subset \mathbb{E}$. Następujące warunki są równoważne:*
(1) zbiór A jest względnie słabo zwarty;
(2) zbiór jest względnie słabo ciągowo zwarty, tzn. każdy ciąg $(x_n) \subset A$ zawiera słabo zbieżny podciąg;
(3) dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset A$ istnieje ciąg $(y_n) \subset \operatorname{conv}\{x_k \mid k \geqslant n\}$, który jest zbieżny;
(4) dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset A$ istnieje ciąg $(y_n) \subset \operatorname{conv}\{x_k \mid k \geqslant n\}$, który jest słabo zbieżny;
(5) (Grothendieck) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór względnie słabo zwarty H_ε taki, że $A \subset H_\varepsilon + \varepsilon B$, Gdzie B jest kula jednostkową w $\mathbb{E}$. □

W dowodzie trudność polega na wykazaniu, że (4) (lub (5)) implikuje (1).

Interesować nas będą obecnie kryteria słabej zwartości w przestrzeniach $L^p(\Omega, \mathbb{E})$. Zaczniemy od klasycznego twierdzenia Dunforda-Pettisa (dla $\mathbb{E} = \mathbb{R}^k$).

4.3.3 Twierdzenie (Dunford-Pettis): *Zbiór $A \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ jest względnie słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(a) A jest ograniczony;

(b) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ taka, że jeśli $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) < \delta$, to $\int_B |w(x)|\, dx < \varepsilon$ dla wszystkich $w \in A$;

(c) istnieje rodzina $\{B_n\}$ zbiorów mierzalnych taka, że $\mu(B_n) < \infty$ i $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus B_n} |w(x)|\, dx = 0$ jednostajnie ze względu na $w \in A$. □

4.3.4 Uwaga: (1) Warunek (c) nie jest potrzebny, gdy $\mu(\Omega) < \infty$.

(2) Warunek (b) nazywa się *jednostajną całkowalnością* zbioru A. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ma miarę skończoną, to jednostajna całkowalność zbioru A implikuje jego ograniczoność (gdyż wówczas Ω można rozbić na skończoną liczbę zbiorów dowolnie małej miary). Zatem, w takiej sytuacji (tzn. gdy Ω jest mierzalnym w sensie Lebesgue'a podzbiorem $\mathbb{R}^N$ skończonej miary), to: $A \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *jest względnie słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednostajnie całkowalny.*

(3) Przypuśćmy, że zbiór A jest *całkowo ograniczony*, tzn. istnieje funkcja $c \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ taka, że $|w(x)| \leqslant c(x)$ dla p.w. $x \in \Omega$. Wtedy zbiór A spełnia warunki (a), (b) i (c). Zatem *zbiory całkowo ograniczone w $L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ są względnie słabo zwarte.*

Jak wiadomo, gdy przestrzeń $\mathbb{E}$ jest refleksywna, to względna słaba zwartość jest równoważna ograniczoności; tak więc jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią refleksywną i $1 < p < \infty$, to zbiór $A \subset L^p(\Omega, \mathbb{E})$ jest słabo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

Dla przestrzeni refleksywnych mamy też analogon stwierdzenie z punktu (3) powyższej uwagi.

4.3.5 Twierdzenie: *Niech E będzie przestrzenią refleksywną. Jeżeli $A \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ jest całkowo ograniczony, tzn. istnieje funkcja $c \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ taka, że $\|w(t)\| \leqslant c(t)$ dla p.w. $t \in J$ oraz dowolnego $w \in A$, to zbiór A jest względnie słabo zwarty.*

Dowód: Można założyć, że $c > 0$ na J. Określmy przekształcenie $T : L^\infty(\Omega, \mathbb{E})$ dane wzorem $T(u) = cu$. Jest jasne, że T jest operatorem liniowym ograniczonym ($\|T\| \leqslant \|c\|_{L^1}$). Jest również ciągły, gdy w $L^\infty(\Omega, \mathbb{E})$ rozważyć słabą*-topologię (zauważmy, że $L^\infty(\Omega, \mathbb{E})$ jest przestrzenią dualna do $L^1(\Omega, \mathbb{E}^*)$), zaś w $L^1(\Omega, \mathbb{E})$ słabą topologię: istotnie, dla dowolnego $p \in (L^1(\Omega, \mathbb{E}))^*$ mamy $\langle p, T(w)\rangle = \int_\Omega \langle g(x), c(x)w(x)\rangle\, dx = \int_\Omega \langle c(x)g(x), w(x)\, dx$, gdzie $g \in L^\infty(\Omega, \mathbb{E}^*)$; zauważmy, że $c \cdot g \in L^1(\Omega, \mathbb{E}^*)$.

Z twierdzenie Alaoglu kula jednostkowa $D \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{E})$ jest słabo*-zwarta; zatem zbiór $T(D)$ jest słabo zwarty. Oczywiście $A \subset T(D)$. To kończy dowód. $\square$

4.3.6 Uwaga: Pokazaliśmy, że całkowa ograniczoność implikuje tezę. Wiadomo, że zbiory całkowo ograniczone są ograniczone i jednostajnie całkowalne. Okazuje się, że ma miejsce twierdzenie Diestela: *jeśli Ω ma miarę skończoną i $\mathbb{E}$ jest przestrzenią refleksywną, to $A \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ jest względnie zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i jednostajnie całkowalny.*

4.3.7 Wniosek: *Rozważmy ciąg (u_k) funkcji w przestrzeni $W^{1,1}_{loc}(J, E)$ ([2]) taką, że dla dowolnego $t \in J$, zbiór $\{u_k(t)\}$ jest względnie zwarty, istnieje funkcja $c \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R})$ taka, że $\|u_k'(t)\| \leqslant c(t)$ p.w. na J, to istnieje podciąg (nadal oznaczany przez) (u_k) oraz funkcja $u \in W^{1,1}_{loc}(J, \mathbb{E})$ takie, że*
(i) $u_k \to u$ w $C(J, \mathbb{E})$;
(ii) $u_k' \rightharpoonup u'$ (słabo) w $L^1(J, \mathbb{E})$.

Dowód. Zauważmy, że rodzina $\{u_k\}$ jest jednakowo (jednostajnie) ciągła: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $A \subset J$ jest zbiorem mierzalnym oraz $\mu(A) < \delta$, to

$$\int_A c(s)\, ds < \varepsilon;$$

stąd dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $t, s \in J$,

$$\|u_k(t) - u(s)\| \leqslant \int_s^t \|u_k'(\tau)\|\, d\tau \leqslant \int_s^t c(\tau)\, d\tau < \varepsilon$$

o ile $|t - s| < \delta$. Z twierdzenie Ascoliego-Arzeli istnieje podciąg (znaczony tak samo) u_k zbieżny niemal jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $u : J \to \mathbb{E}$.

Ustalmy teraz pewien zwarty przedział $I \subset J$. Z twierdzenia 4.3.5 z ciągu (u_k') można wybrać (tak samo oznaczony) podciąg (u_k') słabo zbieżny do pewnej funkcji $v \in L^1(I, E)$. Skoro, dla dowolnych $a, t \in J$,

$$u_k(t) - u_k(s) = \int_s^t u_k'(s)\, ds,$$

to przechodząc do granicy z $k \to \infty$ otrzymamy, że dla dowolnego $t \in J$, istnieje granica

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^t u_k'(s)\, ds = u(t) - u(a).$$

[2] Na mocy refleksywności i twierdzenia Komury, równoważnie: u_k jest absolutnie ciągła.

Niech $p \in E^*$. Wtedy funkcja $J \ni s \mapsto \xi(s) = \chi_{[a,t]}(s)p$ należy do $L^\infty(J, E^*)$. Skoro $u_k' \rightharpoonup v$, to na mocy drugiego twierdzenia Bochnera,

$$\langle p, u(t) - u(a)\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle p, \int_a^t u_k'(s)\,ds \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_a^t \langle p, u_k'(s)\rangle\,ds$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_J \langle \xi(s), u_k'(s)\rangle\,ds = \int_J \langle \xi(s), v(s)\rangle\,ds = \int_a^t \langle p, v(s)\rangle\,ds = \left\langle p, \int_a^t v(s)\,ds \right\rangle.$$

Z dowolności p wynika stąd, że

$$u(t) - u(a) = \int_a^t v(s)\,ds.$$

W takim razie u jest w $W^{1,1}(I, E)$ oraz $u' = v$ p.w. Dowolność podprzedziału I kończy dowód. □

4.3.8 Uwaga: Powyższy wniosek stanowi bardzo częstą ilustrację zastosowań twierdzeń o słabej zwartości w teorii równań i inkluzji różniczkowych.

Jeśli przestrzeń Banacha *nie jest* refleksywna, to w celu stwierdzenia słabej zwartości ciągu (u_k) można posłużyć się jednym z twierdzeń Diestela o słabej zwartości w $L^1(I, E)$. Mamy mianowicie:

4.3.9 Twierdzenie (Ülger, Diestel): *Przypuśćmy, że Ω ma miarę skończoną. Jeśli zbiór $A \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ jest ograniczony, to następujące warunki są równoważne:*

(a) A jest względnie słabo zwarty;

(b) A jest jednostajnie całkowalny ([3]) oraz dla dowolnego ciągu $(u_n) \subset A$ istnieje ciąg $(v_n) \subset \operatorname{conv}\{u_k \mid k \geqslant n\}$, który jest prawie wszędzie zbieżny.

(c) A jest jednostajnie całkowalny oraz dla dowolnego ciągu $(u_n) \subset A$ istnieje ciąg $(v_n) \subset \operatorname{conv}\{u_k \mid k \geqslant n\}$, który jest prawie wszędzie słabo zbieżny (tzn. dla p.w. $t \in \Omega$, ciąg $(v_n(t))$ jest słabo zbieżny).

(d) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\alpha \geqslant 0$ oraz względnie słabo zwarty zbiór $H \subset \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{E}) \mid \|u\| \leqslant \alpha\}$ taki, że $A \subset H + B(0, \varepsilon)$. □

Szczególnie cenna jest implikacja (c)$\Rightarrow$(a). Oczywiście implikacja (d)$\Rightarrow$(a) wynika natychmiast z twierdzenia Grothendiecka. Implikacja (a)$\Rightarrow$(d) pochodzi od Ülgera.

Mamy w związku z tym następujące wnioski.

4.3.10 Twierdzenie: *Załóżmy, że Ω ma miarę skończoną. Jeśli zbiór $W \subset L^1(\Omega, E)$ jest ograniczony i jednostajnie całkowalny (a więc np. całkowo ograniczony) oraz*

(A) dla p.w. $t \in \Omega$ zbiór $W(t) := \{w(t) \mid w \in W\}$ jest względnie słabo zwarty,

to W jest względnie słabo zwarty. □

4.3.11 Wniosek: *Jeśli Ω ma miarę skończoną, $W \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ i*

(B) istnieje zbiór względnie słabo zwarty $C \subset \mathbb{E}$ taki, że dla p.w. $t \in \Omega$ i dla dowolnej funkcji $w \in W$, $w(t) \in C$,

to W jest względnie słabo zwarty. □

[3] Tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ taka, że jeśli $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) < \delta$, to $\sup_{w\in A} \int_B \|w(x)\|\,dx < \varepsilon$. Tak jak poprzednio całkowa ograniczoność implikuje jednostajną całkowalność. Jednostajna całkowalność implikuje ograniczoność np. gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a.

Jeśli miara Ω nie jest skończona, to dodatkowo należ przyjąć założenie analogiczne do (c) w twierdzeniu Dunforda-Pettisa.

4.3.12 TWIERDZENIE: *Przypuśćmy, że $W \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$ spełnia założenia twierdzenie 4.3.10 lub wniosku 4.3.11 i dodatkowo, że istnieje ciąg $(A_k) \subset \mathcal{A}$ taki, że $\mu(A_k) < \infty$ i*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus A_k} \|w(t)\|\, dt = 0$$

jednostajnie ze względu na $w \in W$.

