Teoria spektralna dla ergodyków

Mariusz Lemańczyk

6 stycznia 2011

Spis treści

Wstęp

Poniższy tekst jest pomyślany jako pewne minimum wiedzy z teorii reprezentacji unitarnych lokalnie zwartych grup abelowych potrzebne dla zrozumienia teorii spektralnej układów dynamicznych. Zaprezentowany materiał jest adresowany głównie do doktorantów i studentów starszych lat studiów matematycznych, specjalizujących się w teorii ergodycznej i teorii układów dynamicznych, pragnących prowadzić badania naukowe w tych dziedzinach. Tekst ma charakter podręcznika, w zasadzie wszystkie dowody dotyczące teorii spektralnej są bardzo szczegółowe, a uzupełniający materiał można znaleźć w dodatkach lub przypisach (często z dowodami lub szkicami dowodów, ale czasem, ze względu na stopień zaawansowania, po prostu z odesłaniem do odpowiedniego źródła). Ze względu na to, że opanowanie zaprezentowanego materiału ma służyć późniejszej pracy badawczej (głównie w teorii ergodycznej), nie unikałem w poniższym tekście pewnych powtórzeń, jak również prezentowania wielu narzędzi, które później, w zależności od kontekstu „dynamicznego”, pozwolą na liczenie niezmienników spektralnych układów dynamicznych.

Z drugiej strony w zaprezentowanym mteriale czytelnik nie znajdzie operatorowych miar spektralnych, skoncentrowałem się jedynie na teorii „skalarnych” miar spektralnych, która, zgodnie z moim doświadczeniem badawczym, jest wystarczająca w teorii spektralnej układów dynamicznych[1]. Z przyczyn czysto dydaktycznych materiał prezentowany jest w dwóch krokach. Najpierw szczegółowo zaprezentowano teorię spektralną operatorów unitarnych na ośrodkowych przestrzeniach Hilberta. W tej sytuacji miary spektralne są obiektami „żyjącymi” na konkretnej przestrzeni, mianowicie na okręgu. Stąd stopień abstrakcji wydaje się być akceptowalny dla stawiających pierwsze kroki w tej teorii. Następnie przedstawiono ogólną teorię reprezentacji unitarnych abelowych grup lokalnie zwartych, w której zasadniczą rolę odgrywają miary spektralne, które „żyją” w świecie znacznie bardziej abstrakcyjnym, a mianowicie na grupie dualnej (grupie charakterów).

Oprócz prezentacji głównych technik spektralnych, wiele uwagi poświęciłem teorii spektralnej operatorów[2] na symetrycznych przestrzeniach Focka.

[1]Czytelnik znający operatorowe miary spektralne bez trudu zauważy, że wzór $\langle E(A)x, x\rangle = \sigma_x(A)$, gdzie $E(\cdot)$ jest operatorową miarą spektralną operatora, σ_x zaś skalarną miarą spektralną, a $A \subset \mathbf{T}$ jest podzbiorem borelowskim okręgu, pozwala na przechodzenie z jednego języka do drugiego.

[2]Teoria przenosi się bez żadnych zmian i na potoki (podgrupy jednoparamterowe).

W kontekście dynamicznym jest to zrozumiałe – takie operatory są naturalnie związane z dwoma klasycznymi klasami układów dynamicznych: układami Gaussa i zawieszeniami Poissona. Ta sama motywacja spowodowała szczegółowe przedstawienie teorii spektralnej reprezentacji indukowanych – dla układów dynamicznych odpowiada to (na poziomie spektralnym) indukowaniu w sensie dynamicznym[3].

Czytelnik nie powinien odnieść jednak wrażenia, że zaprezentowany tekst stanowi całość teorii spektralnej. Tak nie jest nawet na poziomie pojęciowym. Wiele faktów czysto spektralnych pojawi się w dalszych częściach tekstu poświęconego teorii połączeń układów dynamicznych (i jej zastosowaniom). „Oderwanie" tych faktów od kontekstu dynamicznego wydało mi się niecelowe.

[3]Dla przykładu potoki specjalne pod funkcją stałą okazują się być ze spektralnego punktu widzenia reprezentacjami indukowanymi operatora unitarnego wyznaczonego przez podstawę potoku specjalnego.

1 Miary zespolone na przestrzeniach metrycznych

Poniższy rozdział ma charakter wstępu zbierającego najważniejsze wiadomości dotyczące miar borelowskich na przestrzeniach metrycznych ośrodkowych i zupełnych.

1.1 Miara zespolona i jej wahanie

Załóżmy, że $(X, \mathcal{B})$ jest przestrzenią mierzalną.

Definicja 1.1 *Miarą zespoloną* określoną na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{B})$ nazywamy dowolną funkcję $\mu : \mathcal{B} \to \mathbf{C}$ taką, że

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

dla dowolnej rodziny $\{A_i\} \subset \mathcal{B}$ zbiorów parami rozłącznych.

Zauważmy, że dla dowolnej permutacji $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\tau(i)}$, więc szereg w powyższej definicji musi być bezwzględnie zbieżny (tzn. zbieżny jest szereg $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|$). Ponadto, zauważmy, że $\mu(\emptyset) = 0$.

Załóżmy teraz, że chcemy znaleźć miarę dodatnią ρ (określoną na $\mathcal{B}$), która „majoryzuje" naszą miarę zespoloną, tzn. żądamy, aby zachodziła nierówność

$$|\mu(A)| \leqslant \rho(A) \text{ dla dowolnego } A \in \mathcal{B},$$

przy czym chodzi oczywiście o znalezienie „najmniejszego" ρ. Jeśli $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, gdzie $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ (oczywiście zakładamy, że wszystkie zbiory A_i należą do $\mathcal{B}$), to

$$\rho(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|,$$

więc idea definicji ρ jest oczywista.

Kładziemy

$$|\mu|(A) := \sup_{A=\bigcup A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, A_i \in \mathcal{B}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|$$

(uwaga: rozkłady zbioru A występujące pod supremum będziemy nazywali *rozbiciami mierzalnymi* zbioru A). Zauważmy, że $|\mu|(A) \geqslant |\mu(A)|$ (bierzemy rozbicie trywialne składające się z jednego atomu) oraz, że na ogół $|\mu|(A) > |\mu(A)|$ (np. gdy $\mu = \nu_1 + i\nu_2$, gdzie ν_1, ν_2 są miarami probabilistycznymi). Oczywiście, jeśli $|\mu|$ jest rzeczywiście miarą, to będzie ona szukaną przez nas miarą minimalną.

Definicja 1.2 Funkcję $|\mu| : \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ nazywamy *wahaniem* miary μ.

Twierdzenie 1.3 *Wahanie miary zespolonej jest miarą dodatnią na $\mathcal{B}$.*

Dowód.

Niech $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ będzie rozbiciem mierzalnym. Weźmy liczby rzeczywiste t_i takie, że

$$t_i < |\mu|(A_i).$$

Wówczas dla każdego i istnieje rozbicie mierzalne $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| > t_i.$$

Ale rodzina $\{A_{ij}\}_{i,j \geqslant 1}$ jest (przeliczalnym) rozbiciem mierzalnym zbioru A, a więc

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \leqslant |\mu|(A).$$

Biorąc po lewej stronie powyższych nierówności kres górny po t_i, otrzymamy nierówność

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(A_i) \leqslant |\mu|(A). \tag{1.1}$$

Aby dowieść nierówności przeciwnej, weźmy dowolne rozbicie mierzalne $\{B_j\}_{j \geqslant 1}$ zbioru A. Przy ustalonym j, rodzina $\{B_j \cap A_i\}_{i \geqslant 1}$ jest rozbiciem mierzalnym zbioru B_j, a dla ustalonego i rodzina $\{B_j \cap A_i\}_{j \geqslant 1}$ jest rozbiciem mierzalnym zbioru A_i. Zatem

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A_i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(B_j\cap A_i)| = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\mu(B_j\cap A_i)|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\mu|(A_i).$$

Otrzymaliśmy, że $|\mu|(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\mu|(A_i)$, co w połączeniu z (1.1) oznacza, że funkcja $|\mu|(\cdot)$ jest rzeczywiście przeliczalnie addytywna.

Zauważmy ponadto $|\mu|(\emptyset) = 0$, więc istotnie $|\mu|$ jest miarą (w tym momencie jeszcze nie wiemy, czy ta miara jest skończona!). □

Potrzebny nam jeszcze będzie następujący „techniczny" lemat.

Lemat 1.4 *Dla dowolnego $n \geqslant 1$ i dowolnych liczb zespolonych $z_1,\ldots,z_n$ istnieje podzbiór $S\subset\{1,\ldots,n\}$ taki, że*

$$|\sum_{j\in S} z_j| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

Dowód.

Połóżmy $\alpha = |z_1| + \ldots + |z_n|$. Podzielmy teraz płaszczyznę zespoloną na cztery naturalne ćwiartki prostymi $y = x$ i $y = -x$. Zauważmy, że to rozbicie płaszczyzny zespolonej ma następującą własność:

(A) w zależności od ćwiartki mamy
$\mathrm{Re}(z) \geqslant \frac{|z|}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{Im}(z) \geqslant \frac{|z|}{\sqrt{2}}$, $-\mathrm{Re}(z) \geqslant \frac{|z|}{\sqrt{2}}$ lub $-\mathrm{Im}(z) \geqslant \frac{|z|}{\sqrt{2}}$,

co oczywiście jest bezpośrednią konsekwencją wzoru $\sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2} = |z|$).

Dla którejś z ćwiartek, nazwijmy ją C, musimy mieć $\sum |z_j| \geqslant \frac{\alpha}{4}$, gdzie sumowanie odbywa się po tych z_j, które należą do C. Załóżmy dla uproszczenia, że jest to ćwiartka, dla której zachodzi pierwsza możliwość własności (A). Oznaczając $S := \{1 \leqslant j \leqslant n;\ z_j \in C\}$, otrzymujemy

$$|\sum_{j\in S} z_j| \geqslant \mathrm{Re}\sum_{j\in S} z_j = \sum_{j\in S}\mathrm{Re}(z_j) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S}|z_j| \geqslant \frac{\alpha}{4\sqrt{2}} \geqslant \frac{\alpha}{6}.$$

□

Twierdzenie 1.5 *Jeśli μ jest miarą zespoloną na $(X, \mathcal{B})$, to $|\mu|(X) < +\infty$.*

Dowód.
Wykażemy najpierw, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ oraz $|\mu|(A) = +\infty$, to istnieje rozbicie $A = B \cup C$, dla którego

$$|\mu(B)| > 1 \text{ oraz } |\mu|(C) = +\infty. \tag{1.2}$$

Istotnie, weźmy $t := 6(1 + |\mu(A)|)$. Z określenia funkcji $|\mu|$ wynika, że istnieje rozbicie mierzalne $\{A_i\}$ zbioru A takie, że $\sum_{i \geqslant 1} |\mu(A_i)| > t$. Dla n dostatecznie dużego mamy więc $\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| > t$. Stosując lemat 1.4 do liczb $z_i = \mu(A_i)$ (a więc otrzymując odpowiedni zbiór S) i biorąc $B = \bigcup_{j \in S} A_j$ otrzymujemy, że $B \subset A$ oraz

$$|\mu(B)| = \left| \mu(\bigcup_{j \in S} A_j) \right| = \left| \sum_{j \in S} z_j \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mu(A_i)|}{6} \geqslant \frac{t}{6} = 1 + |\mu(A)| (\geqslant 1).$$

Jeśli położymy $C = A \setminus B$, to

$$|\mu(C)| = |\mu(A) - \mu(B)| \geqslant |\mu(B)| - |\mu(A)| \geqslant \frac{t}{6} - |\mu(A)| = 1.$$

Ponieważ na mocy poprzedniego twierdzenia $|\mu|(A) = |\mu|(B) + |\mu|(C)$, więc albo $|\mu|(B) = +\infty$, albo $|\mu|(C) = +\infty$ i stąd (ewentualnie zamieniając B i C rolami) otrzymujemy (1.2).