DOWÓD: Rozważmy ciąg $(w_n) \subset W$. Oczywiście można założyć, że ciąg (A_k) jest wstępujący. Niech $w_n^{(0)} := w_n$, $n = 1, 2, ..$ Dla $k = 1$ wybierzmy podciąg ciągu $(w_n^{(0)})$, oznaczając go symbolem $(w_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$, taki, że – po obcięciu do A_1 – jest słabo zbieżny w $L^1(A_1, \mathbb{E})$ do pewnej funkcji $f_1 \in L^1(A_1, \mathbb{E})$. Taka możliwość wynika z Twierdzenia 4.3.10 lub wniosku 4.3.11 zastosowanych do przestrzeni $L^1(A_1, \mathbb{E})$. Przypuśćmy, że podciąg $(w_n^{(k)})$ został już wybrany. Wybieramy teraz podciąg ciągu $(w_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$, oznaczając go symbolem $(w_n^{(k+1)})$, który – po obcięciu – jest słabo zbieżny w $L^1(A_{k+1}, \mathbb{E})$ do pewnej funkcji $f_{k+1} \in L^1(A_{k+1}, \mathbb{E})$ (poprawność uzasadniona tak jak przed chwilą). Otrzymaliśmy rodzinę ciągów $(w_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, w której (w_n^k) jest podciągiem ciągu $(w_n^{(k-1)})$ i jest zbieżny do pewnej funkcji $f_k \in L^1(A_k, \Omega)$. Oczywiście $f_{k+1}|_{A_k} = f_k$ p.w. Zatem zdefiniowaliśmy funkcję $f_\infty : A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \to \mathbb{E}$. Jest ona oczywiście silnie mierzalna. Z drugiej części twierdzenie 4.1.4, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} \|f_k\| < \infty$. Stąd (i z twierdzenie o monotonicznym przejściu do granicy Beppo-Leviego) otrzymujemy, że f_∞ jest całkowalna na A_∞. A więc funkcja $f : \Omega \to \mathbb{E}$ równa f_∞ na A_∞ i 0 poza tym zbiorem jest silnie mierzalna i całkowalna w sensie Bochnera. Oczywiście

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus A_k} \|f\|\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{A_\infty\setminus A_k} \|f\|\, d\mu = 0. \tag{$*$}$$

Pokażemy, że $w_n \rightharpoonup f$. Weźmy dowolny $p \in [L^1(\Omega, \mathbb{E})]^*$ (uwaga: nie wiemy, czy przestrzeń $\mathbb{E}$ jest refleksywna lub ośrodkowa, a więc nie wiemy czy przestrzenią sprzężoną jest $L^\infty(\Omega, \mathbb{E}^*)$). Mamy pokazać, że

$$\langle p, w_n - f\rangle \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ i takie $N \in \mathbb{N}$, by

$$\int_{\Omega\setminus A_N} \|f\|\, d\mu,\ \sup_{w\in W} \int_{\Omega\setminus A_N} \|w\|\, d\mu < \varepsilon/3.$$

Rozważmy przekształcenia $\varphi : L^1(A_N, \mathbb{E}) \to L^1(\Omega, \mathbb{E})$ oraz $\psi : L^1(\Omega \setminus A_N, \mathbb{E}) \to L^1(\Omega, \mathbb{E})$ dane następująca: dla $u \in L^1(A_N, \mathbb{E})$, $\varphi(u)$ jest funkcja równą u na zbiorze A_N i 0 poza nim; dla $v \in L^1(\Omega \setminus A_N, \mathbb{E})$, $\psi(v)$ jest funkcją równą v na $\Omega \setminus A_N$ i 0 na A_N. Jest jasne, że φ i ψ są operatorami liniowymi i ograniczonymi; $\|\varphi\|, \|\psi\| \leqslant 1$. Dodatkowo: dla dowolnego $u \in L^1(\Omega, \mathbb{E})$

$$u = \chi_{A_N} u + \chi_{\Omega\setminus A_N} u = \varphi(u|_{A_N}) + \psi(u|_{\Omega\setminus A_N}).$$

Stąd

$$\langle p, w_n - f\rangle = \langle p, \varphi((w_n - f)|_{A_N}) + \psi((w_n - f)|_{\Omega\setminus A_N})\rangle = \langle \varphi^*(p), (w_n - f)|_{A_N}\rangle + \langle \psi^*(p), (w_n - f)|_{\Omega\setminus A_N}\rangle,$$

gdzie φ^* i ψ^* sa operatorami sprzężonymi. Oczywiście $\langle \varphi^*(p), (w_n - f)|_{A_N}\rangle \to 0$. Zatem dla $n \geqslant N_1$,

$$|\langle \varphi^*(p), (w_n - f)|_{A_N}\rangle| < \varepsilon/3.$$

Z drugiej strony

$$|\langle \psi^*(p), (w_n - f)|_{\Omega\setminus A_N}\rangle| \leqslant \|\psi^*\| \|(w_n - f)|_{\Omega\setminus A_N}\|_{L^1(\Omega\setminus A_N,\mathbb{E})} \leqslant$$
$$\int_{\Omega\setminus A_N} (\|w_n(t)\| + \|f(t)\|)\, dt = \int_{\Omega\setminus A_N} \|w_n(t)\|\, dt + \int_{\Omega\setminus A_N} \|f(t)\|\, dt < 2\varepsilon/3.$$

Zatem, dla $n \geqslant N_1$,

$$|\langle p, w_n - f\rangle| < \varepsilon.$$

To kończy dowód. □

Rozważymy teraz sytuację nierefleksywnej (ani nie koniecznie ośrodkowej) przestrzeni $\mathbb{E}$ i przestrzeni $L^p(J, \mathbb{E})$, gdzie $1 < p < \infty$,

4.3.13 Twierdzenie (Diestel, Ruess): *Jeśli $W \subset L^p(\Omega, \mathbb{E})$, gdzie $1 < p < \infty$ i $\mu(\Omega) < \infty$, jest zbiorem ograniczonym, to następujące warunki są równoważne:*

(a) zbiór W jest względnie słabo zwarty;

(b) dowolnego ciągu $(u_n) \subset W$ istnieje ciąg $(v_n) \subset \operatorname{conv}\{u_k \mid k \geqslant n\}$, który jest prawie wszędzie zbieżny.

(c) dla dowolnego ciągu $(u_n) \subset A$ istnieje ciąg $(v_n) \subset \operatorname{conv}\{u_k \mid k \geqslant n\}$, który jest prawie wszędzie słabo zbieżny (tzn. dla p.w. $t \in \Omega$, ciąg $(v_n(t))$ jest słabo zbieżny). □

4.3.14 Uwaga: (i) Przypuśćmy, że przestrzeń Ω ma miarę skończoną i niech $W \subset L^p(\Omega, \mathbb{E})$, $1 < p < \infty$, będzie zbiorem ograniczonym. Oczywiście można uważać, że $W \subset L^1(\Omega, \mathbb{E})$. Wtedy W jest jednostajnie całkowalny: weźmy $\varepsilon > 0$ i ustalmy $\delta > 0$ takie, że $\delta^{1-1/p} m < \varepsilon$, gdzie $m = \sup_{w\in W} \|w\|_{L^p}$. Jeśli $B \subset \Omega$ jest zbiorem mierzalnym o mierze $\mu(B) < \delta$, to dla dowolnego $w \in W$,

$$\int_B \|w\|\, d\mu \leqslant \mu(B)^{1-1/p} \left(\int_B \|w\|^p\, d\mu\right)^1 /p = \delta^{1-1/p}\|w\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Jeśli W jako podzbiór $L^1(\Omega, \mathbb{E})$ jest względnie słabo zwarty, to jest również względnie słabo zwarty w $L^p(\Omega, \mathbb{E})$. Rzeczywiście z twierdzenia 4.3.9 wynika, że spełnione są warunki (a), (b) twierdzenie 4.3.13.

Oczywiście każdy względnie słabo zwarty zbiór $W \subset L^p(\Omega, \mathbb{E})$ jest tez względnie słabo zwarty w $L^1(\Omega, \mathbb{E})$.

(ii) Przypuśćmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a (dowolnej miary). Łatwo dostrzec, że jeśli zbiór $A \subset L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{E})$ (a zatem zbiór składający się z funkcji lokalnie całkowalnych w sensie Bochnera, tzn. całkowalnych na każdym zwartym podzbiorze zbioru Ω) jest całkowo ograniczony przez funkcję $w \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$ i dla p.w. $t \in \Omega$ istnieje zbiór względnie słabo zwarty $C(t) \subset \mathbb{E}$ taki, że $u(t) \subset C(t)$ dla p.w. $t \in \Omega$ i dowolnej funkcji $u \in A$, to A jest względnie słabo zwarty.

4.4 Odwzorowania wielowartościowe o wypukłych i domkniętych wartościach

Niech X będzie przestrzenią metryczną, $\mathbb{E}$ przestrzenią Banacha. Rozważmy odwzorowanie $\varphi : X \multimap E$.

4.4.1 Definicja: Powiemy, że odwzorowanie φ jest *górnie hemiciągłe* w punkcie $x_0 \in X$ jeśli, dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$ funkcja

$$X \ni x \mapsto \sigma_{\varphi(x)}(p) := \sup_{y \in \varphi(x)} \langle p, y \rangle \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

jest (jako funkcja liczbowa) półciągła z góry w punkcie x_0. Jeśli φ jest górnie hemiciągła w każdym punkcie $x \in X$, to mówimy, że φ jest *górnie hemiciągła*: skrótowo uhc.

4.4.2 Uwaga: Jeśli odwzorowanie φ jest górnie półciągłe, to jest ono górnie hemiciągłe. Niech $j : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_w$, gdzie $\mathbb{E}_w$ oznacza przestrzeń $\mathbb{E}$ ze słabą topologią, będzie identycznością. Jest to odwzorowanie ciągłe. Zatem odwzorowanie $\psi := j \circ \varphi : X \to \mathbb{E}_w$ jest usc. Za chwilę pokażemy, że to implikuje hemiciągłość φ.

4.4.3 Fakt: *Jeśli w $\mathbb{E}$ rozważymy słabą topologię, to odwzorowanie $\varphi : X \multimap \mathbb{E}$ górnie półciągłe w $x_0 \in X$ (mówimy wówczas, że φ jest* słabo usc *lub* demiciągłe [4]*) jest tam górnie hemiciągłe.*

Dowód: Niech $p \in E^*$, $p \neq 0$ i $\varepsilon > 0$. Zbiór $B := \{y \in E \mid \langle p, y \rangle < \varepsilon/2\}$ jest otoczeniem zera w słabej topologii. Górna półciągłość (względem rozpatrywanej słabej topologii) w punkcie x_0 implikuje, że istnieje otoczenie $V \subset X$ punktu x_0 takie, że

$$\varphi(x) \subset \varphi(x_0) + B$$

dla dowolnego $x \in V$. Zatem, dla dowolnego $y \in \varphi(x)$ istnieje $y_0 \in \varphi(x_0)$ takie, że $\langle p, y - y_0 \rangle < \varepsilon/2$. Czyli

$$\langle p, y \rangle < \sigma_{\varphi(x_0)}(p) + \varepsilon$$

a więc

$$\sigma_{\varphi(x)}(p) < \sigma_{\varphi(x_0)}(p) + \varepsilon.$$

To oznacza, że φ jest górnie hemiciągłe w punkcie x_0. □

4.4.4 Uwaga: Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Wystarczy rozważyć odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}^2$ dane wzorem

$$\varphi(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 \geqslant (1 + x)y_1\}$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Jest ono górnie hemiciągłe w punkcie $x = 0$. Istotnie, niech $p = (p_1, p_2)$. Jeżeli $p_2 > 0$, to $\sigma_{\varphi(0)}(p) = +\infty$ i nie ma czego dowodzić. Jeśli $p_2 < 0$, to

$$\sigma_{\varphi(x)}(p) = \frac{3}{4} p_1^2 [p_2(1 + x)]^{-1}.$$

Funkcja ta jest ciągła w $x = 0$. Jednak łatwo zauważyć, że φ nie jest górnie półciągła w 0.

Jednak, przy dodatkowym założeniu słabej zwartości i wypukłości wartości odwzorowania górnie hemiciągłe są słabo usc.

4.4.5 Twierdzenie (Castaing): *Jeśli $\varphi : X \multimap \mathbb{E}$ jest górnie hemiciągłe w punkcie $x_0 \in X$ oraz zbiór $\varphi(x_0)$ jest wypukły i słabo zwarty, to φ jest słabo górnie półciągłe w x_0. Zatem odwzorowanie hemiciągłe o słabo zwartych i wypukłych wartościach jest słabo usc.*

Dowód: Mamy pokazać, że jeśli U jest (słabym) otoczeniem $K := \varphi(x_0)$, to $\varphi^{+1}(U)$ jest otoczeniem (w X) punktu x_0. Dla *skończonego* układu $P \subset \mathbb{E}^*$ i $\varepsilon > 0$ niech

$$U(P, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{E} \mid |\langle p, y \rangle| < \varepsilon,\ p \in P\}.$$

[4] Odwzorowanie jest słabo usc, gdy dla dowolnego słabo domkniętego $A \subset \mathbb{E}$ przeciwobraz $\varphi^{-1}(A)$ jest domknięty.