Przypuśćmy teraz, że $|\mu|(X) = +\infty$. Połóżmy $C_0 = X$. Przypuśćmy, że $C_n \in \mathcal{B}$ (dla pewnego $n \geqslant 0$) jest takim zbiorem, że

$$|\mu|(C_n) = +\infty.$$

Stosując (1.2) do zbioru C_n otrzymujemy rozbicie $C_n = B_{n+1} \cup C_{n+1}$ takie, że

$$|\mu(B_{n+1})| > 1 \text{ oraz } |\mu|(C_{n+1}) = +\infty.$$

W ten sposób skonstruujemy ciąg (B_n) zbiorów parami rozłącznych, dla których $|\mu(B_n)| > 1$. Wówczas kładąc $B = \bigcup_{n \geqslant 1} B_n$ otrzymamy zbiór z $\mathcal{B}$, dla którego $\mu(B) = \sum_{n \geqslant 1} \mu(B_n)$, lecz wyraz ogólny szeregu nie zmierza do zera, co daje oczywistą sprzeczność. □

Uwaga 1.6 Jeśli $A \in \mathcal{B}$, to $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A) \leqslant |\mu|(X) < +\infty$. Zatem wartości przyjmowane przez miarę zespoloną są wspólnie ograniczone.

Ćwiczenie 1.7 Pokazać, że jeśli μ jest miarą zespoloną, dla której $|\mu|(X) = \mu(X)$, to $\mu \geqslant 0$.

Przypomnijmy podstawowe pojęcia związane z definicją miary. Mówimy, że miara μ jest *skupiona na zbiorze* $A \in \mathcal{B}$, gdy $\mu(B) = 0$ dla dowolnego $B \in \mathcal{B}$ rozłącznego z A. Mówimy, że miary μ, ρ określone na $(X, \mathcal{B})$ są wzajemnie *singularne* (*osobliwe*), gdy istnieją zbiory $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ takie, że μ jest skupiona na A_1, miara ρ zaś jest skupiona na A_2. Piszemy wówczas $\mu \perp \rho$. Mówimy, że miara μ jest *absolutnie ciągła* względem miary ρ (i piszemy $\mu \ll \rho$), gdy dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$

$$\rho(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Stwierdzenie 1.8 *Załóżmy, że $\mu, \rho, \rho_1, \rho_2$ są miarami zespolonymi na $\mathcal{B}$, przy czym miara μ jest dodatnia. Wówczas:*
(a) Jeśli ρ jest skupiona na zbiorze A, to $|\rho|$ jest również skupiona na zbiorze A.
(b) $\rho \ll |\rho|$.
(c) $\rho_1 \perp \rho_2 \Rightarrow |\rho_1| \perp |\rho_2|$.
(d) $\rho_1 \perp \mu, \rho_2 \perp \mu \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 \perp \mu$.
(e) $\rho_1 \ll \mu, \rho_2 \ll \mu \Rightarrow \rho_1 + \rho_2 \ll \mu$.
(f) $\rho \ll \mu \Rightarrow |\rho| \ll \mu$.
(g) $\rho_1 \ll \mu, \rho_2 \perp \mu \Rightarrow \rho_1 \perp \rho_2$.
(h) $\rho \ll \mu, \rho \perp \mu \Rightarrow \rho = 0$.

Dowód.
(a) Niech $B \cap A = \emptyset$, $B \in \mathcal{B}$. Weźmy dowolne rozbicie mierzalne $B = \bigcup_{j \geqslant 1} B_j$. Wówczas $\rho(B_j) = 0$ (bo $B_j \cap A = \emptyset$), skąd $|\rho(B_j)| = 0$ dla dowolnego $j \geqslant 1$, a więc $|\rho|(B) = 0$.
(b) Załóżmy, że $|\rho|(A) = 0$. Biorąc rozbicie trywialne (jednoelementowe) otrzymujemy natychmiast, że $|\rho(A)| = 0$.
(c) Wynika bezpośrednio z a).
(d) Niech ρ_i będzie skupiona na zbiorze A_i $(i = 1, 2)$, μ zaś odpowiednio na B_i tak, aby $A_i \cap B_i = \emptyset$. Wówczas $\rho_1 + \rho_2$ jest skupiona na zbiorze $A_1 \cup A_2$, miara μ zaś na zbiorze $B_1 \cap B_2$.

(e) Ta własność jest oczywista.
(f) Załóżmy, że $\mu(A) = 0$ i niech $A = \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$ będzie rozbiciem mierzalnym. Zatem dla dowolnego $j \geqslant 1$, $\mu(A_j) = 0$ (bo $A_j \subset A$, a μ jest miarą dodatnią). Ale

$$\mu(A_j) = 0 \Rightarrow \rho(A_j) = 0 \Rightarrow |\rho(A_j)| = 0 \Rightarrow \sum_{j\geqslant 1} |\rho(A_j)| = 0 \Rightarrow |\rho|(A) = 0.$$

(g) Załóżmy, że miara ρ_2 jest skupiona na zbiorze A oraz $\mu(A) = 0$. Zatem $\rho_1(A) = 0$ i co więcej $\rho_1(A_1) = 0$ dla dowolnego $A_1 \subset A, A_1 \in \mathcal{B}$, bo $\mu(A_1) = 0$. Zatem ρ_1 jest skupiona na A^c.
(h) Wystarczy zauważyć, że założenia oraz (g) implikują $\rho \perp \rho$. □

Twierdzenie 1.9 *Jeśli μ jest miarą zespoloną na $(X, \mathcal{B})$, to istnieje funkcja mierzalna $h : X \to \mathbf{C}$ taka, że $|h(\cdot)| = 1$ ($|\mu|$-p.w.) oraz*

$$d\mu = h\, d|\mu|.$$

Dowód.
Ponieważ $\mu \ll |\mu|$, więc bezpośrednio z twierdzenia Radona-Nikodyma wynika, że $d\mu = h\, d|\mu|$ dla pewnej funkcji $h \in L^1(|\mu|)$.

Niech $A_r = \{x \in X;\ |h(x)| < r\}$, $r > 0$. Weźmy dowolne rozbicie mierzalne $\{B_j\}_{j\geqslant 1}$ zbioru A_r. Wówczas

$$\sum_{j\geqslant 1} |\mu(B_j)| = \sum_{j\geqslant 1} \left| \int_{B_j} h\, d|\mu| \right| \leqslant \sum_{j\geqslant 1} r|\mu|(B_j) = r|\mu|(A_r).$$

Zatem $|\mu|(A_r) \leqslant r|\mu|(A_r)$ i jeśli $r < 1$, to $|\mu|(A_r) = 0$. Wobec tego $|h| \geqslant 1$ p.w. względem miary $|\mu|$. Z drugiej strony, jeśli $A \in \mathcal{B}$ oraz $|\mu|(A) > 0$, to

$$\left| \frac{1}{|\mu|(A)} \int_A h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(A)|}{|\mu|(A)} \leqslant 1,$$

skąd $|\int_A h\, d|\mu|| \leqslant |\mu|(A)$. Z dowolności A w tym rozumowaniu wynika więc, że $|h| \leqslant 1$ p.w. względem $|\mu|$ (w przeciwnym przypadku znajdziemy $z_0 \in \mathbf{C}$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że $|\mu|(\{x \in X;\ |h(x) - z_0| < \varepsilon\}) > 0$ oraz $|z_0| - \varepsilon > 1$) i dlatego $|h| = 1$ p.w. względem miary $|\mu|$. □

1.2 Regularność miary

Przejdziemy teraz do krótkiego omówienia zagadnienia regularności miar borelowskich. Załóżmy najpierw, że X jest przestrzenią metryczną i niech $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ oznacza σ-algebrę zbiorów borelowskich. Niech μ będzie zespoloną miarą borelowską na X. Zauważmy, że rodzina zbiorów $A \in \mathcal{B}$ spełniających warunek

$$(R1) \qquad |\mu|(A) = \sup_{A \supset F\text{-domknięty}} |\mu|(F) = \inf_{A \subset U-otwarty} |\mu|(U)$$

jest σ-algebrą zbiorów[4]. Ponieważ dowolny zbiór domknięty F jest zbiorem typu G_δ ($F = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : d(x,F) < \frac{1}{n}\}$), σ-algebra ta jest dokładnie równa $\mathcal{B}$.

Interesować nas będzie jednak sytuacja, gdy X jest przestrzenia topologiczną, a zespolona miara borelowska μ spełnia (mocniejszy) warunek *regularności*:

$$(R) \qquad |\mu|(A) = \sup_{A \supset K-zwarty} |\mu|(K) = \inf_{A \subset U-otwarty} |\mu|(U)$$

dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$ (zauważmy, że rodzina zbiorów $A \in \mathcal{B}$ spełniających warunek (R) jest σ-algebrą).

Załóżmy teraz dodatkowo, że X jest lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Oznaczmy przez $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ σ-algebrę podzbiorów borelowskich. Przez $M(X)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich miar zespolonych μ na $(X, \mathcal{B})$, które są dodatkowo regularne (zauważmy, że $M(X)$ ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbf{C}$).

Oznaczmy przez $M^+(X) \subset M(X)$ podzbiór składający się z miar nieujemnych (tzn. przyjmujących wartości nieujemne). Elementy przestrzeni $M^+(X)$ są miarami skończonymi, tzn. $\mu(X) < +\infty$ dla $\mu \in M^+(X)$. Ponadto, niech $M_1^+(X) \subset M^+$ oznacza podzbiór miar probabilistycznych.

Przypomnijmy, że $C_0(X)$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji ciągłych na X znikających w nieskończoności (dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subset X$ taki, że $|f(x)| < \varepsilon$ dla $x \in X \setminus K$), zaś $C_c(X)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $C_0(X)$ składającą się z funkcji o zwartych nośnikach.

[4] Dla przykładu, jeśli $F_n \subset A_n$ oraz $|\mu|(A_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$, to dla dostatecznie dużego $N \geqslant 1$ zbiór $\bigcup_{n=1}^{N} F_n$ będzie domknięty oraz $|\mu|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \varepsilon$.

Zachodzi następujące twierdzenie Riesza: *Dla każdego funkcjonału liniowego i ciągłego $J : C_0(X) \to \mathbf{C}$ istnieje dokładnie jedna miara $\mu \in M(X)$ taka, że $J(f) = \int_X f\, d\mu$. Ponadto $|\mu| = \|J\|$.*

Wynika stąd w szczególności, że przestrzeń $M(X)$ jest przestrzenią Banacha z normą $|\mu|$.

Zwróćmy ponadto uwagę, że całkowanie względem nieregularnej miary zespolonej można sprowadzić do całkowania względem miary regularnej.