Wtedy $\{U(P,\varepsilon) \mid P \subset \mathbb{E}^*, \#P < \infty, \varepsilon > 0\}$ tworzy bazę otoczeń 0 w $\mathbb{E}$ (ze słabą topologią). Zwartość K implikuje, że istnieje $P \subset \mathbb{E}^*$ i $\varepsilon > 0$ takie, że $V := K + U(P,\varepsilon) \subset U$ (sprawdzić to stwierdzenie).

Niech $Y := \bigcap_{p\in P} \ker p$; Y jest domkniętą podprzestrzenią skończonego kowymiaru, zatem znajdzie się podprzestrzeń liniowa $X \subset \mathbb{E}$, $\dim X < \infty$ taka, że $X \oplus Y = \mathbb{E}$. Niech $\pi : \mathbb{E} \to X$ będzie rzutem równoległym do Y; zbiór $V_X := \pi(V)$ jest otwarty, zbiór $K_X := \pi(K)$ jest zwarty i wypukły (jako ciągły rzut zbioru słabo zwartego jest słabo zwarty w X, lecz X jest skończonego wymiaru).

Twierdzę teraz, że znajdą się funkcjonały $q_1, \ldots, q_m \in X^*$ oraz $\delta > 0$, że

$$\bigcap_{i=1}^{m} (K_X + V(q_i,\delta)) \subset V_X,$$

gdzie, dla $q \in X^*$, $V(q,\delta) := \{x \in X \mid \langle q, x\rangle < \delta\}$. Zauważmy, że

$$y \in K_X + V(q,\delta) \Leftrightarrow \inf_{k\in K_X} \langle p, y - k\rangle < \delta.$$

Zwartość K_X pozwala założyć, że $V_X = K_X + B(0,1)$ (dla uproszczenia). Niech $Z = K_X + D(0,2) \setminus V_X$; jest to zbiór zwarty (sprawdzić). Dla dowolnego $q \in X^*$, $\|q\| = 1$ i $\delta > 0$, zbiór (względnie) zwarty

$$K_X + V(p,\delta) \cap Z \neq \emptyset.$$

Aby to zobaczyć wystarczy wziąć $y \in K_X$ taki, że $\langle q, y\rangle = \inf_{k\in K_X}\langle q, k\rangle$ i $z \in X$ takie, że $\langle q, z\rangle = \|z\| = 1$. Wówczas $d(y-2z, K_X) \leqslant \|y - 2z - y\| = 2$. Tak więc $y - 2z \in Z$; jednocześnie

$$\langle q, y - 2z\rangle = \inf_{k\in K_X} -2 < inf_{k\in K_X}\langle q, k\rangle + \delta,$$

czyli $y - 2z \in K_X + V_{q,\delta}$.

Zaprzeczmy teraz postawionej tezie: dla każdego skończonego układy $\{q_1, \ldots, q_m\}$ funkcjonałów o normie 1 i dla każdego $\delta > 0$,

$$\bigcap_{i=1}^{m} [(K_X + V(q_i,\delta)) \cap Z] \neq \emptyset.$$

Zwartość K_X implikuje, że przecięcie

$$\bigcap_{q\in X^*,\ \|q\|=1,\ \delta>0} [(K_X + V(q,\delta)) \cap Z] \neq \emptyset.$$

Niech z będzie elementem tego zbioru. Oczywiście $z \in Z$ więc, $z \notin K_X$. Z twierdzenie o oddzielaniu znajdzie się funkcjonał $q \in X^*$, $\|q\| = 1$, i $\delta > 0$ takie, że

$$\langle q, z\rangle + \delta < \inf_{k\in K_X} \langle q, k\rangle.$$

Lecz $z \in K_X + V(q,\delta)$, a to oznacza, że mamy sprzeczność.

Mam więc rodzinę $q_1, \ldots, q_m \in X^*$ oraz $\delta > 0$, że

$$\bigcap_{i=1}^{m} (K_X + V(q_i,\delta)) \subset V_X.$$

Przedłużmy q_i dla funkcjonału $p_i \in \mathbb{E}^*$ kładąc

$$\langle p_i, x+y\rangle = \langle q_i, x\rangle,\ x \in X,\ y \in Y,\ i = 1, \ldots, m.$$

Twierdzę teraz, że

$$W := \bigcap_{i=1}^{m}(K + U(p_i, \delta)) \subset U,$$

gdzie

$$U(p,\delta) := \{y \in \mathbb{E} \mid \langle p, y\rangle < \delta\},\ p \in \mathbb{E}^*.$$

Rzeczywiście: niech $x \in W$; dla dowolnego $i = 1, .., m$ i $k \in K$,

$$delta > \langle p_i, x-k\rangle = \langle q_i, \pi(x) - \pi(k)\rangle.$$

Stąd $\pi(x) \in V_X = \pi(V)$; zatem $\pi(x) = \pi(v)$, gdzie $v = k + u \in V$, $k \in K$ i $u \in U(P, \varepsilon) \subset U$, tzn. $x = v + y = k + u + y$, gdzie $y \in V$. Ale $\langle p, y\rangle = 0$ dla dowolnego $p \in P$, więc $u + y \in U(P, \varepsilon)$. Stąd $\in K + U(P, \varepsilon) \subset U$.

Mamy więc: dla pewnych $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{E}^*$ i pewnego $\delta > 0$

$$W := \{y \in \mathbb{E} \mid \inf_{k \in K}\langle p_i, y-k\rangle < \delta,\ i = 1, \ldots, m\} \subset U.$$

Dla każdego $i = 1, \ldots, m$,

$$W_i := \{y \in \mathbb{E} \mid \inf_{k\in K}\langle p_i, y-k\rangle < \delta\} = \{y \in \mathbb{E} \mid \langle p_i, y\rangle < \sup_{k\in K}\langle p_i, k\rangle + \delta\}$$

oraz $\varphi(x_) \subset W_i$. Założone górna hemiciągłość φ oznacza, że znajdzie się $\eta_i > 0$, że dla $x \in B(x_0, \eta_i)$, $\varphi(x) \subset W_i$. Wziąwszy $\eta := \min\{\eta_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ i $x \in B(x_0, \eta)$ widać, że $\varphi(x) \subset \bigcap_{i=1}^m W_i = W \subset U$. □

Podamy teraz kilka dodatkowych własności odwzorowań hemiciągłych i słabo usc.

4.4.6 Twierdzenie: *Jeśli X jest przestrzenią zwartą, $\varphi :\multimap \mathbb{E}$ jest górnie hemiciągłe i ma ograniczone wartości, to obraz $\varphi(X)$ jest zbiorem ograniczonym. Jeśli wartości są słabo zwarte, to obraz $\varphi(X)$ jest słabo zwarty.*

Dowód: Dla dowolnego $x \in X$, zbiór $\varphi(x)$ jest ograniczony; zatem, dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$, $\sigma_{\varphi(x)}(p) \in \mathbb{R}$. Tak więc, na mocy zwartości i górnej półciągłości funkcji $X \ni x \mapsto \sigma_{\varphi(x)}(p) \in \mathbb{R}$ (każda funkcja górnie półciągła na przestrzeni zwartej przyjmuje kres górny), mamy

$$f(p) := \sup_{x\in X}\sigma_{\varphi(x)}(p) = \sup_{y\in\varphi(X)}\langle p, y\rangle < \infty.$$

Wobec tego $f : \mathbb{E}^* \to \mathbb{R}$ jest poprawnie określona funkcją. Jest ona dodatnio jednorodna, wypukła i półciągła z dołu (dolna półciągłość jest konsekwencja rozważań o odwzorowaniach marginalnych). Oczywiście, dla dowolnego $p \in E^*$,

$$\varphi(X) \subset K := \{y \in \mathbb{E} \mid \langle p, y\rangle \leqslant f(p)\}.$$

Dla dowolnego $y \in K$ oraz $p \in E^*$, $\langle p, y\rangle \leqslant f(p)$. Tak więc, z twierdzenia Banacha-Steinhausa, $\sup_{y\in K}\|y\| < \infty$. Dowodzi to, że zbiór K, a zatem i zbiór $\varphi(X)$ jest ograniczony.

Druga część jest natychmiastowa, bo φ jest słabo usc o słabo zwartych wartościach. □

4.4.7 Twierdzenie: *Niech $\varphi : X \multimap \mathbb{E}$ ma wypukłe wartości. Na to by φ było słabo usc o słabo zwartych wartościach potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnego ciągu $(x_n, y_n) \subset \mathrm{Gr}(\varphi)$, jeśli $x_n \to x$, to istnieje podciąg (y_{n_k}) ciągu (y_n) taki, że $y_{n_k} \to y \in \varphi(x)$.*

DOWÓD: Dostateczność podanego warunku jest natychmiastowa: oczywiście wartości sa słabo zwarte i jeśli $A \subset \mathbb{E}$ jest zbiorem słabo domkniętym, $(x_n) \subset \varphi^{-1}(A)$ (czyli znajdzie się $y_n \in \varphi(x_n) \cap A$ dla $n \in \mathbb{N}$) oraz $x_n \to x_0$, to – zgodnie z założeniem – $y_{n_k} \to y_0 \in \varphi(x_0) \cap A$, czyli $x_0 \in \varphi^{-1}(A)$.

Załóżmy, że vp jest słabo usc o słabo zwartych wartościach i weźmy ciąg $(x_n, y_n) \subset \mathrm{Gr}\,(\varphi)$ i niech $x_n \to x_0$; zwartość zbioru $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ implikuje słabą zwartość obrazu i, w konsekwencji, ciąg (y_n) ma podciąg $y_{n_k} \rightharpoonup y_0$. Trzeba pokazać, że $y_0 \in \varphi(x_0)$. Przypuśćmy, że tak nie jest, tzn. $y_0 \notin \varphi(x_0)$. Z twierdzenia o oddzielaniu istnieje funkcjonał $p \in \mathbb{E}^*$ taki, że

$$\sup_{y \in \varphi(x_0)} \langle p, y \rangle < \langle p, y_0 \rangle - \varepsilon$$

dla pewnego $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie φ jako słabo ciągłe jest uhc, czyli znajdzie się $\delta > 0$ tak, że dla $x \in B(x_0, \delta)$, $\sup_{y \in \varphi(x)} \langle p, y \rangle < \langle p, y_0 \rangle - \varepsilon$. Zatem dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$, $\langle p, y_{n_k} \rangle < \langle p, y_0 \rangle - \varepsilon$:przeczy to słabej zbieżności $y_{n_k} \rightharpoonup y_0$. □

4.4.8 TWIERDZENIE: *Jeśli odwzorowanie $\varphi : X \multimap \mathbb{E}$ ma słabo zwarte wartości i jest H-usc, to jest słabo usc.*

DOWÓD: Niech $A \subset \mathbb{E}$ będzie słabo domknięty, $(x_n) \subset \varphi^{-1}(A)$ będzie zbieżny do $x_0 \in X$. Aby dowieść, że $x_0 \in \varphi^{-1}(A)$, czyli, że $vp(x_0) \cap A \neq \emptyset$, niech $\varepsilon := \inf_{y \in \varphi(x_0)} d(y, A)$. Jeśli $\varepsilon > 0$ to otrzymujemy sprzeczność, gdyż wówczas znajdzie się $\delta > 0$ taka, że dla $x \in X$, jeśli $d(x, x_0) < \delta$, to $\varphi(x) \subset B(\varphi(x_0), \varepsilon)$, więc dla dostatecznie dużych n, $vp(x_n) \cap A = \emptyset$, czyli $x_n \notin \varphi^{-1}(A)$. Skoro więc $\varepsilon = 0$, to istnieją ciągi $y_n \in \varphi(x_0)$ i $z_n \in A$ takie, że $\|y_n - z_n\| \to 0$. Słaba zwartość $\varphi(x_0)$ pozwala przyjąć, że $y_n \rightharpoonup y_0 \in \varphi(x_0)$. Lecz wówczas, dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$,

$$|\langle p, z_n - y_0 \rangle| \leqslant |\langle p, z_n - y_n \rangle| + |\langle p, y_n - y_0 \rangle| \leqslant \|p\| \|y_n - z_n\| + |\langle p, y_n - y_0 \rangle| \to 0.$$

Słaba domkniętość A implikuje, że $y_0 \in A$; zatem $y_0 \in \varphi(x_0) \cap A$. □

4.4.9 TWIERDZENIE: *Wykres odwzorowania górnie hemiciągłego $\varphi : X \multimap \mathbb{E}$ o domkniętych i wypukłych wartościach jest zbiorem domkniętym w $X \times \mathbb{E}$ o ile w $\mathbb{E}$ rozważymy słabą topologię.*

DOWÓD: Przypuśćmy, że $(x_\lambda, y_\lambda)_{\lambda \in L}$ jest uogólnionym ciągiem w $\mathrm{Gr}\,(\varphi)$ zbieżnym (w danej topologii) do punktu (x, y). Zauważmy, że dla dowolnego $p \in \mathbb{E}^*$,

$$\langle p, y_\lambda \rangle \leqslant \sigma_{\varphi(x_\lambda)}(p).$$

Zatem

$$\langle p, y \rangle = \lim_{\lambda \in L} \langle p, y_\lambda \rangle \leqslant \limsup_{\lambda \in L} \sigma_{\varphi(x_\lambda)}(p) \leqslant \sigma_{\varphi(x)}(p)$$

na mocy półciągłości z góry odwzorowania $\sigma_{\varphi(\cdot)}(p)$. Stad wynika, że $y \in \mathrm{cl\,conv}\,\varphi(x) = \varphi(x)$. Gdyby tak nie było, to — na mocy twierdzenia o oddzielaniu, istniałby funkcjonał $p \in E^*$ taki, że $\langle p, y \rangle > \sup_{z \in \varphi(x)} \langle p, z \rangle = \sigma_{\varphi(x)}(p)$: sprzeczność. □

Udowodnimy obecnie najważniejsze z punktu widzenia zastosowań twierdzenie o zbieżności.

4.4.10 TWIERDZENIE (o zbieżności): *Niech $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ będą przestrzeniami Banacha, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ przestrzenią z miarą a $\varphi : \Omega \times \mathbb{E} \multimap \mathbb{F}$ odwzorowaniem o wypukłych i domkniętych wartościach takim, że dla p.w. $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega, \cdot) : \mathbb{E} \multimap \mathbb{F}$ jest górnie hemiciągłe. Przypuśćmy, że dane są ciągi funkcji (u_n) w $L^p(\Omega, \mathbb{E})$ oraz (w_n) w $L^q(\Omega, \mathbb{F})$ $(1 \leqslant p, q < \infty)$ takie, że: dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$w_n(\omega) \in \mathrm{cl\,conv}\, B(\varphi(\omega, B(u_n(\omega), \varepsilon)), \varepsilon)$$

dla $n \geqslant N$. *Jeśli* $u_n \to u$ *w* $L^p(\Omega, E)$ *oraz* $w_n \rightharpoonup w$ *słabo w* $L^q(\Omega, F)$, *to*

$$w(\omega) \in \varphi(\omega, u(\omega))$$

dla p.w. $\omega \in \Omega$.

Dowód: Przypomnijmy, że dla zbioru wypukłego w przestrzeni Banacha domknięcie i słabe domknięcie pokrywają się. Użyjemy tego faktu w odniesieniu do przestrzeni $L^q(\Omega, F)$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, funkcja w należy do słabego domknięcia zbioru $\operatorname{conv}\{w_m\}_{m \geqslant n}$ (po. również twierdzenia o charakteryzacji słabej zwartości w L^1). Wobec tego w należy też do domknięcia tego zbioru. Zatem, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje $z_n \in \operatorname{conv}\{w_m\}_{m \geqslant n}$ taki, że

$$z_n = \sum_{m \geqslant n} a_n^m w_m$$

(współczynniki $a_n^m = 0$ dla p.w. $m \geqslant n$ oraz $\sum_{m \geqslant n} a_n^m = 1$) taki, że

$$\|z_n - w\|_{L^q} < \frac{1}{n}.$$

Innymi słowy $z_n \to w$ w $L^q(\Omega, F)$. Wówczas też (ewentualnie przechodząc do podciągu) $z_n(\omega) \to w(\omega)$ dla p.w. $\omega \in \Omega$. Rozumując analogicznie można przyjąć, że $u_n(\omega) \to u(\omega)$ dla p.w. $\omega \in \Omega$. Ustalmy zbiór $N \subset \Omega$ miary pełnej, na którym obie te zbieżnośći mają miejsce. Bez straty ogólności można również założyć, że dla $\omega \in N$ ma miejsce założenie o związku pomiędzy u_n oraz w_n oraz $\varphi(\omega, \cdot)$ jest górnie hemiciągłe.

Niech $\omega \in N$ będzie ustalone. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i $p \in F^*$. Ponieważ odwzorowanie $\varphi(\omega, \cdot)$ jest górnie hemiciągła, to istnieje $\eta \in (0, \|p\|^{-1}\varepsilon/3)$ taka, że dla dowolnego $x \in E$, jeśli $\|x - u(\omega)\| < \eta$, to

$$\sigma_{\varphi(\omega,x)}(p) < \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z kolei istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$,

$$w_n(\omega) \in \operatorname{cl}\operatorname{conv} B(\varphi(\omega, B(u_n(\omega), \eta)), \eta).$$

Niech $n \geqslant N$ i weźmy $y_n \in \operatorname{conv} B(\varphi(\omega, B(u_n(\omega), \eta)), \eta)$ takie, by $\|w_n(\omega) - y_n\| < \eta$. Oczywiście

$$y_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n v_i^n,$$

gdzie $\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n = 1$ oraz $v_i^n \in B(\varphi(\omega, B(u_n(\omega), \eta/2)), \eta)$. W taki razie znajdziemy $x_i^n \in B(u_n(\omega), \eta/2)$ oraz $t_i^n \in \varphi(\omega, x_i^n)$ takie, że $\|v_i^n - t_i^n\| < \eta$. Istnieje $N_1 \geqslant N$ takie, że dla $n \geqslant N_1$,

$$\|u_n(\omega) - u(\omega)\| < \eta/2;$$

stąd też $\|u(\omega) - x_i^n\| < \eta$ dla $n \geqslant N_1$. Zatem, dla $n \geqslant N_1$,

$$\langle p, w_n(\omega)\rangle = \langle p, w_n(\omega) - y_n\rangle + \langle p, y_n\rangle \leqslant \|p\|\|w_n(\omega) - y_n\| + \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^n \langle p, v_i^n\rangle.$$

Z kolei, dla każdego $i = 1, \ldots, k_n$,

$$\langle p, v_i^n\rangle = \langle p, v_i^n - t_i^n\rangle + \langle p, t_i^n\rangle \leqslant \|p\|\|v_i^n - t_i^n\| + \sigma_{\varphi(\omega,x_i^n)}(p) < \|p\|\eta + \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p) + \varepsilon/3.$$

Biorąc to wszystko pod uwagę otrzymamy, że dla $n \geqslant N_1$,

$$\langle p, w_n(\omega)\rangle < \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p) + \varepsilon.$$

Niech $n \geqslant N_1$. Mnożąc powyższą nierówność przez a_n^m dla $m \geqslant n$ i dodając stronami otrzymamy

$$\langle p, z_n(\omega)\rangle < \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p) + \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy z $n \to \infty$, dostajemy

$$\langle p, w(\omega)\rangle \leqslant \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p) + \varepsilon.$$

Z uwagi na dowolność $\varepsilon > 0$ oznacza to, że dla dowolnego $p \in F^*$,

$$\langle p, w(\omega)\rangle \leqslant \sigma_{\varphi(\omega,u(\omega))}(p).$$

Dowodzi to, że

$$w(\omega) \in \operatorname{cl}\operatorname{conv}\varphi(\omega, u(\omega)) = \varphi(\omega, u(\omega)).$$

To kończy dowód. $\square$

4.5 Nierówność Gronwalla

Najpierw omówimy *postać różniczkową* tej nierówności.

4.5.1 Twierdzenie (nierówność Gronwalla): *Niech J będzie dowolnym przedziałem, oraz rozważmy funkcje $f, g, h : J \to \mathbb{R}$ takie, że f jest absolutnie ciągła, zaś $g, h \in L^1_{\mathrm{loc}}(J, \mathbb{R})$ oraz $g \geqslant 0$. Jeśli, dla p.w. $t \in J$*

$$f'(t) \leqslant g(t)f(t) + h(t),$$

to, dla dowolnego $a, t \in J$, ma miejsce nierówność Gronwalla

$$f(t) \leqslant \exp\left(\int_a^t g(s)\,ds\right)\left[f(a) + \int_a^t h(s)\,ds\right].$$

Dowód Dla p.w. $s \in J$

$$\frac{d}{ds}\left[f(s)\exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)\right] = f'(s)\exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right) - f(s)\exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)g(s) =$$
$$= \exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)[f'(s) - f(s)g(s)] \leqslant \exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)h(s).$$

Zatem dla dowolnego $t \in J$,

$$f(t)\exp\left(-\int_a^t g(s)\,ds\right) = f(a) + \int_a^t \frac{d}{ds}\left[f(s)\exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)\right]ds \leqslant f(a) + \int_a^t \exp\left(-\int_a^s g(z)\,dz\right)h(s)\,ds \leqslant f(a) + \int_a^t h(s)\,ds.$$

To oczywiście kończy dowód. □

4.5.2 Wniosek: *Przy powyższych założeniach, dla dowolnych $a, t \in J$*

$$f(t) \leqslant \psi(t)$$

gdzie $\psi(a) = f(a)$ oraz $\psi'(t) = g(t)\psi(t) + h(t)$ dla p.w. $t \in J$.

Dowód: Dla $t \in J$, połóżmy

$$\rho(t) := \int_a^t g(s)f(s)\,ds, \quad \xi(t) := f(a) + \int_a^t h(s)\,ds, \quad G(t) := \int_a^t g(s)\,ds.$$

Nierówność z twierdzenia 4.5.1 orzeka więc, że

$$f(t) \leqslant e^{G(t)}\xi(t).$$

Mamy oczywiście

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds.$$

Stąd

$$f(t) \leqslant \rho(t) + \xi(t).$$

Dalej, dla p.w. $s \in J$,

$$\left(\rho(s)e^{-G(s)}\right)' = \rho'(s)e^{-G(s)} - \rho(s)g(s)e^{-G(s)} =$$
$$g(s)e^{-G(s)}(f(s) - \rho(s)) \leqslant g(s)\xi(s)e^{-G(s)}.$$

W takim razie, dla p.w. $t \in J$,

$$\rho(t)e^{-G(t)} = \rho(a)e^{-G(0)} + \int_a^t \left(\rho(s)e^{-G(s)}\right)'\,ds \leqslant \int_a^t \xi(s)g(s)e^{-G(s)}\,ds.$$

Czyli

$$f(t) \leqslant \xi(t) + \rho(t) \leqslant= \xi(t) + e^{G(t)}\int_a^t \xi(s)g(s)e^{-G(s)}\,ds := \psi(t).$$

Bezpośrednio $\psi(a) = f(a)$ oraz, dla p.w. $t \in J$,

$$\psi'(t) = h(t) + \left(g(t)e^{G(t)}\int_a^t \xi(s)g(s)e^{-G(s)}\,ds + e^{G(t)}\xi(t)g(t)e^{-G(t)}\right)$$
$$= h(t) + g(t)\left(\xi(t) + e^{G(t)}\int_a^t \xi(s)g(s)e^{-G(s)}\,ds\right) = g(t)\psi(t) + h(t).$$

Zauważmy, że

$$\psi(t) \leqslant e^{G(t)}\xi(t).$$

Zatem nierówność powyższa jest nieco silniejsza od nierówności z twierdzenia 4.5.1.

Teraz omówimy postać całkową tej nierówności.