Jeśli więc wiemy dodatkowo, że w X każdy zbiór zwarty jest zbiorem typu G_δ oraz σ-algebra generowana przez zbiory zwarte pokrywa się z $\mathcal{B}(X)$, to każda miara zespolona μ jest automatycznie regularna. Warunek ten zachodzi w każdej lokalnie zwartej, ośrodkowej przestrzeni metrycznej (a więc i w każdej metrycznej przestrzeni zwartej).

Uwaga 1.10 Jeśli X jest przestrzenią Banacha o nieskończonym wymiarze, to każdy zbiór zwarty ma puste wnętrze (bo domknięcia kul nie są zbiorami zwartymi). Ponieważ rodzina zbiorów pierwszej kategorii i ich dopełnień jest σ-algebrą (nazywa się ją σ-algebrą zbiorów *bairowskich*), więc w przestrzeniach metrycznych ośrodkowych i zupełnych nie zawsze $\mathcal{B}(X)$ jest generowana przez zbiory zwarte.

Innym przykładem naturalnej przestrzeni, która nie jest lokalnie zwarta i na której będziemy rozpatrywali różne miary jest przestrzeń $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$. Okazuje się jednak, że z punktu widzenia teorii miary są to ciągle „dobre" przestrzenie ze względu na następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.11 *Niech X będzie przestrzenią metryczną, ośrodkową i zupełną*[5]*. Niech μ będzie zespoloną miarą borelowską na X. Wówczas μ jest regularna.*

Dowód.

Bez straty ogólności możemy zakładać, że metryka d jest ograniczona przez 1. Niech $\mathbf{N}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{N}^n$ oznacza zbiór wszystkich słów s nad $\mathbf{N}$ od długości $|s|$ skończonej. Istnieje rodzina $\{F_s;\ s \in \mathbf{N}^*\}$ zbiorów domkniętych spełniająca następujące warunki:
(a) $F_\emptyset = X$,

[5] Ze względu na osiągnięcia matematyków polskich w tej dziedzinie, a w szczególności osiągnięcia K. Kuratowskiego, przyjęło się nazywać takie przestrzenie *przestrzeniami polskimi*.

(b) $F_s = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_{sn}$,
(c) $diam(F_s) < \frac{1}{2^{|s|}}$.
Istotnie, załóżmy, że F_s został już wybrany. Ponieważ X spełnia drugi aksjomat przeliczalności, więc istnieje ciąg $(U_n)_{n \geqslant 1}$ zbiorów otwartych o średnicach mniejszych niż $2^{-|s|}$, pokrywających zbiór F_s oraz spełniających warunek $F_s \cap U_n \neq \emptyset$ dla $n \geqslant 1$. Wystarczy teraz położyć $F_{sn} := \overline{F_s \cap U_n}$.

Krok 1. Pokażemy, że X spełnia warunek (R). Ustalmy $\varepsilon > 0$. Będziemy teraz indukcyjnie wybierać ciąg liczb naturalnych $n_0 < n_1 < \ldots$ tak, aby zachodziła następująca własność: Dla dowolnego $k \geqslant 1$, dla dowolnego słowa $s = (m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^*$, dla którego $m_i \leqslant n_i$, $i = 0, \ldots, k-1$, mamy

$$|\mu| \left(F_s \setminus \bigcup_{j \leqslant n_k} F_{sj} \right) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1} \cdot n_0 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}}. \tag{1.3}$$

Rzeczywiście, jeśli $n_0 < \ldots < n_{k-1}$ są już wybrane, to liczba po prawej stronie nierówności (1.3) jest określona i wystarczy skorzystać z (b)(i z faktu, że rozpatrujemy ustalona z góry liczbę słów s), aby wybrać liczbę n_k.

Połóżmy

$$K = \bigcap_{k \geqslant 1} \bigcup_{\substack{s = (m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^k, \\ m_i \leqslant n_i, i = 0, \ldots, k-1}} F_s.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $k \geqslant 1$ mamy

$$K \subset \bigcup_{\substack{s = (m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^k, \\ m_i \leqslant n_i, i = 0, \ldots, k-1}} F_s,$$

przy czym większy zbiór, ze względu na warunek (c), jest domknięty i posiada skończoną $1/2^k$-sieć. Wynika stąd, że K jest zbiorem domkniętym i całkowicie ograniczonym, a więc zwartym.

Z nierówności (1.3) wynika, że

$$|\mu|(\bigcup_{\substack{s = (m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^k, \\ m_i \leqslant n_i, i = 0, \ldots, k-1}} F_s \setminus \bigcup_{\substack{s = (m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^k, \\ m_i \leqslant n_i, i = 0, \ldots, k-1}} \bigcup_{j \leqslant n_k} F_{sj}) \leqslant$$

$$\sum_{\substack{s = (m_0, \ldots, m_{k-1}) \in \mathbf{N}^k, \\ m_i \leqslant n_i, i = 0, \ldots, k-1}} |\mu| \left(F_s \setminus \bigcup_{j \leqslant n_k} F_{sj} \right) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

a zatem

$$|\mu|(X \setminus \bigcup_{\substack{s=(m_0,\ldots,m_{k-1})\in \mathbf{N}^k,\\ m_i \leqslant n_i, i=0,\ldots,k-1}} \bigcup_{j\leqslant n_k} F_{sj}) \leqslant$$

$$|\mu|(X \setminus \bigcup_{j_0\leqslant n_0} F_{j_0}) + |\mu|(\bigcup_{j_0\leqslant n_0} F_{j_0} \setminus \bigcup_{j_0\leqslant n_0, j_1\leqslant n_1} F_{j_0 j_1}) + \ldots +$$

$$|\mu|(\bigcup_{\substack{s=(m_0,\ldots,m_{k-1})\in \mathbf{N}^k,\\ m_i \leqslant n_i, i=0,\ldots,k-1}} F_s \setminus \bigcup_{\substack{s=(m_0,\ldots,m_{k-1})\in \mathbf{N}^k,\\ m_i \leqslant n_i, i=0,\ldots,k-1}} \bigcup_{j\leqslant n_k} F_{sj}) < \varepsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że $|\mu|(K) > 1 - \varepsilon$.

Krok 2. Weźmy teraz dowolny zbiór $A \in \mathcal{B}$. Ponieważ X jest przestrzenią metryczną, więc istnieje zbiór domknięty $F \subset A$ taki, że $|\mu|(A \setminus F) < \varepsilon/2$. Ponieważ F z metryką indukowaną jest przestrzenią polską, więc wystarczy zastosować krok 1. do $(F, d|_F, \mu|_F)$. □

Uwaga 1.12 Drugą częśc dowodu twierdzenia 1.11 można poprowadzić inaczej, opierając się na następującym twierdzeniu: *Jeśli (X,d) jest przestrzenią polską oraz $B \in \mathcal{B}(X)$, to istnieje topologia τ silniejsza niż topologia zadana przez metrykę d taka, że $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}_\tau(X)$ i w której B jest zbiorem domkniętym (w istocie, domknięto-otwartym).*

Przypomnijmy ponadto, że dla dowolnej miary $\mu \in M(X)$ zachodzi **twierdzenie Jordana o rozkładzie**: $\mu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$, *gdzie wszystkie miary ν_j są miarami nieujemnymi ($\nu_j \in M^+(X)$), a ponadto $\nu_1 \perp \nu_2$ oraz $\nu_3 \perp \nu_4$.*

Niech $\mu \in M(X)$ i niech $\sigma \in M^+(X)$. Zachodzi następujące **twierdzenie Lebesgue'a o rozkładzie**: *Istnieje jednoznaczny rozkład $\mu = \mu_a + \mu_s$, w którym $\mu_a, \mu_s \in M(X)$ oraz $\mu_a \ll \sigma$, $\mu_s \perp \sigma$.*

W zasadzie wszystkie przestrzenie lokalnie zwarte, które pojawią się w naszym opracowaniu, będą spełniały drugi warunek przeliczalności (tzn. będą posiadały przeliczalne bazy zbiorów otwartych). Przypomnijmy najważniejsze własności takich przestrzeni.

Twierdzenie 1.13 *Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą spełniającą drugi aksjomat przeliczalności. Wówczas:*

(i) X jest ośrodkowa;
(ii) X jest σ-zwarta;
(iii) X jest metryzowalna;
(iv) $C_0(X)$ jest ośrodkowa;
(v) $C_c(X)$ jest gęsta w $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ dla dowolnej miary $\mu \in M^+(X)$.

Dowód.
(szkice) (i) jest własnością oczywistą.

(ii) Rozważmy pokrycie otwarte $\{V_x;\, x \in X\}$ przestrzeni X, gdzie $x \in V_x$ oraz V_x jest relatywnie zwarty. Wystarczy pokazać, że pokrycie to zawiera podpokrycie przeliczalne. Niech $\{U_i\}_{i \geqslant 1}$ będzie bazą przeliczalną zbiorów otwartych w X. Połóżmy

$$M = \{i \geqslant 1;\ (\exists x \in X)\ \ U_i \subset V_x\}.$$

Następnie wybierzmy $M \ni i \mapsto x_i$ tak, aby $U_i \subset V_{x_i}$. Łatwo teraz pokazujemy, że $X = \bigcup_{i \in M} V_{x_i}$.

(iii) Ponieważ X jest lokalnie zwarta, więc posiada jednopunktowe uzwarcenie Aleksandrowa $X \subset \widetilde{X}$ (gdzie $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$, a otoczeniami nieskończoności sa dopełnienia zbiorów zwartych w X). Wystarczy pokazać, że $\widetilde{X}$ jest przestrzenią metryzowalną.

Istnieje rodzina $\{W_i\}_{i \geqslant 1}$ zbiorów otwartych, relatywnie zwartych i takich, że $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, $\overline{W}_i \subset W_{i+1}$ dla $i \geqslant 1$. Wynika stąd, że jeśli $K \subset X$ jest zbiorem zwartym, to $K \subset W_j$ dla pewnego $j \geqslant 1$ (rzeczywiście $K \subset \bigcup_{i \geqslant 1} W_i$). Stąd wnioskujemy, że baza zbiorów otwartych w $\widetilde{X}$ jest sumą mnogościową bazy zbiorów otwartych w X i rodziny $\{X \setminus \overline{W}_i;\ i \geqslant 1\}$. Wynika stąd, że przestrzeń $\widetilde{X}$ ma bazę zbiorów przeliczalnych a zatem jest metryzowalna.

(iv) Ponieważ $C_c(X)$ jest gęsta w $C_0(X)$, więc wystarczy pokazać, że $C_c(X)$ jest ośrodkowa, co łatwo dedukujemy z faktów, że $C(\overline{W}_i)$ są ośrodkowe.

(v) Ponadto dla każdej miary $\mu \in M(X)$ podprzestrzeń $C_c(X)$ jest gęsta w $L^1(X, |\mu|)$ (istotnie, dla funkcji $f \in L^1(X, \mu)$ wystarczy rozpatrywać miarę skończoną $|f|\, d\mu$, która jest regularna; przybliżyć więc w normie L^1 funkcję f przez borelowską funkcję o zwartym nośniku, a następnie skorzystać z twierdzenia Łuzina w wersji, że funkcja borelowska na przestrzeni zwartej jest równa funkcji ciągłej z dokładnością do zbioru o dowolnie małej mierze). $\square$

1.3 Miary na okręgu. Transformata Fouriera

Przypomnijmy teraz króciutko pojęcie transformaty Fouriera miary zespolonej (borelowskiej) na $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$.