4.5.3 Twierdzenie (Nierówność Gronwalla): *Niech $p \in L^\infty(J,\mathbb{R})$, $q \in L^1_{loc}(J,\mathbb{R})$, $q \geqslant 0$ oraz niech $\alpha : J \to \mathbb{R}$ będzie absolutnie ciągła. Jeśli, dla dowolnego $t \in J$,*

$$p(t) \leqslant \alpha(t) + \int_a^t p(s)q(s)\,ds,$$

to, dla dowolnego $t \in J$,

$$p(t) \leqslant \alpha(t) \exp\left(\int_a^t q(s)\, ds\right).$$

Dowód: Niech

$$f(t) := \alpha(t) + \int_a^t p(s)q(s)\, ds, \quad t \in J.$$

wtedy f jest absolutnie ciągła oraz dla p.w. $t \in J$,

$$f'(t) = \alpha'(t) + p(t)q(t) \leqslant \alpha'(t) + f(t)q(t).$$

Tak więc

$$p(t) \leqslant f(t) \leqslant \exp\left(\int_a^t q(s)\, ds\right) \left[\alpha(a) + \int_a^t \alpha'(s)\, ds\right] = \alpha(t) \exp\left(\int_a^t q(s)\, ds\right). \qquad \square$$

Rozdział 5

Inkluzje różniczkowe

5.1 Wstęp

Rozważmy przedział $J \subset \mathbb{R}$; niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią Banacha i niech $\varphi : J \times \mathbb{E} \multimap \mathbb{E}$ będzie odwzorowaniem o zwartych ([1]) i wypukłych wartościach takim, że:

(i) dla dowolnego $x \in \mathbb{E}$, $\varphi(\cdot, x)$ posiada silnie mierzalną selekcję;
(ii) dla p.w. $t \in J$, odwzorowanie $\varphi(t, \cdot)$ jest usc.

Jest jasne, że jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią ośrodkową, to warunki (i), (ii) są spełnione np., gdy φ jest odwzorowaniem górnie Carathéodory'ego.

Niech $a \in J$ oraz $x_0 \in \mathbb{E}$. Interesuje nas istnienie rozwiązań problemu Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} u' \in \varphi(t, u); \\ u(a) = x_0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia nazwiemy funkcję $u \in W^{1,1}(I, \mathbb{E})$, gdzie I jest przedziałem zawierającym a taką, że $u(a) = x_0$ oraz $u'(t) \in \varphi(t, u(t))$ dla p.w. $t \in I$.

5.1.1 Uwaga: Funkcja $u : I \to \mathbb{E}$ jest rozwiązaniem problemu $(*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $v \in L^1(I, \mathbb{E})$ taka, że

$$v(t) \in \varphi(t, u(t))$$

dla p.w. $t \in I$ oraz

$$u(t) = x_0 + \int_a^t v(s)\, ds$$

dla dowolnego $t \in I$.

Załóżmy dodatkowo, że istnieje funkcja $c \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R})$ taka, że dla p.w. $t \in J$ oraz $x \in E$,

(iii) $\sup_{y \in \varphi(t,x)} \|y\| \leqslant c(t)(1 + \|x\|)$.

5.1.A Operator Niemyckiego

Zdefiniujemy obecnie jedno z podstawowych pojęć: *operator Niemyckiego* (inaczej *operator podstawienia*) N_φ wyznaczony przez odwzorowanie φ. Rodzinę funkcji silnie mierzalnych z J

[1] Założenie zwartości wartości będzie później osłabiane i będzie przedmiotem dyskusji.

do $\mathbb{E}$ oznaczamy symbolem $\mathcal{M}(J,\mathbb{E})$.

Dla dowolnej funkcji silnie mierzalnej $u : J \to E$, definiujemy

$$N_\varphi(u) = \{v \in \mathcal{M}(J,\mathbb{E}) \mid v(t) \in \varphi(t,u(t)) \text{ dla p.w. } t \in J\}.$$

Z przyjętych założeń wynika, że $N_\varphi(u) \neq \emptyset$. Istotnie: istnienie silnie mierzalnej funkcji $v : J \to \mathbb{E}$ takiej, że $v(t) \in \varphi(t,u(t))$ dla p.w. $t \in J$ wynika z uwagi 3.5.5.

5.1.2 TWIERDZENIE: *Przy powyższych założeniach, przypuśćmy, że istnieje funkcja $\alpha \in L^q_{loc}(J,\mathbb{R})$ oraz stała β takie, że*

$$\sup_{y\in\varphi(t,x)} \|y\| \leqslant \alpha(t) + \beta\|x\|^{p/q},$$

dla p.w. $t \in J$ i dla dowolnego $x \in \mathbb{E}$, gdzie $1 \leqslant p,q < \infty$. Wówczas dla dowolnego $u \in L^p_{loc}(J,\mathbb{E})$, $N_\varphi(u) \in L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$ i odwzorowanie $N_\varphi : L^p_{loc}(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(L^q_{loc}(J,\mathbb{E}))$ ma wypukłe, słabo zwarte wartości i jest górnie demiciągłe (słabo usc) i uhc.

DOWÓD: Niech $u \in L^p_{loc}(J.\mathbb{E})$ i $v \in N_\varphi(u)$. Wtedy v jest funkcja silnie mierzalną i ponieważ $v(t) \in \varphi(t,u(t))$ dla p.w. $t \in J$, to

$$\|v(t)\|^q \leqslant 2^{q-1}(\alpha^q(t) + \beta^q\|u(t)\|^p)$$

dla p.w. $t \in J$. Stąd wnosimy, że $v \in L^q_{loc}$. Wypukłość obrazów φ implikuje, że zbiór $N_\varphi(u)$ jest również wypukły. Ponadto $N_\varphi(u)$ jest zbiorem domkniętym: jeśli $v_n \in N_\varphi(u)$ i $v_n \to v$ w przestrzeni $L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$, to znajdziemy podciąg (oznaczony tym samym symbolem) taki, że $v_n(t) \to v(t)$ dla p.w. t. Zatem (z domkniętości $\varphi(t,u(t))$) wynika, że $v(t) \in \varphi(t,u(t))$ dla p.w. $t \in J$, czyli $v \in N_\varphi(u)$.

Twierdzenie Mazura implikuje, że $N_\varphi(u)$ jest też zbiorem słabo domkniętym w $L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$. Pokażemy teraz, że $N_\varphi(u)$ jest zbiorem słabo zwartym. W tym celu wystarczy pokazać, że jest to zbiór słabo zwarty w $L^1(I,\mathbb{E})$, gdzie I jest zwartym podprzedziałem w J (patrz twierdzenie 4.3.13 i uwaga 4.3.14). Jest raczej oczywiste, że zbiór $W := N_\varphi(u)|_I$ jest całkowo ograniczony (jeśli $v \in N_\varphi(u)$, $\|v(t) \leqslant \alpha(t) + \beta\|u(t)\|^{p/q}$; funkcja po prawej stronie jest całkowalna z q-tą potęgą, jest więc całkowalna na I); jest zatem ograniczony i jednostajnie całkowalny. Dla dowolnego $t \in J$, $W(t) = \{v(t) \mid v \in N_\varphi(u)\} \subset \varphi(t,u(t))$ dla p.w. t. Jest to więc zbiór zwarty. Z twierdzenia 4.3.10 widzimy, że zbiór W jest słabo zwarty w $L^1(I,\mathbb{E})$, to oznacza, że jest słabo zwarty w $L^1_{loc}(J,\mathbb{E})$.

Aby udowodnić słabą górna półciągłość N_φ wystarczy wziąć ciąg u_n zbieżny do u w $L^p_{loc}(J,\mathbb{E})$, ciąg $v_n \in L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$ taki, że $v_n \in N_\varphi(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i pokazać istnienie podciągu $v_{n_k} \rightharpoonup v \in N_\varphi(u)$. Ciąg (u_n) – jako zbieżny – ma podciąg (bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że sam ciąg ma tę własność) ograniczony przez pewną funkcję $\bar{u} \in L^p_{loc}(J,\mathbb{R})$ (tzn. $\|u_n(t)\| \leqslant \bar{u}(t)$ dla p.w. $t \in J$). Stąd

$$\|v_n(t)\| \leqslant \alpha(t) + \beta\bar{u}(t)^{p/q},$$

czyli jest ograniczony przez pewną funkcję lokalnie całkowalną z q-ta potęgą, a więc też lokalnie całkowalną. Tak więc ciąg (v_n) jest względnie słabo zwarty w $L^1_{loc}(J,\mathbb{E})$ (a więc też w $L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$), bo dla p.w. t, $\{v_n(t)\} \subset \varphi(t,\{u_n(t)\})$ a ten zbiór jest względnie zwarty. Zatem istnieje podciąg (v_{n_k}) słabo zbieżny do funkcji $v \in L^q_{loc}(J,\mathbb{E})$. Z twierdzenie o zbieżności $v(t) \in \varphi(t,u(t))$ dla p.w. $t \in J$; zatem $v \in N_\varphi(u)$. □

Podsumowując: udowodniliśmy, że dla dowolnej funkcji ciągłej $u : J \to E$, zbiór $N_\varphi(u)$ jest wypukły i słabo zwarty w $L^1_{loc}(J,E)$.

Rozważmy odwzorowanie
$$N_\varphi : C(J,E) \multimap L^1_{loc}(J,E).$$
Udowodnimy, że odwzorowanie to ma domknięty wykres w $C(J,E) \times L^1_{loc}(J,E)$ o ile w $L^1_{loc}(J,E)$ rozważyć słabą topologię. Jeśli $v_n \in N_\varphi(u_k)$ (tzn. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \varphi(t, u_n(t))$ dla p.w. $t \in J$), $v_n \rightharpoonup v$ in $L^1_{loc}(J,E)$ oraz $u_n \to u$ w $C(J,E)$ (zatem także $u_n \to u$ w $L^1_{loc}(J,E)$), to $v(t) \in \varphi(t, u(t))$ na mocy poprzednio udowodnionego twierdzenia o zbieżności.

Załóżmy obecnie, że dla dowolnego ograniczonego zbioru $B \subset E$ i $t \in J$, istnieje zbiór słabo zwarty $C_B(t)$ taki, że

(iv)′ $\varphi(t,B) \subset C_B(t)$.

Jest jasne, że jeśli E jest przestrzenią refleksywna, to założenie (iv)′ jest spełnione automatycznie na mocy założenia (iii).

Niech teraz $K : L^1_{loc}(J,E) \to C(J,E)$ będzie operatorem danym wzorem
$$Kv(t) = \int_a^t v(s)\,ds, \quad t \in J$$
dla $v \in L^1_{loc}(J,E)$. Jest to oczywiście operator liniowy i ciągły. Zauważmy, że wykres odwzorowania $\Phi : C(J,E) \to (C(J,E))$ danego wzorem
$$\Phi(u) = K \circ N_\varphi(u), \quad u \in C(J,E)$$
(tak więc $w \in \Phi(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $v \in N_\varphi(u)$ taka, że $w(t) = \int_a^t v(s)\,ds, \quad t \in J$) jest domknięty Istotnie niech $w_n \in \Phi(u_n)$, $w_n \to w$ oraz $u_n \to u$ in $C(j,E)$. Zatem, dla dowolnego zwartego podprzedziału, $u_n \to u$ oraz $w_n \to w$ jednostajnie na I. Ponadto $w_n = \int_a^t v_n(s)\,ds$ gdzie $v_n \in N_\varphi(u_n)$. Analogicznie jak poprzednio — korzystając z twierdzenia o słabej zwartości Diestela — dowodzimy, że (ewentualnie dla podciągu) $v_n \rightharpoonup v \in L^1_{loc}(J,E)$ słabo w $L^1_{loc}(J,E)$ oraz $v \in N_\varphi(u)$. Tak więc, dla dowolnego $t \in J$,
$$w(t) = \lim_{n\to\infty} w_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^t v_n(s)\,ds = \int_a^t v(s)\,ds.$$
To znaczy, że $w \in \Phi(u)$.

W szczególności widać, że dla dowolnego $u \in C(J,E)$, zbiór $\Phi(u)$ jest domknięty i wypukły.

Założenie (iv)′ wynika z następującego, silnieszego założenia:

(iv) Dla dowolnego $t \in J$ i ograniczonego zbioru $B \subset E$, zbiór $\varphi([a,t] \times B)$ jest względnie zwarty.