Niech $\mu \in M(\mathbf{T})$, tzn. μ jest zespoloną miarą borelowską na $\mathbf{T}$. Dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ liczbę

$$\hat{\mu}[n] = \int_{\mathbf{T}} z^{-n}\, d\mu(z)$$

nazywamy n-tym *współczynnikiem Fouriera* (lub Fouriera-Stjeltjesa) miary μ.

Twierdzenie 1.14 *Jeśli transformata Fouriera $\hat{\mu}$ miary μ jest ciągiem zerowym, to $\mu = 0$.*

Dowód.

Dla dowolnej funkcji $h \in C(\mathbf{T})$ definiujemy jej splot z miarą μ (otrzymując pewną funkcję na $\mathbf{T}$) wzorem

$$(\mu * h)(z) = \int_{\mathbf{T}} h(z\overline{w})\, d\mu(w), \quad z \in \mathbf{T}.$$

Zauważmy, że

$$(\mu * h)(1) = \int_{\mathbf{T}} h(\overline{w})\, d\mu(w). \tag{1.4}$$

Ponadto dla $z_1, z_2 \in \mathbf{T}$,

$$|(\mu * h)(z_1) - (\mu * h)(z_2)| \leqslant \int_{\mathbf{T}} |h(z_1\overline{w}) - h(z_2\overline{w})|\, d\mu(w),$$

a skoro funkcja h jest w istocie jednostajnie ciągła, więc

$$\mu * h \in C(\mathbf{T}). \tag{1.5}$$

Możemy zatem liczyć („zwykłe") współczynniki Fouriera funkcji $\mu * h$. Dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ mamy (korzystając z twierdzenia Fubiniego i podstawiając $v = zw^{-1}$ dla miary Lebesgue'a dz)

$$(\mu * h)\hat{}\,[n] = \int_{\mathbf{T}} (\mu * h)(z) z^{-n}\, dz =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\mathbf{T}} z^{-n} h(z\overline{w})\, d\mu(w) \right) dz = \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\mathbf{T}} h(z\overline{w}) z^{-n} dz \right) d\mu(w) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} w^{-n} \left(\int_{\mathbf{T}} h(v) v^{-n} \, dv \right) d\mu(w) = \hat{h}[n] \hat{\mu}[n] = 0.$$

Zatem transformata Fouriera funkcji ciągłej $\mu * h$ znika, a więc funkcja ta jest tożsamościowo równa zeru. Teza naszego twierdzenia wynika teraz z (1.4) oraz twierdzenia Riesza. □

Ćwiczenie 1.15 Pokazać, że jeśli $\mu \in M(\mathbf{T})$ jest miarą zespoloną oraz $\int |P|^2 \, d\mu = 0$ dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego P, to $\mu = 0$.
Wskazówka Forma $(f, g) \mapsto \int f \cdot \overline{g} \, d\mu$ jest półtoraliniowa, a więc, ze wzoru polaryzacyjnego, jest ona całkowicie wyznaczona przez stowarzyszoną formę kwadratową.

Omówimy teraz zagadnienie splatania miar. Załóżmy, że μ oraz ν są elementami z $M(\mathbf{T})$. Niech $s : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ będzie określone wzorem $s(z, w) = zw$. Miarę $\mu * \nu$ (określoną na $\mathbf{T}$) będącą obrazem miary produktowej $\mu \otimes \nu$ (określonej na $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$) poprzez odwzorowanie s nazywamy *splotem* miar μ i ν. Zatem dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbf{T}$ mamy

$$\mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu(s^{-1}(A)).$$

Wynika stąd, że

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbf{T}} \chi_A \, d\mu * \nu = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \chi_A \circ s \, d\mu \otimes \nu =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \chi_A(zw) \, d\mu(z) \, d\nu(w) = \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\mathbf{T}} \chi_A(zw) \, d\mu(z) \right) d\nu(w) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\mathbf{T}} \chi_{w^{-1}A}(z) \, d\mu(z) \right) d\nu(w) = \int_{\mathbf{T}} \mu(w^{-1}A) \, d\nu(w).$$

Ponadto

$$\int_{\mathbf{T}} z^{-n} \, d\mu * \nu(z) = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} (wz)^{-n} \, d\mu(z) \, d\nu(w) = \int_{\mathbf{T}} z^{-n} \, d\mu(z) \int_{\mathbf{T}} w^{-n} \, d\nu(w).$$

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby całkowitej n

$$(\mu * \nu)\widehat{\ }[n] = \widehat{\mu}[n] \cdot \widehat{\nu}[n]. \tag{1.6}$$

Niech $z_0 \in \mathbf{T}$. Przez δ_{z_0} oznaczamy miarę Diraca skupioną w punkcie z_0. Oczywiście $\hat{\delta}_{z_0}[n] = z_0^{-n}$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$. Zatem korzystając z (1.6) otrzymujemy

$$(\mu * \delta_{z_0})\hat{}\,[n] = z_0^{-n} \cdot \widehat{\mu}[n] \tag{1.7}$$

dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$.

Przypomnijmy, że skończona miara dodatnia może mieć co najwyżej przeliczalnie wiele atomów (zbiór atomów o mierze co najmniej δ ($\delta > 0$) jest skończony). Zachodzi następujący ważny lemat.

Lemat 1.16 (Wiener) *Niech σ będzie skończoną miarą dodatnią na $\mathbf{T}$. Oznaczmy przez $\{z_1, \ldots, z_m, \ldots\}$ zbiór wszystkich atomów miary σ. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(\{z_m\})^2.$$

Dowód.
Mamy

$$|\hat{\sigma}[k]|^2 = \int_{\mathbf{T}} w_1^{-k}\, d\sigma(w_1) \overline{\int_T w_2^{-k}\, d\sigma(w_2)} = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} (\overline{w}_1 w_2)^k\, d\sigma(w_1)\, d\sigma(w_2).$$

Stąd

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} F_n(w_1, w_2)\, d(\sigma \otimes \sigma)(w_1, w_2),$$

gdzie $F_n(w_1, w_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{w}_1 w_2)^k$. Funkcje F_n spełniają nierówność $|F_n| \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, a ponadto

$$F_n(w_1, w_2) = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{(\overline{w}_1 w_2)^n - 1}{\overline{w}_1 w_2 - 1} & \text{jeśli} \quad w_1 \neq w_2 \\ 1 & \text{jeśli} \quad w_1 = w_2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} F_n(w_1, w_2) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad w_1 \neq w_2 \\ 1 & \text{jeśli} \quad w_1 = w_2. \end{cases}$$

Innymi słowy, $F_n \to \chi_\Delta$ $\sigma \otimes \sigma$-p.w., gdzie $\Delta = \{(w, w);\ w \in \mathbf{T}\}$.

Z twierdzenia Lebesgue'a oraz (1.8) wynika więc, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} F_n(w_1, w_2)\, d(\sigma \otimes \sigma)(w_1, w_2) = \int_{\Delta} d(\sigma \otimes \sigma)(w_1, w_2).$$

Zauważmy, że

$$\sigma \otimes \sigma(\{(\omega, \omega')\}) = \sigma(\{\omega\})\sigma(\{\omega'\}).$$

Zatem jedynymi atomami miary $\sigma \otimes \sigma$ należącymi do Δ są atomy postaci (z_m, z_m), $m \geqslant 1$, a ponadto (stosując twierdzenie Fubiniego) $\sigma \otimes \sigma(\Delta \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty}\{(z_m, z_m)\}) = 0$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma \otimes \sigma)(\{(z_m, z_m)\}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(\{z_m\})^2.$$

□

Bezpośrednio z lematu Wienera wynika, że

$$(1.9) \qquad \sigma \in M^+(\mathbf{T}) \text{ jest miarą ciągłą } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{\sigma}[k]|^2 = 0.$$

Będzie nam potrzebne następujące

Ćwiczenie 1.17 Niech $(c_n) \subset \mathbf{C}$ będzie ciągiem ograniczonym liczb zespolonych. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = 0 \Leftrightarrow (\exists N_0 \subset \mathbf{N}, d(N_0) = 0) \quad \lim_{n\to\infty, n\notin N_0} c_n = 0,$$

gdzie *gęstość* $d(N_0)$ jest definiowana jako $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp\, (N_0 \cap [1, n])$. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| = 0.$$

$\Rightarrow$. (Nie wymaga założenia ograniczoności ciągu (c_n).) Dla $A \subset \mathbf{N}$ oznaczmy $M(A, n) = \sharp\, (\{0, 1, \ldots, n-1\} \cap A)$. Niech

$$K_k = \{n \in \mathbf{N};\ |c_n|^2 \geqslant \frac{1}{k}\},\ k > 0.$$

Mamy $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ Zauważmy, że gęstość zbioru K_k wynosi zero. Rzeczywiście, patrząc na elementy $\geqslant 1/k$, otrzymujemy, że

$$\sum_{l=0}^{n-1} |c_l|^2 \geqslant \frac{1}{k} M(K_k, n),$$

a więc

$$k \cdot \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}|c_l|^2 \geqslant \frac{1}{n}M(K_k, n)$$

i przechodzimy z n do nieskończoności.

Stąd wynika, że istnieje ciąg

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots$$

taki, że dla $n \geqslant l_k$

$$\frac{1}{n}M(K_{k+1}, n) \leqslant \frac{1}{k+1}, \quad k \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Kładziemy $N_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_{k+1} \cap [l_k, l_{k+1})$. Pokażemy, że gęstość zbioru N_0 również wynosi zero. Weźmy $l_k \leqslant n < l_{k+1}$. Wówczas

$$N_0 \cap [0, n) = (N_0 \cap [0, l_k)) \cup (N_0 \cap [l_k, n)) \subset$$

$$\subset (K_k \cap [0, l_k)) \cup (K_{k+1} \cap [0, n)) \subset K_{k+1} \cap [0, n),$$

gdyż, z definicji zbioru N_0, tylko te liczby ze zbioru N_0, które są jednocześnie w zbiorze K_k mogą należeć do przedziału $[0, l_k)$ (oraz $K_1 \subset K_2 \subset \dots$). Zatem

$$\frac{1}{n}M(N_0, n) \leqslant \frac{1}{n}M(K_{k+1}, n) \leqslant \frac{1}{k+1}$$

(ostatnia nierówność wynika z (1.10)) i stąd $\frac{1}{n}M(N_0, n) \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Jeśli teraz $l_k \leqslant n < l_{k+1}$ oraz $n \notin N_0$, to $n \notin K_{k+1}$, a więc $|c_n|^2 \leqslant \frac{1}{k+1}$, i stąd $\lim c_n = 0$, gdy $n \notin N_0$, $n \to \infty$.

$\Leftarrow$. Załóżmy teraz, że $|c_n|^2 \leqslant L$ dla $n \geqslant 1$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Istnieje $\overline{n} > 0$ takie, że dla $n > \overline{n}$

$$n \notin N_0 \Rightarrow |c_n|^2 < \varepsilon \ \text{ oraz } \ \frac{1}{n}M(N_0, n) < \varepsilon.$$

Wówczas dla $n > \overline{n}$ mamy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i \in N_0 \cap \{0,1,\dots,n-1\}} |c_i|^2 + \sum_{i \in N_0^c \cap \{0,1,\dots,n-1\}} |c_i|^2\right) <$$

$$< \frac{L}{n}M(N_0, n) + \varepsilon < (L+1)\varepsilon.$$

Wreszcie zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty, n\notin N_0} |c_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty, n\notin N_0} |c_n|^2 = 0.$$

Wniosek 1.18 *Załóżmy, że $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$. Wówczas σ jest miarą ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $N_0 \subset \mathbf{N}$ taki, że $d(N_0) = 0$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty, n\notin N_0} \hat{\sigma}[k] = 0.$$

Ćwiczenie 1.19 (i) Pokazać, że jeśli σ_1 oraz σ_2 są skończonymi miarami dodatnimi na okręgu oraz miara σ_1 jest ciągła, to miara $\sigma_1 * \sigma_2$ jest również ciągła.

(ii) Pokazać, że jeśli $\sigma_1 \ll \nu_1$ oraz $\sigma_2 \ll \nu_2$ są skończonymi miarami dodatnimi na okręgu, to $\sigma_1 * \sigma_2 \ll \nu_1 * \nu_2$.

(iii) Pokazać, że jeśli $\sigma_1 \ll \lambda_{\mathbf{T}}$ oraz $\sigma_2 \in M^+(\mathbf{T})$, to $\sigma_1 * \sigma_2 \ll \lambda_{\mathbf{T}}$.

2 Teoria spektralna operatorów unitarnych w ośrodkowych przestrzeniach Hilberta

Przystępujemy teraz do szczegółowego przedstawienia teorii spektralnej operatorów unitarnych na ośrodkowych [przestrzeniach Hilberta, w szczególności, do pełnej klasyfikacji takich operatorów.

2.1 Twierdzenie Herglotza i lemat Wienera

Definicja 2.1 Ciąg $(r_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ liczb zespolonych nazywamy *dodatnio określonym*, gdy

$$\sum_{n,m=0}^{N} r_{n-m}a_n\overline{a}_m \geqslant 0$$

dla dowolnego $(a_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathbf{C}$ oraz $N \geqslant 0$.

Jeśli położymy $a_0 = 1$ oraz $a_i = 0$ dla $i \geqslant 1$, to natychmiast otrzymujemy, że $r_0 \geqslant 0$. Zauważmy ponadto, że ciąg zerowy jest ciągiem dodatnio określonym oraz, że przemnożenie ciągu dodatnio określonego przez stałą dodatnią prowadzi do otrzymania nowego ciągu dodatnio określonego. Ponadto suma dwóch ciągów dodatnio określonych pozostaje ciągiem dodatnio określonym.

Przykład 2.2 Niech $U : H \to H$ będzie operatorem unitarnym określonym na pewnej przestrzeni Hilberta H i niech $x \in H$. Połóżmy $r_n := \langle U^n x, x\rangle$, $n \in \mathbf{Z}$. Wówczas

$$\sum_{n,m=0}^{N} r_{n-m}a_n\overline{a}_m = \sum_{n,m=0}^{N} \langle U^{n-m}x, x\rangle a_n\overline{a}_m = \sum_{n,m=0}^{N} \langle U^n x, U^m x\rangle a_n\overline{a}_m =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{N} \langle a_n U^n x, a_m U^m x\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{N} a_n U^n x, \sum_{m=0}^{N} a_m U^m x \right\rangle = \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n U^n x \right\|^2 \geqslant 0.$$

Z poniższego twierdzenia będzie wynikało, że każdy ciąg dodatnio określony może być otrzymany jak w powyższym przykładzie.

Twierdzenie 2.3 (twierdzenie Herglotza) *Niech (r_n) będzie ciągiem dodatnio określonym. Wówczas istnieje jedyna nieujemna, skończona miara borelowska μ na $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$ taka, że*

$$r_n = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\mu(z) \quad \textit{dla dowolnego } n \in \mathbf{Z}. \tag{2.1}$$

Ponadto, jeśli μ jest nieujemną, skończoną miarą borelowską na $\mathbf{T}$, to wzór (2.1) definiuje pewien ciąg dodatnio określony.

Dowód.

Pokażemy najpierw, że ciąg (r_n) jest ograniczonym ciągiem liczb zespolonych. W tym celu zauważmy, że

$$(*) \quad (1+|\lambda|^2)r_0 + r_n\lambda + r_{-n}\overline{\lambda} \geqslant 0,$$

dla dowolnych liczb $\lambda \in \mathbf{C}$ oraz $n \in \mathbf{N}$, a więc w szczególności $r_n\lambda + r_{-n}\overline{\lambda} \in \mathbf{R}$ (ponieważ $(1+|\lambda|^2)r_0 \in \mathbf{R}$). Istotnie, dla dowodu $(*)$ wystarczy rozpatrzeć $a_0 = 1, a_n = \lambda$ oraz $a_k = 0$ dla $k \neq 0, n$ w definicji dodatniej określoności.

Biorąc teraz kolejno $\lambda = 1$, $\lambda = i$ otrzymujemy, że $r_n + r_{-n} \in \mathbf{R}$ oraz $i(r_n - r_{-n}) \in \mathbf{R}$ i stąd

$$r_n = \overline{r_{-n}}. \tag{2.2}$$

Wybierzmy teraz $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$ tak, aby $\lambda r_n = -|r_n|$. Wówczas z $(*)$ i z (2.2) mamy $2r_0 - |r_n| - |r_n| \geqslant 0$, a więc

$$|r_n| \leqslant r_0 \tag{2.3}$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbf{Z}$.

Jak wynika z (2.3), przypadek $r_0 = 0$ jest trywialny (μ jest miarą zerową). Zatem przez przemnożenie naszego ciągu przez pewną stałą dodatnią, możemy dodatkowo zakładać, że

$$r_0 = 1$$

(zauważmy, że jeśli $r_n = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\mu(z)$ i $a > 0$, to $ar_n = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d(a\mu)(z)$, gdzie $(a\mu)(A) \stackrel{\mathrm{df}}{=} a\mu(A)$).

Zasadnicza myśl dowodu polega na wykazaniu, że szukaną miarę μ możemy otrzymać jako słabą granicę miar absolutnie ciągłych.

Niech $0 < s < 1$. Zauważmy, że funkcja $f_s(z) := \sum_{n,m=0}^{\infty} r_{n-m} s^{n+m} z^{m-n}$ jest nieujemna i ciągła na $\mathbf{T}$. Istotnie, szereg powyższy jest nawet bezwzględnie jednostajnie zbieżny, więc f_s jest funkcją ciągłą. Nieujemność wynika zaś łatwo z definicji dodatniej określoności ($a_n = s^n z^{-n}$). Ponadto,

$$f_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n z^{-n} s^{|n|} \frac{1}{1-s^2}. \tag{2.4}$$

Zanim przejdziemy do uzasadnienia wzoru (2.4) pokażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej k mamy

$$(**) \qquad \sum_{n,m\geqslant 0, n-m=k} s^{n+m} = \sum_{m=0}^{\infty} s^{|k|+2m}.$$

Istotnie, mamy $n = m + k$, jeśli więc $k \geqslant 0$, to powyższy wzór zachodzi (bo automatycznie $m + k \geqslant 0$). Załóżmy, że $k < 0$. Wówczas, jak poprzednio sumujemy po parach $n = m + k, m$, ale teraz musimy wyraźnie napisać, że $m \geqslant 0$ oraz $m + k \geqslant 0$. Oznacza to po prostu, że $m \geqslant |k|$. Ale

$$\sum_{m\geqslant|k|} s^{2m+k} = \sum_{i\geqslant 0} s^{2(|k|+i)+k} = \sum_{i\geqslant 0} s^{|k|+2i}$$

i w ten sposób uzasadniliśmy $(**)$. Wróćmy do dowodu (2.4). Połóżmy $n - m = k$. Stosując $(**)$ otrzymujemy, że

$$f_s(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} r_{n-m} s^{n+m} z^{m-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} s^{|k|+2n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k z^{-k} s^{|k|} \sum_{n=0}^{\infty} (s^2)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k z^{-k} s^{|k|} \frac{1}{1-s^2}.$$

Ponieważ $\int_{\mathbf{T}} z^p \, dz = 0$, jeśli $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, więc

$$(2.5) \qquad \int_{\mathbf{T}} f_s(z) z^n \, dz = \frac{r_n s^{|n|}}{1-s^2}.$$

Definiujemy teraz miarę absolutnie ciągłą μ_s (względem miary Lebesgue'a na $\mathbf{T}$), kładąc

$$\frac{d\mu_s}{dz} = (1-s^2) f_s(z) (\geqslant 0).$$

Bezpośrednio z (2.5) wynika, że dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$, $\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\mu_s(z) = r_n s^{|n|}$, więc w szczególności $\mu_s(\mathbf{T}) = r_0 = 1$.

Wybierzmy podciąg (s_m) $(0 < s_m < 1)$ tak, aby $s_m \to 1$. Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbf{Z}$,

$$(2.6) \qquad \int_{\mathbf{T}} z^k \, d\mu_{s_m} \to r_k,$$

gdy $m \to \infty$. Stąd już łatwo wynika, że jeśli $p = p(z)$ jest wielomianem trygonometrycznym, to ciąg $(\int_{\mathbf{T}} p(z) \, d\mu_{s_m}(z))_m$ jest zbieżny.

To stwierdzenie o zbieżności pozostaje prawdziwe, gdy zastąpimy p przez dowolną funkcję ciągłą $f \in C(\mathbf{T})$. Istotnie, ustalmy $\varepsilon > 0$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje wielomian trygonometryczny p taki, że $|f(z)-p(z)| < \varepsilon$ dla dowolnego $z \in \mathbf{T}$. Ponadto,

$$|\int_{\mathbf{T}} f(z)\, d\mu_{s_m} - \int_{\mathbf{T}} f(z)\, d\mu_{s_n}| \leqslant \int_{\mathbf{T}} |f(z) - p(z)|\, d\mu_{s_m} +$$

$$+|\int_{\mathbf{T}} p(z)\, d\mu_{s_m} - \int_{\mathbf{T}} p(z)\, d\mu_{s_n}| + \int_{\mathbf{T}} |p(z) - f(z)|\, d\mu_{s_m},$$

skąd łatwo dostajemy (miary μ_s są miarami probabilistycznymi), że spełniony jest warunek Cauchy'ego dla ciągu $(\int_{\mathbf{T}} f(z)\, d\mu_{s_m}(z))_m$.

Kładąc

$$J(f) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{T}} f(z)\, d\mu_{s_m}(z)$$

zdefiniowaliśmy funkcjonał $J : C(\mathbf{T}) \to \mathbf{C}$. Funkcjonał J jest dodatni, bo miary μ_{s_m} są dodatnie. Ponadto $J(1) = 1$. Zatem, z twierdzenia Riesza wynika, że istnieje dokładnie jedna (borelowska) miara probabilistyczna μ na $\mathbf{T}$ taka, że $J(f) = \int_{\mathbf{T}} f\, d\mu$ dla dowolnej funkcji $f \in C(\mathbf{T})$. Z (2.6) otrzymujemy, że dla dowolnego $k \in \mathbf{Z}$

$$J(z^k) = \int_{\mathbf{T}} z^k\, d\mu(z) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{T}} z^k\, d\mu_{s_m}(z) = r_k.$$

Jedyność miary μ wynika z tego, że każda miara jest wyznaczona przez wartości całek na funkcjach ciągłych (co jest konsekwencją regularności miary borelowskiej na dowolnej przestrzeni metrycznej). Zatem dla wyznaczenia miary wystarczy znać wartości całek na wielomianach trygonometrycznych (ze względu na twierdzenie Weierstrassa).