Przypuśćmy, że $\mathcal{B}$ jest zbiorem ograniczonym w $C(J,E)$. Udowodnimy, że $\Phi(\mathcal{B})$ jest zbiorem względnie zwartym (w $C(J,E)$). Wykorzystamy oczywiście twierdzenie Ascoli-Arzeli. Pokażemy najpierw, że zbiór $\Phi(\mathcal{B})$ jest jednakowo ciągły. Weźmy $t_0 \in J$. Istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że $I := [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset J$ (lub też, jeśli t_0 jest jednym z krańców przedziału J, to $I := [t_0, t_0 + \delta_0] \subset J$ lub $I_0 := [t_0 - \delta_0, t_0] \subset J$). Ponieważ zbiór $\mathcal{B}$ jest ograniczony, to $r := \sup_{u\in\mathcal{B}} \sup_{t\in I} \|u(t)\} < \infty$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$; istnieje $\delta \in (0, \delta_0)$ takie, że jeśli $A \subset J$ oraz $\mu(A) < \delta$, to
$$\int_A c(s)(1+r)\,ds < \varepsilon.$$
Niech $w \in \Phi(\mathcal{B})$. Zatem, dla dowolnego $t \in I$,
$$w(t) = \int_a^t v(s)\,ds$$

gdzie $v(t) \in \varphi(t, u(t))$ na J dla pewnej funkcji $u \in \mathcal{B}$. Stąd, dla $t \in I$, jeśli $|t - t_0| < \delta$, to

$$\|w(t) - w(t_0)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|v(s)\| \, ds \leqslant \int_{t_0}^{t} c(s)(1 + r) \, ds < \varepsilon.$$

Przejdziemy teraz do dowodu względnej zwartości orbit $\Phi(\mathcal{B})(t)$ dla $t \in J$. Ustalmy $t \in J$ i niech $w \in \Phi(\mathcal{B})$. Wtedy

$$w(t) = \int_a^t v(s) \, ds \in |t - a| \operatorname{cl} \operatorname{conv} v([a, t]) \subset |t - a| \operatorname{cl} \operatorname{conv} \varphi([a, t] \times B)$$

gdzie $B = D(0, r)$ zaś $r = \sup_{u \in \mathcal{B}} \sup_{a \leqslant s \leqslant t} \|u(s)\|$. Stąd, na mocy założenia (iv), orbita $\Phi(\mathcal{B})(t)$ jest względnie zwarta.

Pokazaliśmy, że odwzorowanie $\Phi : C(J, E) \multimap C(J, E)$ jest *pełnociągłe* (tzn. przekształca zbiory ograniczone we względnie zwarte i jest usc – bo posiada domknięty wykres). Ma więc też zwarte wartości.

Istnienie rozwiązań

Wracamy do naszych rozważań dotyczących inkluzji różniczkowej. Przypuśćmy, że $u : I \to E$ jest jej rozwiązaniem. Wtedy istnieje funkcja $v \in L^1(I, E)$ taka, że dla $t \in I$.

$$u(t) = x_0 + \int_a^t v(s) \, ds$$

oraz $v(t) \in \varphi(t, u(t))$ p.w. na I. Zatem, dla dowolnego $t \in I$,

$$\|u(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int_a^t c(s)(1 + \|u(s)\|) \, ds = \left(\|x_0\| + \int_a^t c(s) \, ds \right) + \int_a^t c(s) \|u(s)\| \, ds.$$

Na mocy (całkowej) nierówności Gronwalla, mamy

$$\|u(t)\| \leqslant \mu(t), \quad t \in I$$

gdzie funkcja ciągła $\mu : J \to [0, +\infty)$ dana jest wzorem

$$\mu(t) = \left(\|x_0\| + \int_a^t c(s) \, ds \right) \exp\left(\int_a^t c(s) \, ds \right), \quad t \in J.$$

Rozważmy ciągłą funkcję $f : J \times [0, +\infty) \to [0, 1]$ taką, że

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 0 \leqslant x \leqslant \mu(t) \\ 0 & \text{gdy } x \geqslant \mu(t) + 1. \end{cases}$$

Zmodyfikujemy obecnie φ. Mianowicie zdefiniujmy $\psi : J \times E \multimap E$ wzorem

$$\psi(t, x) = f(t, \|x\|)\varphi(t, x), \quad t \in J, \, x \in E.$$

Wtedy funkcja ψ spełnia podobne własności jak φ (dla p.w. $t \in J$ $\psi(t, \cdot)$ jest usc oraz dla dowolnego $x \in E$, $\psi(\cdot, x)$ ma silnie mierzalną selekcję). Ponadto, dla dowolnego $t \in J$ oraz zbioru ograniczonego $B \subset E$, $\psi([a, t] \times B)$ jest zbiorem względnie zwartym. Ponadto, jeśli $u : I \to E$ jest rozwiązaniem wyjściowej inkluzji, to na I, $\|u(t)\| \leqslant \mu(t)$, zatem u jest także rozwiązaniem inkluzji, w której φ zastąpimy przez ψ. Na odwrót, każde rozwiązanie tej drugiej inkluzji jest również rozwiązanie wyjściowej.

Niech $t \in J$, $x \in E$ i $y \in \psi(t,x)$. Wtedy $y = f(t,\|x\|)z$ gdzie $z \in \varphi(t,x)$. Zatem $\|y\| \leqslant c(t)(1+\|x\|)$. Jeżeli $\|x\| \leqslant \mu(t)+1$, to

$$\|y\| \leqslant c(t)[1+(\mu(t)+1)];$$

gdy $\|x\| \geqslant \mu(t)+1$, to $y = 0$. Zatem

$$\|y\| \leqslant k(t)$$

dla dowolnego $y \in \psi(t,x)$, $t \in J$ oraz $x \in E$, gdzie

$$k(t) = c(t)(2+\mu(t)).$$

Jest jasne, że $k \in L^1_{loc}(J,\mathbb{R})$. Innymi słowy ψ spełnia warunek (iii), w którym brak czynnika $(1+\|x\|)$.

W związku z tym bez zmniejszenia ogólności można zakładać, że przyjęty warunek (iii) ma postać

(iii) dla dowolnych $t \in J$, $x \in E$,

$$\sup_{y\in\varphi(t,x)} \|y\| \leqslant c(t).$$

Jeśli jest taka potrzeba, to w dalszym ciągu modyfikując φ można nawet zażądać by $c \equiv 1$.

Istotnie: przede wszystkim przypuśćmy, że spełniony jest warunek (iii) powyżej i $c(t) \geqslant 1$ (jeśli tak nie jest to w miejsce c bierzemy funkcję $\max\{1,c(t)\}$). Funkcja $J \ni t \to \alpha(t) := \int_a^t c(s)\,ds$ jest ciągła i rosnąca; jej obrazem jest również przedział w^*-J oraz istnieje ciągła funkcja $\beta : w^*\text{-}J \to J$ do niej odwrotna. Rozważmy odwzorowanie $w^*\text{-}\varphi : w^*\text{-}J \times E \multimap E$ daną wzorem

$$w^*\text{-}\varphi(s,y) = \frac{1}{c(\beta(s))}\varphi(\beta c(s),y); \quad s \in w^*\text{-}J,\ y \in E.$$

Wykażemy, że odwzorowanie w^*-φ spełnia wszystkie potrzebne założenia. Jasne, że dla p.w. $s \in w^*$-J, odwzorowanie $w^*\text{-}\varphi(s,\cdot)$ jest usc. Ustalmy dowolne $y \in E$. Wykażemy, że $w^*\text{-}\varphi(\cdot,y)$ posiada silnie mierzalną selekcję. Niech $v : J \to E$ będzie silnie mierzalną selekcją $\varphi(\cdot,y)$. Wtedy oczywiście $v\circ\beta : w^*\text{-}J \to R$ jest selekcją odwzorowania $\varphi(\beta(\cdot),y)$. Pokażemy, że funkcja $v\circ\beta$ jest silnie mierzalna. W tym celu wystarczy pokazać, że jest silnie mierzalna po obcięciu jej do podprzedziału $w^*\text{-}I \subset w^*\text{-}J$ skończonej miary. Niech $\varepsilon > 0$. Oczywiście $I = \beta(w^*\text{-}I)$ jest też podprzedziałem w J skończonej miary. Na I funkcja v jest silnie mierzalna; zatem spełnia własność Łuzina: tzn. istnieje domknięty zbiór $I_{w^*\text{-}\varepsilon} \subset I$ taki, że $\mu(I \setminus I_{w^*\text{-}\varepsilon}) < \varepsilon$ oraz $v|I_{w^*\text{-}\varepsilon}$ jest ciągła. Oczywiście $w^*\text{-}I_{w^*\text{-}\varepsilon} = \beta^{-1}(I_{w^*\text{-}\varepsilon}) = \alpha(I_{w^*\text{-}\varepsilon})$ jest zbiorem domkniętym w w^*-I. Z twierdzenia 7 str 174 (Łojasiewicz)

$$\mu(w^*\text{-}I_{w^*\text{-}\varepsilon}) = \mu(\alpha(I_{w^*\text{-}\varepsilon})) = \int_{I_{w^*-\varepsilon}} c(z)\,dz.$$

Tak więc jeśli tylko wyjściowe w^*-ε jest dostatecznie małe, to widzimy że $\mu(w^*\text{-}I \setminus I_{w^*\text{-}\varepsilon}) < \varepsilon$. Ponadto, na $w^*\text{-}I_{w^*\text{-}\varepsilon}$ funkcja $v\circ\beta$ jest ciągła. Stąd jest na przedziale w^*-I silnie mierzalna. Zauważmy dalej, że dla dowolnego $s \in J$, $y \in E$,

$$\sup_{z\in w^*-\varphi(s,y)} \|z\| \leqslant 1.$$

Następnie dowiedziemy, że jeśli $I \subset J$, $w^*\text{-}I = \alpha(I)$, to rozwiązania na I wyjściowej inkluzji są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z rozwiązaniami inkluzji, w której φ zamienione zostało przez $w^*\text{-}\varphi$. Istotnie niech $u : I \to E$ będzie rozwiązaniem wyjściowej inkluzji. Połóżmy $w(s) = u(\beta(s))$ dla $s \in w^*\text{-}I$. Udowodnimy, że $w \in W^{1,1}(w^*\text{-}I, E)$. Funkcja w, jako złożenie funkcji absolutnie ciągłych, jest absolutnie ciągła i p.w. różniczkowalna: dla p.w. $s \in w^*\text{-}I$,

$$w'(s) = \frac{u'(\beta(s))}{\alpha'(\beta(s))} = \frac{u'(\beta(s))}{c(\beta(s))}.$$

Poza tym istnieje $v \in L^1(I, E)$ taka, że $u'(t) = v(t)$ na I oraz $v(t) \in \varphi(t, u(t))$ dla p.w. $t \in I$. Stąd też, dla p.w. $s \in w^*\text{-}I$,

$$w'(s) = \frac{v(\beta(s))}{c(\beta(s))} \in \frac{1}{c(\beta(s))}\varphi(\beta(s), u(\beta(s))) = w^*\text{-}\varphi(s, w(s)).$$

Wystarczy teraz udowodnić, że $w' \in L^1(w^*\text{-}I, E)$. Skoro $v \in L^1(I, E)$, to $\|v(\cdot)\| \in L^1(I, \mathbb{R})$. Z twierdzenia 8, str. 175 – Łojasiewicz), funkcja

$$\|w'(\cdot)\| = \|v(\beta(\cdot))\beta'(\cdot)\| = \|v(\beta(\cdot))\|\beta'(s)$$

jest całkowalna. Dowodzi to, że $w \in W^{1,1}(w^*\text{-}I, E)$.

Jeśli zaś $w \in W^{1,1}(w^*\text{-}I, E)$ jest rozwiązaniem na $w^*\text{-}I$ tej drugiej inkluzji, to rozumując analogicznie $u(t) = w(\alpha(t))$ jest rozwiązaniem wyjściowej inkluzji.

Koniec końców wykazaliśmy, że w miejsce warunku (iii) można zakładać, że dla dowolnego $t \in J$, $x \in E$,

$$\sup_{y \in \varphi(t,x)} \|y\| \leqslant 1.$$

Przy tym założeniu pokażemy, że obraz odwzorowania Φ jest ograniczony w $C(J, E)$. Weźmy zwarty podprzedział $I \subset J$ oraz $u \in C(J, E)$. Niech $w = \Phi(u)$, tzn.

$$w(t) = \int_a^t v(s)\, ds$$

gdzie $v(s) \in \varphi(s, u(s))$ dla p.w. $s \in J$ oraz $v \in L^1_{loc}(J, E)$. Na mocy założenia (iii), $\|v(s)\| \leqslant 1$. Stąd, dla każdego $t \in I$,

$$\|w(t)\| \leqslant \int_a^t \|v(s)\|\, ds \leqslant \mu(I).$$

Innymi słowy $\Phi(C(J, E))$ leży w pewnym zbiorze domkniętym ograniczonym i wypukłym $\mathcal{B}$; tak więc $\Phi : \mathcal{B} \multimap \mathcal{B}$ i jest zwarte. Z twierdzenia Fana-Gliksberga, Φ posiada punkt stały: jest on rozwiązaniem wyjściowego problemu dla inkluzji różniczkowej.