Dla dowodu drugiej części twierdzenia, rozpatrzmy $H = L^2(\mathbf{T}, \mu)$ oraz operator (unitarny!) $V : H \to H$ zadany wzorem $Vf(z) := zf(z)$. Mamy $(n \in \mathbf{Z})$

$$\langle V^n 1, 1\rangle = \int_{\mathbf{T}} z^n\, d\mu(z),$$

więc druga teza twierdzenia Herglotza wynika z przykładu 2.2. □

Zauważmy, że zasadnicza myśl powyższego rozumowania sprowadza się do dowodu twierdzenia, że każda miara nieujemna (borelowska) na $\mathbf{T}$ jest słabą granicą miar absolutnie ciągłych.

Ćwiczenie 2.4 Pokazać, że jeśli $(r_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ jest ciągiem dodatnio określonym, to

$$|r_n - r_m| \leqslant 2r_0\mathrm{Re}\,(r_0 - r_{n-m}) \tag{2.7}$$

dla dowolnych $n, m \in \mathbf{Z}$.

Wskazówka Rozpatrzeć ciąg (a_k), w którym $a_k = 0$ dla $k \neq 0, m, n$ oraz $a_0 = 1$, $a_n = \lambda|r_n - r_m|/(r_n - r_m)$, $a_m = -a_n$, gdzie $\lambda \in \mathbf{R}$.

Uwaga 2.5 Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$. Niech $r_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n}\overline{a_k}$. Wówczas ciąg (r_n) jest dodatnio określony. Rzeczywiście, funkcja $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m$ jest dobrze określona i należy do $L^2(\mathbf{T})$. Kładąc $g(z) = |f(z)|^2$ otrzymujemy nieujemną funkcję należącą do $L^1(\mathbf{T})$. Pokażemy teraz, że transformata Fouriera miary absolutnie ciągłej $d\nu := g\,dz$ jest równa (r_n). Mamy (korzystając z równości Parsevala)

$$\widehat{\nu}[n] = \int_{\mathbf{T}} z^{-n} g(z)\,dz = \int_{\mathbf{T}} \Big(z^{-n}f(z)\Big)\,\overline{f(z)}\,dz =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n}\overline{a_k} = r_n,$$

co dowodzi dodatniej określoności ciągu (r_n).

Zauważmy, że powyższy fakt w istocie oznacza pełną charakteryzację transformat Fouriera miar absolutnie ciągłych (jako odpowiedniego splotu ze swoim sprzężonym pewnego elementu z $l^2(\mathbf{Z})$). Rzeczywiście, jeśli $g(z) = \frac{d\nu}{dz}(z)$ oznacza gęstość miary absolutnie ciągłej ν, to $f = \sqrt{g} \in L^2(\mathbf{T})$, a ponadto (korzystając ponownie z równości Parsevala)

$$\widehat{\nu}[n] = \int_{T} z^{-n} p(z)\,dz = \int_{\mathbf{T}} \Big(z^{-n}f(z)\Big)\,\overline{f(z)}\,dz =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n}\overline{a_k},$$

gdzie $a_k = \widehat{f}[k]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Niech μ będzie skończoną, dodatnią miarą borelowską na $\mathbf{T}$. W dowodzie twierdzenia Herglotza z każdą taką miarą stowarzyszaliśmy operator unitarny V określony na $L^2(\mathbf{T}, \mu)$, $(Vf)(z) = zf(z)$.

Twierdzenie 2.6 (lemat Wienera) *Jeśli H_0 jest domkniętą podprzestrzenią V-niezmienniczą (tzn. $VH_0 = H_0$), to*

$$H_0 = \chi_A L^2(\mathbf{T}, \mu) = \{f \in L^2(\mathbf{T}, \mu);\ f = 0 \ \text{ na } \ A^c\}$$

dla pewnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbf{T}$.

Dowód.

Napiszmy $1 = f + h$, gdzie $f \in H_0$, $h \in H_0^{\perp}$. Wówczas $f \perp V^n h$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ (ponieważ zarówno podprzestrzeń H_0, jak i $H_0^{\perp}$, jest V-niezmiennicza). Stąd $\int_{\mathbf{T}} f(z)\overline{h(z)} z^n \, d\mu(z) = 0$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$. Zatem $f(z)\overline{h(z)} = 0$ dla μ-p.w. $z \in \mathbf{T}$ (bo funkcja $f(\cdot)\overline{h(\cdot)} \in L^1(\mathbf{T}, \mu)$, a warunek „prostopadłości" do dowolnego jednomianu trygonometrycznego oznacza, że współczynniki Fouriera $\widehat{\nu}[n]$ miary zespolonej ν, gdzie $d\nu = f \cdot \overline{h} \, d\mu$, są równe zeru; a wtedy miara ν musi być zerowa, skąd $f \cdot \overline{h} = 0$ modulo μ). Wynika stąd, że nośniki funkcji f i h są rozłączne, a więc $f = \chi_A f, h = \chi_{A^c} h$ dla pewnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbf{T}$. Ponieważ $1 = f + h$, więc $f = \chi_A$, $h = \chi_{A^c}$. Zatem $z^n \chi_A(z) \in H_0$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ i dlatego $\chi_A L^2(\mathbf{T}, \mu) \subset H_0$ (warunek $\chi_A f \in H_0$ sprawdzamy najpierw dla wielomianów trygonometrycznych, a jeśli $p_n \to f$ w $L^2(\mathbf{T}, \mu)$, to $\int_A |p_n - f|^2 \, d\mu \to 0$ i stąd $p_n \cdot \chi_A \to f \cdot \chi_A$ w $L^2(\mathbf{T}, \mu)$, i dlatego $f \cdot \chi_A \in H_0$) oraz podobnie $\chi_{A^c} L^2(\mathbf{T}, \mu) \subset H_0^{\perp}$. Ponieważ w sposób oczywisty

$$\chi_A L^2(\mathbf{T}, \mu) \oplus \chi_{A^c} L^2(\mathbf{T}, \mu) = H,$$

więc $\chi_A L^2(\mathbf{T}, \mu) = H_0$ oraz $\chi_{A^c} L^2(\mathbf{T}, \mu) = H_0^{\perp}$, co kończy dowód. □

Niech $U : H \to H$ będzie operatorem unitarnym na (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta H. Dla dowolnego $x \in H$ kładziemy

$$\mathbf{Z}(x) = \operatorname{span}\{U^n x;\ n \in \mathbf{Z}\}$$

(tzn. $\mathbf{Z}(x)$ jest najmniejszą, domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą, do której należy x). Przestrzeń $\mathbf{Z}(x)$ nazywamy *przestrzenią cykliczną generowaną przez x*. Z twierdzenia Herglotza wynika, że element $x \neq 0$ wyznacza dokładnie jedną skończoną, dodatnią miarę borelowską σ_x, określoną na $\mathbf{T}$ i wyznaczoną przez równości

$$\widehat{\sigma}_x[-n] = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_x(z) = \langle U^n x, x \rangle \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Miarę tę nazywamy *miarą spektralną* elementu x. Zauważmy, że $\sigma_x(\mathbf{T}) = \int_{\mathbf{T}} d\sigma_x = \|x\|^2$.

2.2 Własności miar spektralnych

Mamy zatem operator unitarny U określony na pewnej (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta H[6]. Przypomnijmy, że element $x \in H$ wyznacza miarę spektralną σ_x.

Niech $V_x : L^2(\mathbf{T}, \sigma_x) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$ oznacza operator unitarny określony wzorem

$$V_x f(z) = z f(z).$$

Jeśli $x, y \in H$, to

$$\langle U^n(x+y), x+y\rangle = \langle U^n x, x\rangle + \langle U^n y, y\rangle + \langle U^n x, y\rangle + \langle U^n y, x\rangle.$$

Zatem, jeśli położymy $\xi_n := \langle U^n x, y\rangle$, to $\langle U^n y, x\rangle = \overline{\xi}_{-n}$ oraz

$$\xi_n + \overline{\xi}_{-n} = \widehat{\sigma}_{x+y}[-n] - \widehat{\sigma}_x[-n] - \widehat{\sigma}_y[-n].$$

Wynika stąd, że ciąg $(\xi_n + \overline{\xi}_{-n})_{n\in\mathbf{Z}}$ jest ciągiem współczynników Fouriera miary (rzeczywistej) $\nu := \sigma_{x+y} - \sigma_x - \sigma_y$. Biorąc zamiast x element ix i kładąc $\eta_n := \langle U^n(ix), y\rangle = i\xi_n$, zauważamy, że ciąg $(\eta_n + \overline{\eta}_{-n})_{n\in\mathbf{Z}}$ jest ciągiem współczynników Fouriera miary (rzeczywistej) $\rho := \sigma_{ix+y} - \sigma_{ix} - \sigma_y$. Stąd dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ mamy

$$\xi_n = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\left(\frac{\nu - i\rho}{2}\right)(z).$$

Istotnie,

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\left(\frac{\nu - i\rho}{2}\right)(z) = \frac{1}{2}(\hat{\nu}[-n] - i\hat{\rho}[-n]) = \frac{1}{2}(\xi_n + \overline{\xi}_{-n} - i(i\xi_n + \overline{i\xi}_{-n})) = \xi_n.$$

Wykazaliśmy zatem, że istnieje (jedyna) miara zespolona $\sigma_{x,y}$ taka, że

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_{x,y}(z) = \langle U^n x, y\rangle \ \text{ dla dowolnego } \ n \in \mathbf{Z}.$$

Oczywiście $\sigma_{x,x} = \sigma_x$.

Ćwiczenie 2.7 Pokazać, że $|\sigma_{x,y}(\mathbf{T})| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in H$.

[6] Czasami będziemy też pisać $U \in \mathcal{U}(H)$.

Lemat 2.8 *Niech* $P(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$ *będzie wielomianem trygonometrycznym. Wówczas dla dowolnych* $x, y \in H$ *mamy*
(i) $\|P(U)x\|^2 = \|P\|^2_{L^2(\mathbf{T},\sigma_x)}$,
(ii) $|\langle P(U)x, y\rangle| \leqslant \|P\|_{L^2(\mathbf{T},\sigma_x)}\|y\|$.

Dowód.
(i) Mamy

$$||P(U)x||^2 = \sum_{n,m=-N}^{N} a_n\overline{a}_m \langle U^{n-m}x, x\rangle = \sum_{n,m=-N}^{N} a_n\overline{a}_m \int_{\mathbf{T}} z^{n-m}\, d\sigma_x(z) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} (\sum_{n,m=-N}^{N} a_n\overline{a}_m z^{n-m})\, d\sigma_x(z) = \int_{\mathbf{T}} |P(z)|^2\, d\sigma_x(z).$$

Tezę (ii) otrzymujemy używając nierówności Schwarza:

$$|\langle P(U)x, y\rangle| \leqslant \|P(U)x\|\|y\|$$

oraz punktu (i). □

Przypomnijmy, że przez $M(\mathbf{T})$ oznaczamy przestrzeń Banacha miar zespolonych z normą $|\sigma|$.