Wykorzystaliśmy tutaj następujące twierdzenie o punkcie stałym:

Jeśli B jest wypukłym podzbiorem lokalnie wypukłej przestrzeni E oraz $\Phi : B \multimap B$ ma wypukłe zwarte wartości, jest usc i zwarte (tzn. $\Phi(B)$ jest zawarte w zwartym podzbiorze B), to Φ posiada punkt stały.

Zajmiemy się teraz inną sytuacją: nadal rozważamy inkluzję

$$\begin{cases} u' \in \varphi(t, u); \\ u(a) = x_0 \end{cases}$$

gdzie jak poprzednio $\varphi : J \times E \multimap$ jest odwzorowaniem o zwartych i wypukłych wartościach takim, że

(i) dla p.w. $t \in J$, $\varphi(t, \cdot)$ jest usc;

(ii) dla dowolnego $x \in E$, $\varphi(\cdot, x)$ posiada silnie mierzalną selekcję;

(iii) φ ma wzrost subliniowy, tzn. istnieje funkcja $c \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R})$ taka, że

$$\sup_{y \in \varphi(t,x)} \|y\| \leqslant c(t)(1 + \|x\|)$$

dla dowolnych $t \in J$ oraz $x \in E$.

Podobnie jak wyżej, poprzez odpowiednia modyfikacje prawej strony, można założyć, że założenie (iii) ma w istocie postać

(iii) $\sup_{y \in \varphi(t,x)} \|y\| \leqslant 1$.

Tym razem jednak w miejsce założenia (iv) przyjmiemy słabsze warunki zwartości. Mianowicie załóżmy, że

(iv) istnieje funkcja $k \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R})$ taka, że dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset E$,

$$\beta(\varphi(t, B)) \leqslant k(t)\beta(B),$$

gdzie β oznacza *miarę niezwartości Hausdorffa.*

Aby pójść dalej przypomnijmy definicje i podstawowe własności miary niezwartości.

Niech E będzie (nieskończenie wymiarową) przestrzenią Banacha i niech $\mathcal{B}(E)$ oznacza rodzinę zbiorów ograniczonych w E. Dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(R)$, definiujemy *miarę niezwartości Kuratowskiego* $\alpha : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\alpha(B) := \inf\{d > 0 \mid B \text{ można pokryć skończoną ilością zbiorów o średnicy } \leqslant d\}$$

oraz *miarę Hausdorffa* wzorem

$$\beta(B) := \inf\{r > 0 \mid B \text{ można pokryć skończoną ilością kul o promieniu } \leqslant r\}.$$

Twierdzenie: Niech $\gamma : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{R}$ oznacza miarę niezwartości Kuratowskiego lub Hausdorffa. Wówczas:

(i) dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(E)$, $\gamma(B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór B jest względnie zwarty;

(ii) Dla dowolnych $B, B_1, B_2 \in \mathcal{B}(E)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(\lambda B) = |\lambda|\gamma(B),$$

$$\gamma(B_1 + B_2) \leqslant \gamma(B_1) + \gamma(B_2),$$

$$\gamma(B_1 \cup B_2) \leqslant \max\{\gamma(B_1), \gamma(B_2)\};$$

(iii) jeśli $B_1 \subset B_2$, to $\gamma(B_1) \leqslant \gamma(B_2)$;

(iv) dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(E)$, $\gamma(\operatorname{cl} B) = \gamma(B) = \gamma(\operatorname{conv} B)$;

(v) γ jest funkcją ciągłą względem metryki Hausdorffa, tzn. jeśli $d_H(B_n, B) \to 0$, to $\gamma(B_n) \to \gamma(B)$;

(vi) $\alpha(B(x,r)) = 2r$, $\beta(B(x,r)) = r$. Ogólnie, dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(E)$, $\beta(B) \leqslant \alpha(B) \leqslant 2\alpha(B)$.
□

Uwaga. (i) Zauważmy, że miara Hausdorffa zależy istotnie od zbioru, w którym leżą środki kul pokrywających zbiór. W definicji chodzi o kule o środkach w przestrzeni E (bez dodatkowych ograniczeń. Jeśli $X \subset E$ i środki są wybierane w X, to piszemy $\beta_X(B)$ i wówczas $\beta(B) \leqslant \beta_X(B)$ dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(E)$.
(ii) Miarę β_X, gdzie $X \subset E$, można też zdefiniować następująco:

$$\beta_X(B) = \inf\{r > 0 \mid \text{w } X \text{ istnieje skończona } r - \text{sieć dla zbioru } B\}.$$

Innymi słowy $\beta_X(B) \leqslant r$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieją punkty $x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r + \varepsilon).$$

Niekiedy wygodnie jest skorzystać z następującego, łatwego w dowodzie faktu: $\beta(B) \leqslant r$ wtedy i tylko wtedy gdy, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieją zbiory zwarte $Z_1, \ldots, Z_n \subset E$ takie, że

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(Z_i, r + \varepsilon).$$

Twierdzenie: Załóżmy, że dana jest *filtracja* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ w E, tzn. wstępująca rodzina skończenie wymiarowych podprzestrzeni taka, że $E = \operatorname{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ([2]). Wtedy, dla dowolnego $B \subset \mathcal{B}(E)$, mamy

$$\beta(B) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} d(x, E_n).$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\delta(B)$ oznacza prawą stronę powyższej równości. Wtedy, dla pewnego dostatecznie dużego $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in B} d(x, E_m) \leqslant \delta(B) + \varepsilon.$$

Niech

$$C := \{y \in E_m \mid d(x, E_m) = \|x - y\| \ \text{ dla pewnego } x \in B\}.$$

Skoro zbiór B jest ograniczony oraz $\dim E_m < \infty$, to C jest zbiorem ograniczonym (więc też względnie zwartym); zatem $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$ dla pewnych $y_1, \ldots, y_n \in E_m$. Wobec tego

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \delta(B) + \varepsilon).l$$

Stąd $\beta(B) \leqslant \delta(B)$.

Z drugiej strony przypuśćmy, że $\beta(B) = r$. Zatem, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieją punkty $x_1, \ldots, x_n \in E$ takie, że

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r + \varepsilon/2).$$

Ponieważ przestrzeń $\bigcup_{j=1}^{\infty}$ jest gęsta w E, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ oraz punkty $y_i \in E_m$ takie, że $\|x_i - y_i\| < \varepsilon/2$. Wobec tego, dla dowolnego $x \in B$ istnieje $i = 1, \ldots, n$ takie, że $\|x - x_i\| < r + \varepsilon/2$

[2]Przy założeniu, że E jest przestrzenią ośrodkową, taka filtracja zawsze istnieje. Istotnie wystarczy rozważyć ośrodek $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ w E, tzn. taki zbiór, że $\operatorname{cl}\{z_j\} = E$ i położyć $E_n := \operatorname{span}\{z_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

i stąd $\|x - y_i\| < r + \varepsilon$; w takim razie $\sup_{x\in B} d(x, E_m) < r + \varepsilon$. W konsekwencji ($E_m \subset E_j$ przy $j \geqslant m$),

$$\delta(B) \leqslant r + \varepsilon.$$

Zatem $\delta(B) \leqslant \beta(B)$ z uwagi na dowolność $\varepsilon > 0$. □

Wniosek: Przy powyższych założeniach, niech $B = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Wtedy

$$\beta(B) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{k\to\infty} d(x_k, E_n).$$

Dowód. Niech γ oznacza prawe stronę tej równości. Jest jasne, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_k, E_n) \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} d(x_k, E_n) = \sup_{x\in B} d(x, E_n).$$

Zatem

$$\gamma \leqslant \delta(B) = \beta(B).$$

Z drugiej strony, dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $m \in \mathbb{N}$ oraz $j \in \mathbb{N}$ takie, że $d(x_k, E_m) < \gamma + \varepsilon$ o ile $k \geqslant j$. Analogicznie jak wyżej

$$\beta(\{x_k \mid k \geqslant j\}) = \delta(\{x_k \mid k \geqslant j\}) \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

Zatem

$$\beta(B) = \beta(\{x_1, \dots, x_{j-1}\} \cup \{x_k \mid k \geqslant j\}) = \beta(\{x_k \mid k \geqslant j\}) \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

Z uwagi na dowolność $\varepsilon > 0$ otrzymujemy, że $\beta(B) \leqslant \gamma$. □

Twierdzenie. Niech E będzie przestrzenią ośrodkową i niech $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie całkowo ograniczoną rodziną funkcji (silnie) mierzalnych $v_i : J \to E$, tzn. istnieje $c \in L^1_{loc}(J, \mathbb{R})$ taka, że $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|v_i(s)\| \leqslant c(s)$ dla p.w. $s \in J$. Wówczas funkcja $J \ni s \mapsto \beta(\{v_i(s)\})$ jest lokalnie całkowalna oraz, dla dowolnego $t \in J$,

$$\beta\left(\left\{\int_a^t v_i(s)\, ds\right\}\right) \leqslant \int_a^t \beta(\{v_i(s)\})\, ds.$$

Dowód. Na mocy poprzedniego wniosku, dla dowolnego $s \in J$,

$$\beta(\{v_i(s)\}) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{i\to\infty} d(v_i(s), E_n).$$

Oczywiście $d(v_i(s), E_n) = \inf_{y\in E_n} \|v_i(s) - y\| = \inf_{j\in\mathbb{N}} \|v_i(s) - y_j\|$ gdzie $\{y_j\}$ jest ośrodkiem w E_n. Zatem funkcja $J \ni s \mapsto d(v_i(s), E_n)$ jest mierzalna; w konsekwencji funkcja $J \ni s \mapsto \beta(\{v_i(s)\})$ jest mierzalna. Funkcja ta jest także całkowalna. Istotnie: dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, oraz $s \in J$,

$$\limsup_{i\to\infty} d(v_i(s), E_n) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \sup_{i\geqslant j} d(v_i(s), E_n).$$

Dla każdego $j \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{i\geqslant j} d(v_i(s), E_n) \leqslant \sup_{i\geqslant j} \|v_i(s)\| \leqslant \sup_{i\geqslant j} \|v_(s)\| \leqslant c(s).$$

Zatem z twierdzenia Lebesgue'a,

$$\int_a^t \beta(\{v_i(s)\} \, ds = \int_a^t \lim_{n\to\infty} \limsup_{i\to\infty} d(v_i(s), E_n)\, ds = \lim \int_a^t \limsup_{i\to\infty} d(v_i(s), E_n)\, ds \leqslant \int_a^t c(s)\, ds.$$

Z drugiej strony

$$\beta\left(\left\{\int_a^t v_i(s)\,ds\right\}\right) = \lim_{n\to\infty}\limsup_{i\to\infty} d\left(\int_a^t v_i(s)\,ds, E_n\right).$$

Zauważmy, że jeśli $w : J \to E$ jest funkcja prostą, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

$$d\left(\int_a^t w(s)\,ds, E_n\right) \leqslant \int_a^t d(w(s), E_n)\,ds.$$

Zatem dla dowolnej funkcji lokalnie całkowalnej $v : J \to E$, która jest granicą ciągu (w_k) funkcji prostych, na mocy lematu Fatou, mamy

$$d\left(\int_a^t v(s)\,ds, E_n\right) = \lim_{k\to\infty} d(\int_a^t w_k(s)\,ds, E_n)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_a^t d(w_k(s), E_n)\,ds \leqslant \int_a^t \limsup_{k\to\infty} d(w_k(s), E_n)\,ds = \int_a^t d(v(s), E_n)\,ds.$$

Tak więc, znowu na mocy lematy Fatou,

$$\beta\left(\left\{\int_a^t v_i(s)\,ds\right\}\right) = \lim_{n\to\infty}\limsup_{i\to\infty} d\left(\int_a^t v_i(s)\,ds, E_n\right) \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{i\to\infty}\int_a^t d(v_i(s), E_n)\,ds \leqslant \int_a^t \lim_{n\to\infty}\limsup_{i\to\infty} d(v_i(s), E_n)\,ds = \int_a^t \beta(\{v_i(s)\}\,ds.$$