Lemat 2.9 *Odwzorowanie* $L : H \times H \to M(\mathbf{T})$ *dane wzorem* $L(x, y) = \sigma_{x,y}$ *jest półtoraliniowe i ciągłe.*

Dowód.
Ponieważ $\widehat{\sigma}_{a_1x_1+a_2x_2,y}[-n] = \langle U^n(a_1x_1 + a_2x_2), y\rangle$, więc półtoraliniowość odwzorowania L jest oczywista. Jeśli weźmiemy wielomian trygonometryczny P, którego norma supremum $\|P\|_{C(\mathbf{T})}$ jest ograniczona przez 1, to, ze względu na lemat 2.8 i równość $\int_{\mathbf{T}} P(z)\, d\sigma_{x,y}(z) = \langle P(U)x, y\rangle$,

$$| \int_{\mathbf{T}} P(z)\, d\sigma_{x,y}(z)| \leqslant \|P\|_{L^2(\mathbf{T},\sigma_x)}\|y\| \leqslant ||P||_{C(\mathbf{T})}\|x\|\|y\| \leqslant \|x\|\|y\|.$$

Ale takie wielomiany są gęste w kuli jednostkowej przestrzeni $C(\mathbf{T})$. Zatem norma funkcjonału $f \mapsto \int_{\mathbf{T}} f\, d\sigma_{x,y}$, $f \in C(\mathbf{T})$, jest ograniczona przez $\|x\|\|y\|$ (równoważnie, patrz twierdzenie Riesza, $|\sigma_{x,y}| \leqslant \|x\|\|y\|$). Stąd $|L(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|$ (więc $\|L\| \leqslant 1$), co kończy dowód. □

Uwaga 2.10 Jeśli $x_n \to x$, $y_n \to y$, to ze względu na ciągłość formy L mamy:

$$\sigma_{x_n,y_n} \to \sigma_{x,y} \text{ w } M(\mathbf{T})$$

i w szczególności

$$\sigma_{x_n} \to \sigma_x \text{ w } M(\mathbf{T}).$$

Uwaga 2.11 Dla dowolnego podzbioru borelowskiego $A \subset \mathbf{T}$ forma $L_A(\cdot,\cdot) := \sigma_{\cdot,\cdot}(A) : H \times H \to \mathbf{C}$ jest półtoraliniowa i ciągła. Ponadto stowarzyszona z nią forma kwadratowa jest nieujemna (bo σ_x jest miarą nieujemną). Zatem zachodzi nierówność Schwarza:

$$|\sigma_{x,y}(A)| = |L_A(x,y)| \leqslant L_A(x,x)^{1/2} L_A(y,y)^{1/2} = \sigma_x(A)^{1/2}\sigma_y(A)^{1/2}.$$

W szczególności, dla dowolnych $x, y \in H$

$$\sigma_{x,y} \ll \sigma_x \text{ oraz } \sigma_{x,y} \ll \sigma_y.$$

Korzystając teraz ze stwierdzenia 1.8 (f), otrzymujemy następujący

Lemat 2.12 *Dla dowolnych $x, y \in H$,*

$$|\sigma_{x,y}| \ll \sigma_x \text{ \textit{oraz} } |\sigma_{x,y}| \ll \sigma_y.$$

Uwaga 2.13 Weżmy dowolny $A \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$. Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$|\sigma_{x,y}|(A) \leqslant \sqrt{\sigma_x(A)\sigma_y(A)} + \varepsilon.$$

Rzeczywiście, możemy znaleźć przeliczalne rozbicie zbioru A na podzbiory borelowskie $A_1, A_2, \ldots$ takie, że

$$|\sigma_{x,y}|(A) \leqslant \sum_{s \geqslant 1} |\sigma_{x,y}(A_s)| + \varepsilon. \tag{2.8}$$

Używając (w (2.8)) nierówności Schwarza (zastosowanej do L_{A_s}), a następnie zwykłej, liczbowej nierówności Schwarza, otrzymujemy

$$|\sigma_{x,y}|(A) \leqslant \sum_{s\geqslant 1} \sqrt{\sigma_x(A_s)\sigma_y(A_s)} + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant (\sum_{s\geqslant 1} \sigma_x(A_s))^{1/2} (\sum_{s\geqslant 1} \sigma_y(A_s))^{1/2} + \varepsilon = \sqrt{\sigma_x(A)\sigma_y(A)} + \varepsilon.$$

Lemat 2.14 *Operator unitarny $U : \mathbf{Z}(x) \to \mathbf{Z}(x)$ jest (spektralnie) równoważny (izomorficzny) z operatorem V_x.*

Dowód.

Definiujemy operator $W : \mathbf{Z}(x) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$ kładąc najpierw, dla $n \in \mathbf{Z}$, $W(U^n x) = z^n$. Następnie zauważamy, że W jest izometrią na zbiorze $\{U^n x;\ n \in \mathbf{Z}\}$, ponieważ

$$\langle U^m x, U^k x\rangle = \langle U^{m-k}x, x\rangle = \int_{\mathbf{T}} z^{m-k}\, d\sigma_x(z) = \int_{\mathbf{T}} z^m z^{-k}\, d\sigma_x(z),$$

a jednocześnie $\langle W(U^m x), W(U^k x)\rangle = \int_{\mathbf{T}} z^m z^{-k}\, d\sigma_x(z)$. Stąd łatwo sprawdzamy, że

$$\langle WP(U)x, WQ(U)x\rangle = \langle P(U)x, Q(U)x\rangle$$

dla dowolnych wielomianów trygonometrycznych P, Q. Zatem W rozszerza się do izometrii przestrzeni $\mathbf{Z}(x)$ (jeśli $P(U)x = 0$, to $\|P(U)x\|^2 = 0$ i stąd $P = W(P(U)x) = 0$ w $L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$). Izometria ta będzie surjekcją, ponieważ zbiór $\{z^k;\ k \in \mathbf{Z}\}$ jest liniowo gęsty w $L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$, a obraz izometryczny przestrzeni zupełnej jest przestrzenią zupełną (a więc domkniętą).

Zauważmy ponadto, że

$$WU(U^k x)(z) = W(U^{k+1}x)(z) = z^{k+1}$$

oraz

$$V_x W(U^k x)(z) = V_x(W(U^k x))(z) = z \cdot W(U^k x)(z) = z \cdot z^k = z^{k+1}.$$

Łatwo sprawdzamy więc, że $WU = V_x W$. □

Uwaga 2.15 Jeśli $W(x') = f$, to $\sigma_{x'}$ – miara spektralna elementu x' względem U – jest równa σ_f – mierze spektralnej funkcji f względem operatora V_x (bo W ustala izomorfizm odpowiednich operatorów unitarnych).

Lemat 2.16 $U|_{\mathbf{Z}(x)} \simeq U|_{\mathbf{Z}(y)} \Leftrightarrow \sigma_x \equiv \sigma_y$.

Dowód.

Z lematu 2.14 wynika, że wystarczy pokazać, iż $V_x \simeq V_y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_x \equiv \sigma_y$. Załóżmy zatem, że $WV_x = V_y W$ dla pewnej surjektywnej izometrii $W : L^2(\mathbf{T}, \sigma_x) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_y)$. Połóżmy $f(z) = W(1)(z)$. Mamy $f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma_y)$. Ponadto,

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_x(z) = \langle V_x^n 1, 1\rangle = \langle W V_x^n 1, W1\rangle =$$

$$= \langle V_y^n W1, W1\rangle = \langle V_y^n f, f\rangle = \int_{\mathbf{T}} z^n |f(z)|^2 \, d\sigma_y(z).$$

Stąd $d\sigma_x = |f|^2 \, d\sigma_y$ i w szczególności $\sigma_x \ll \sigma_y$. Zamieniając x i y rolami otrzymujemy $\sigma_x \equiv \sigma_y$.

Z drugiej strony, jeśli $\sigma_x \equiv \sigma_y$, to definiujemy $W : L^2(\mathbf{T}, \sigma_x) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_y)$ kładąc

$$Wg = g\sqrt{\frac{d\sigma_x}{d\sigma_y}}.$$

Otrzymujemy

$$\|W(g)\|^2_{L^2(\mathbf{T}, \sigma_y)} = \int_{\mathbf{T}} |W(g)|^2 \, d\sigma_y = \int_{\mathbf{T}} |g|^2 \frac{d\sigma_x}{d\sigma_y} \, d\sigma_y = \|g\|^2_{L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)},$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.17 *Jeśli $x \in H$ oraz $(0 \leqslant)\ \sigma \ll \sigma_x$, to istnieje element $y \in \mathbf{Z}(x)$ taki, że $\sigma = \sigma_y$.*

Dowód.

Wystarczy pokazać, że istnieje funkcja $f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$, dla której $\sigma_f = \sigma$. Kładziemy $f := \sqrt{\frac{d\sigma}{d\sigma_x}}$ i sprawdzamy, że

$$\langle V_x^n f, f\rangle = \int_{\mathbf{T}} z^n f(z)\overline{f(z)} \, d\sigma_x(z) = \int_{\mathbf{T}} z^n \frac{d\sigma}{d\sigma_x}(z) \, d\sigma_x(z) = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma(z),$$

więc rzeczywiście $\sigma_f = \sigma$. □

Lemat 2.18 *Jeśli $x, y \in \mathbf{Z}(z)$ oraz $\mathbf{Z}(x) \perp \mathbf{Z}(y)$, to $\sigma_x \perp \sigma_y$. Jeśli dodatkowo $z = x + y$, to $\mathbf{Z}(z) = \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y)$.*

Dowód.

Wystarczy przeprowadzić nasze rozważania w przestrzeni $L^2(\mathbf{T}, \sigma_z)$ (dla operatora V_z). Pokażemy zatem, że jeśli $\mathbf{Z}(f) \perp \mathbf{Z}(g)$, to $\sigma_f \perp \sigma_g$. Korzystając z lematu Wienera otrzymujemy, że $\mathbf{Z}(f) = \chi_A L^2(\mathbf{T}, \sigma_z)$ oraz $\mathbf{Z}(g) = \chi_B L^2(\mathbf{T}, \sigma_z)$. Ponieważ $\chi_A \perp \chi_B$, więc $\int_{\mathbf{T}} \chi_A \chi_B \, d\sigma_z = 0$, a stąd $\sigma_z(A \cap B) = 0$. Ale (patrz dowód lematu 2.16) $\frac{d\sigma_f}{d\sigma_z} = |f|^2$ oraz $\frac{d\sigma_g}{d\sigma_z} = |g|^2$. Ponieważ nośnik funkcji f jest zawarty w A, nośnik funkcji g zaś w zbiorze B, więc miary $|f|^2 \, d\sigma_z$ i $|g|^2 \, d\sigma_z$ są także wzajemnie singularne. Stąd $\sigma_f \perp \sigma_g$.

Jeśli założymy dodatkowo, że $z = x + y$, to $z \in \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y)$, więc $\mathbf{Z}(z) \subset \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y)$, a implikacja przeciwna jest oczywista. □

Lemat 2.19 *Jeśli $y \in \mathbf{Z}(x)$, to $\sigma_y \ll \sigma_x$ oraz*

$$\sigma_x \equiv \sigma_y \Leftrightarrow \mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}(x).$$

Dowód.