□

Przypomnijmy założenia (i), (ii), (iii) oraz (iv), ustalmy $x_0 \in E$. Dowiedziemy, że

I. Zbiór $S(x_0)$ wszystkich rozwiązań inkluzji jest niepustym zwartym zbiorem typu R_δ;

II. Przekształcenie $E \ni x_0 \mapsto S(x_0)$ jest usc.

Ustalmy $n \in N$. Dla dowolnego $x \in E$, niech $v_x : J \to E$ będzie silnie mierzalna selekcją odwzorowania $\varphi(\cdot, x)$. Na mocy (iii), $\|v_x(t)\| \leqslant 1$ dla $t \in J$ (tak więc $v_x \in L^1_{loc}(J, E)$). Niech dalej $\{\lambda_s\}_{s\in S}$ będzie rozkładem jedności podporządkowanym pokryciu $\{B(x, n^{-1})\}_{x\in E}$ przestrzeni E, tzn. dla dowolnego $s \in S$, istnieje punkt $x_s \in E$ taki, że $\operatorname{supp}\lambda_s \subset B(x_s, n^{-1})$. Połóżmy $v_s := v_{x_s}$ i zdefiniujmy funkcję $f_n : J \times E \to E$ wzorem

$$f_n(t, x) = \sum_{s\in S}\lambda_s(x)v_s(t)$$

dla $t \in J$ oraz $x \in E$. Jest jasne, że dla dowolnego $x \in E$, zbiór $S(x) := \{s \in S \mid \lambda_s(x) \neq 0\}$ jest skończony. Zatem funkcja $f_n(\cdot, x) = \sum_{s\in S(x)}\lambda_s(x)v_s$ jest, jako skończona suma funkcji lokalnie całkowalnych , również lokalnie całkowalna. Ponadto, z racji na to, że rodzina $\{\operatorname{supp}\lambda_s\}_{s\in S}$ jest lokalnie skończona oraz każda z funkcji λ_s $(s \in S)$ lokalnie spełnia warunek Lipschitza, to widać, że dla dowolnego $x \in E$ istnieje $r_x > 0$ oraz stała $L_x \geqslant 0$ taka, że dla $x', x'' \in B(x, r_x)$ oraz $t \in J$,

$$\|f_n(t, x') - f_n(t, x'')\| \leqslant L_x\|x' - x''\|.$$

Zauważmy dalej, że dla każdego $t \in J$ oraz $x \in E$,

$$f_n(t, x) \in \varphi_n(t, x) := \operatorname{cl}\operatorname{conv}\varphi(t, B(x, n^{-1})).$$

Istotnie: jeśli $\lambda_s(x) \neq 0$, to $s \in S(x)$ oraz $x \in \operatorname{supp} \lambda_s \subset B(x_s, n^{-1})$; zatem $x_s \in B(x, n^{-1})$. Tak więc

$$v_s(t) \in \varphi(t, x_s) \subset \varphi(t, B(x, n^{-1}))$$

oraz

$$f_n(t, x) = \sum_{s \in S(x)} \lambda_s(x) v_s(t) \in \operatorname{conv} \varphi(t, B(x, n^{-1})) \subset \varphi_n(t, x).$$

Stąd

$$\|f_n(t, x)\| \leqslant 1$$

dla wszystkich $t \in J$, $x \in E$.

Wymienione własności funkcji pozwalają na następujący wniosek: *dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in J$ oraz $y \in E$, problem*

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u); \\ u(t_0) = y \end{cases}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u_n(\cdot; t_0, y) : J \to E$. Dodatkowo rozwiązanie $u_n(\cdot; t_0, y)$ zależy w sposób ciągły od parametrów t_0 i y.

Niech teraz $S_n(x_0)$ oznacza zbiór rozwiązań zagadnienia

$$\begin{cases} u' \in \varphi_n(t, u); \\ u(a) = x_0. \end{cases}$$

Jest jasne, że dla dowolnych $n \geqslant 1$, $t \in J$ oraz $x \in E$,

$$\varphi(t, x) \subset \varphi_{n+1}(t, x) \subset \varphi_n(t, x).$$

Zatem

$$S(x_0) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_0).$$

Oczywiście zbiór $S_n(x_0)$ jest niepusty bo na przykład $u_n(\cdot; x_0) \in S_n(x_0)$.

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Lemat. Niech $u_n \in S_n(x_0)$, $n \geqslant 1$. Wówczas ciąg (u_n) posiada podciąg zbieżny niemal jednostajnie do pewnego rozwiązania $u_0 \in S(x_0)$.

Nim przystąpimy do dowodu zauważmy, że fakt ten implikuje, że $S(x_0)$ jest zbiorem zwartym. Ponadto wynika z niego, że

$$S(x_0) = \bigcap_{n \geqslant 1} \operatorname{cl} S_n(x_0).$$

Istotnie, jeśli $w \in \bigcap_{n \geqslant 1} \operatorname{cl} S_n(x_0)$, to $w \in \operatorname{cl} S_n(x_0)$ dla każdego $n \geqslant 1$. Zatem kula $B(w, n^{-1})$ (w przestrzeni $C(J, E)$) zawiera funkcję $u_n \in S_n(x_0)$. Oczywiście $u_n \to w$. Tak więc $w \in S(x_0)$. Stąd

$$S(x_0) \subset \bigcap_{n \geqslant 1} \operatorname{cl} S_n(x_0) \subset S(x_0)$$

czyli

$$S(x_0) = \bigcap_{n \geqslant 1} \operatorname{cl} S_n(x_0).$$

Ponadto widzimy, że $\rho_n := \sup_{v\in S_n(x_0)} d(v, S(x_0)) \to 0$; zatem $S_n(x_0) \subset S(x_0) + D(0, \rho_n)$ (kula w $C(J, E)$). Stąd $\beta_0(\mathrm{cl}\, S_n(x_0)) = \beta_0(S_n(x_0)) \leqslant \rho_n \to 0$, gdzie β_0 oznacza miarę Hausdorffa w $C(J, E)$.

Dowód lematu. Niech $u_n \in S_n(x_0)$, tzn. dla $t \in J$,

$$u_n(t) = x_0 + \int_a^t v_n(s)\, ds$$

gdzie $v_n : J \to E$ jest całkowalną selekcją $\varphi_n(\cdot, u_n(\cdot))$. Udowodnimy, że rodzina $\{u_n\}$ jest względnie zwarta. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $t \in J$, orbita $\{u_n(t)\}$ jest zbiorem względnie zwartym bo jednakowa ciągłość rodziny $\{u_n\}$ jest oczywista:

$$\|u_n(t) - u_n(t')\| \leqslant \int_t^{t'} \|v_n(s)\|\, ds \leqslant |t - t'|.$$

Niech X będzie domkniętą przestrzenią liniową rozpiętą przez zbiór $\bigcup_{n\geqslant 1}[u_n(J) \cup v_n(J)]$. Ponieważ funkcje u_n, v_n są silnie mierzalne, to – bez zmniejszenia ogólności – można uważać, że X jest przestrzenią ośrodkową. Niech, dla $t \in J$,

$$\xi(t) := \beta_X(\{v_n(t)\}_{n\geqslant 1}), \quad \rho(t) := \beta_X(\{u_n(t)\}_{n\geqslant 1}).$$

Ponieważ rodzina $\{v_n\}$ jest całkowo ograniczona, to

$$\rho(t) = \beta_X\left(\left\{\left[\int_a^t v_n(s)\, ds\right]\right\}\right) \leqslant \int_a^t \xi(s)\, ds.$$

Pokażemy, że dla dowolnego $s \in J$,

$$\xi(s) \leqslant 2k(s)\rho(s).$$

Skoro $v_n(s) \in \varphi_n(s, u_n(s))$, to

$$v_n(s) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\, \varphi(\{s\} \times B(u_n(s), n^{-1}).$$

Weźmy dowolne $m \geqslant 1$ oraz niech $B := B(\{u_n(s)\}_{n\geqslant m}, m^{-1})$. Ponieważ $\beta \leqslant \beta_X \leqslant 2\beta$ (na zbiorach leżących w X), to mamy

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \beta(\{v_n(s)\}_{n\geqslant m}) \leqslant 2\beta(\{v_n(s)\}_{n\geqslant m}) \leqslant 2\beta(\varphi(\{s\} \times B)) \\ &\leqslant 2k(s)\beta(B) \leqslant 2k(s)(\beta(\{u_n(s)\}_{n\geqslant m}) + m^{-1}) = 2k(s)(\rho(s) + m^{-1}).\end{aligned}$$

Przechodząc z $m \to \infty$ otrzymamy żądaną nierówność. Zatem

$$\rho(t) \leqslant \int_a^t \xi(s)\, ds \leqslant 2\int_a^t k(s)\rho(s)\, ds.$$

Z nierówności Gronwalla otrzymujemy, że $\xi(t) = \rho(t) \equiv 0$. Tak więc orbity $\{u_n(t)\}$ oraz $\{v_n(t)\}$ są względnie zwarte co, wobec jednakowej ciągłości rodziny $\{u_n\}$ oraz całkowej ograniczoności rodziny $\{v_n\}$ implikuje, że (ewentualnie przechodząc do podciągów) $u_n \to u_0$ (w $C(J, E)$) oraz $v_n \rightharpoonup v_0$ słabo w $L^1_{loc}(J, E)$. Ponieważ $v_n(t) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{conv}\, \varphi(t, B(u_n(t), n^{-1}))$, to z twierdzenia o zbieżności, otrzymujemy, że $v_0 \in \varphi(t, u_0(t)$ p.w. na J. Tak więc $u_0 \in S(x_0)$ bo oczywiście $u_0(t) = x_0 + \int_a^t v_0(s)\, ds$. □

W szczególności otrzymaliśmy, że zbiór $S(x_0)$ jest niepusty, zwarty oraz

$$S(x_0) = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathrm{cl}\, S_n(x_0).$$

Pokażemy obecnie, że przekształcenie $S : J \times E \multimap C(J, E)$, które punktom $a \in J$ oraz $x \in E$ przyporządkowuje zbiór $S(a, x)$ rozwiązań inkluzji

$$\begin{cases} u' \in \varphi(t, u) \\ u(a) = x \end{cases}$$

jest półciągłe z góry.

W tym celu weźmy ciąg $(a_n, x_n, u_n) \in \operatorname{Gr} S$ taki, że $a_n \to a \in J$ oraz $x_n \to x \in E$. Wtedy, dla $t \in J$,

$$u_n(t) = x_n + \int_{a_n}^{t} v_n(s)\, ds$$

gdzie $v_n(s) \in \varphi(s, u_n(s))$ p.w. na J. Jest jasne, że rodzina $\{u_n\}$ jest jednakowo ciągła. Poza tym, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(t) = x_n + \int_a^t v_n(s)\, ds - \int_a^{a_n} v_n(s)\, ds := x_n + w_n(t) - z_n.$$

Zauważmy, że

$$\|z_n\| \leqslant \int_a^{a_n} \|v_n(s)\|\, ds \leqslant |a_n - a| \to 0.$$

Wystarczy wobec tego pokazać, że $w_n \to w_0$ (w przestrzeni $C(J, E)$), gdzie $w_0(t) = \int_a^t v_0(s)\, ds$ oraz v_0 jest całkowalną (lokalnie) selekcją $\varphi(\cdot, x + w_0(\cdot))$. Analogicznie jak poprzednio pokazujemy, że dla dowolnego $t \in J$, orbity $\{v_n(t)\}$ oraz $\{w_n(t)\}$ są względnie zwarte, co – wobec całkowej ograniczoności rodziny $\{v_n\}$ oraz jednakowej ciągłości rodziny $\{w_n\}$ – implikuje, że istotnie (po ewentualnym przejściu do podciągu) $w_n \to w_0$ oraz $v_n \rightharpoonup v_0$ w $L^1_{loc}(J, E)$. Zatem $u_n \to u_0 = x + w_0(\cdot)$ oraz, ano mocy twierdzenia o zbieżności, $v_0(t) \in \varphi(t, u_0(t))$ dla p.w. $t \in J$ oraz $w_0(t) = \int_a^t v_0(s)\, ds$, czyli $u_0(t) = x + \int_a^t v_0(s)\, ds$.

W następnym kroku pokażemy, że $S(x_0)$ jest zbiorem typu R_δ.