Mamy więc udowodnić, że dla V_x i $f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$, $\sigma_f \ll \sigma_x (= \sigma_1)$, przy czym mamy równoważność miar wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{Z}(f) = \mathbf{Z}(1)$. Ale $d\sigma_f = |f|^2 \, d\sigma_x$, więc $\sigma_f \ll \sigma_x$.

Jeśli $\mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}(x)$, to $U|_{\mathbf{Z}(y)} \simeq U|_{\mathbf{Z}(x)}$, więc na mocy lematu 2.16, $\sigma_y \equiv \sigma_x$.

Jeśli $\mathbf{Z}(f)$ jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni $\mathbf{Z}(1) = L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$, to (lemat Wienera!) $\mathbf{Z}(f) = \chi_B L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$, skąd

$$\sigma_x(B) < \sigma_x(\mathbf{T}).$$

Zatem $\sigma_x(B^c) > 0$, a ponieważ miara σ_f jest skupiona na zbiorze B, więc miary σ_x i σ_f nie są równoważne. □

Ćwiczenie 2.20 Pokazać, że $f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma)$ jest generatorem cyklicznym operatora V, $Vf(z) = zf(z)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) \neq 0$ dla σ-p.w. $z \in \mathbf{T}$.

Lemat 2.21 *Jeśli $\sigma_x \perp \sigma_y$, to $\mathbf{Z}(x) \perp \mathbf{Z}(y)$.*

Dowód.

Niech $H = \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(x)^{\perp}$ z odpowiadającym rozkładem elementu y, $y = y_1 + y_0$. Z ortogonalności i niezmienniczości, $\langle U^n y, y\rangle = \langle U^n y_0, y_0\rangle + \langle U^n y_1, y_1\rangle$. Zatem $\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_y = \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_{y_0} + \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_{y_1}$. Otrzymaliśmy $\sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}$ i w szczególności $\sigma_{y_1} \ll \sigma_y$. Lecz $y_1 \in \mathbf{Z}(x)$, więc na mocy lematu 2.19, $\sigma_{y_1} \ll \sigma_x$ i stąd otrzymujemy $\sigma_{y_1} \ll \sigma_x$, $\sigma_{y_1} \ll \sigma_y$ oraz $\sigma_x \perp \sigma_y$. Wynika stąd, że $\sigma_{y_1} = 0$, co implikuje, że $y_1 = 0$ i w końcu $\mathbf{Z}(x) \perp \mathbf{Z}(y)$. □

Lemat 2.22 *Jeśli $\sigma_x \perp \sigma_y$, to $\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y$ oraz $\mathbf{Z}(x+y) = \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y)$.*

Dowód.

Ponieważ $\mathbf{Z}(x) \perp \mathbf{Z}(y)$, więc $\langle U^n(x+y), x+y\rangle = \langle U^n x, x\rangle + \langle U^n y, y\rangle$ i stąd $\sigma_{x+y} = \sigma_x + \sigma_y$. Ponieważ $\sigma_x \perp \sigma_y$, więc $\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}} = \chi_A \in L^2(\mathbf{T}, \sigma_{x+y})$, gdzie $\sigma_x(A) = \sigma_x(\mathbf{T})$ i $\sigma_y(A) = 0$. Wynika stąd, że

$$\int_{\mathbf{T}} d\sigma_x = \int_{\mathbf{T}} \frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}} \, d\sigma_x. \tag{2.9}$$

Dla danego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć wielomian trygonometryczny $p = p(z)$ taki, że

$$\int_{\mathbf{T}} |\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}(z) - p(z)|^2 \, d\sigma_{x+y}(z) < \varepsilon.$$

Wykażemy teraz, że

$$\|x - p(U)(x+y)\|^2 = \int_{\mathbf{T}} |\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}(z) - p(z)|^2 \, d\sigma_{x+y}, \tag{2.10}$$

co w połączeniu z powyższą nierównością da nam $\|x - p(U)(x+y)\|^2 < \varepsilon$ i z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymamy $x \in \mathbf{Z}(x+y)$ i podobnie $y \in \mathbf{Z}(x+y)$. Pozostaje wykazanie równości (2.10).

Niech $W : \mathbf{Z}(x+y) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_{x+y})$ będzie izomorfizmem wyznaczonym przez warunek $W(x+y) = 1$. Wówczas

$$||x - p(U)(x+y)||^2 = \langle x, x\rangle - 2\mathrm{Re}\langle x, p(U)(x+y)\rangle + ||p(U)(x+y)||^2 =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} 1 \, d\sigma_x - \underbrace{2\mathrm{Re}\langle x, p(U)x\rangle}_{\text{ponieważ } x \perp \mathbf{Z}(y)} + \int_{\mathbf{T}} |p(z)|^2 \, d\sigma_{x+y} =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} 1\, d\sigma_x - 2\mathrm{Re}\overline{\int_{\mathbf{T}} p(z)\, d\sigma_x} + \int_{\mathbf{T}} |p(z)|^2\, d\sigma_{x+y} =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \overline{\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}}\, d\sigma_x - 2\mathrm{Re}\overline{\int_{\mathbf{T}} p(z)\, d\sigma_x} + \int_{\mathbf{T}} |p(z)|^2\, d\sigma_{x+y} =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} \frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}} \overline{\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}}\, d\sigma_{x+y} - 2\mathrm{Re} \int_{\mathbf{T}} \overline{p(z)} \frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}\, d\sigma_{x+y} + \int_{\mathbf{T}} |p(z)|^2\, d\sigma_{x+y} =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} |\frac{d\sigma_x}{d\sigma_{x+y}}(z) - p(z)|^2\, d\sigma_{x+y},$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.23 *Niech $(x_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni H takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny oraz $\sigma_{x_n} \perp \sigma_{x_m}$, o ile $n \neq m$. Wówczas*

$$\mathbf{Z}(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n) \tag{2.11}$$

oraz

$$\sigma_{\sum_{n=1}^{\infty} x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{x_n}. \tag{2.12}$$

Dowód.

Zauważmy, że równość (2.12) wynika z prostopadłości i niezmienniczości rozpatrywanych podprzestrzeni. Aby otrzymać (2.11), w przypadku ciągu skończonego stosujemy indukcję i poprzedni lemat. Zauważmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n)$, więc $\mathbf{Z}(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n)$. Z drugiej strony, ponownie korzystając z poprzedniego lematu i wiedząc już, że $\sigma_{\sum_{n=1}^{N} x_n} \perp \sigma_{\sum_{n\geqslant N+1} x_n}$, dla dowolnego $N \geqslant 1$ mamy

$$\mathbf{Z}(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \mathbf{Z}(\sum_{n=1}^{N} x_n) \oplus \mathbf{Z}(\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n),$$

więc w szczególności $\mathbf{Z}(x_N) \subset \mathbf{Z}(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)$ dla dowolnego $N \geqslant 1$. □

Lemat 2.24 *Załóżmy, że ν jest dodatnią miarą borelowską na $\mathbf{T}$. Jeśli $x_n \to x$ oraz $\sigma_{x_n} \ll \nu$, to $\sigma_x \ll \nu$. Ten sam rezultat zachodzi, gdy absolutną ciągłość zastąpimy warunkiem singularności.*

Dowód.

Przypuśćmy, że $\sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2$, gdzie $\sigma_1 \ll \nu$ oraz $0 \neq \sigma_2 \perp \nu$. Na mocy lematu 2.17 istnieją $y_1, y_2 \in \mathbf{Z}(x)$ takie, że $\sigma_i = \sigma_{y_i},\ i = 1, 2$. Z lematu 2.22, $\mathbf{Z}(y_1) \oplus \mathbf{Z}(y_2) = \mathbf{Z}(x)$, skąd $x = y_1' + y_2'$, gdzie $y_i' \in \mathbf{Z}(y_i),\ i = 1, 2$. Otrzymaliśmy $\sigma_{y_2'} \ll \sigma_{y_2} \perp \nu$. Z drugiej strony, ze względu na lemat 2.12, $\sigma_{x_n - y_1'} \ll \sigma_{x_n} + \sigma_{y_1'} \ll \nu$. Na mocy lematu 2.21 mamy $x_n - y_1' \perp y_2'$ oraz

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n - y_1' - y_2'\|^2 \geqslant \|y_2'\|^2.$$

□

Definicja 2.25 Przestrzeń cykliczna $\mathbf{Z}(x)$ nazywa się przestrzenią *maksymalną*, gdy nie jest ona zawarta w pewnej większej przestrzeni cyklicznej.

Lemat 2.26 *Przestrzeń $\mathbf{Z}(x)$ jest maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_x \gg \sigma_y$ dla wszystkich $y \in H$. W szczególności, jeśli $\mathbf{Z}(x)$ oraz $\mathbf{Z}(y)$ są maksymalne, to są one spektralnie równoważne (co oznacza, że $U|_{\mathbf{Z}(x)} \simeq U|_{\mathbf{Z}(y)}$).*

Dowód.

$\Rightarrow$. Przypuśćmy, że dla pewnego $y \in H$ nie jest prawdą, że $\sigma_x \gg \sigma_y$. Wówczas istnieje $\nu \in M^+(\mathbf{T})$ taka, że

$$0 \neq \nu \ll \sigma_y \quad \text{and} \quad \sigma_x \perp \nu.$$

Lecz $\nu \ll \sigma_y$ implikuje, że istnieje $y_1 \in \mathbf{Z}(y)$ takie, że $\nu = \sigma_{y_1}$, skąd $\sigma_{y_1} \perp \sigma_x$ oraz, na mocy lematu 2.22, $\mathbf{Z}(y_1 + x) = \mathbf{Z}(y_1) \oplus \mathbf{Z}(x)$. Ostatnia równość oznacza, że przestrzeń cykliczna $\mathbf{Z}(x)$ nie jest maksymalna.
$\Leftarrow$. Jeśli $\mathbf{Z}(x)$ nie jest maksymalna, to dla pewnego $z \in H$, przestrzeń $\mathbf{Z}(x)$ jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni $\mathbf{Z}(z)$. Na mocy lematu 2.19, σ_x nie jest równoważna mierze σ_z. □

Lemat 2.27 *Jeśli $H_1 \subset \mathbf{Z}(x)$ jest domkniętą podprzestrzenią U-niezmienniczą, to H_1 jest także cykliczna.*

Dowód.

Z lematu Wienera wynika, że $H_1 = \chi_B L^2(\mathbf{T}, \sigma_x)$ dla pewnego zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$. Jasnym jest, że χ_B jest cyklicznym generatorem przestrzeni H_1.

$\square$

Lemat 2.28 *Dla dowolnego $x \in H$ istnieje maksymalna podprzestrzeń cykliczna, do której x należy.*

Dowód.

Pokażemy, że jeśli (x_n) jest ciągiem elementów przestrzeni H oraz $\mathbf{Z}(x_n) \subset \mathbf{Z}(x_{n+1})$ dla dowolnego $n \geqslant 1$, to $F = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \mathbf{Z}(x_n)}$ jest również przestrzenią cykliczną. Istotnie, $\mathbf{Z}(x_{n+1}) = \mathbf{Z}(x_n) \oplus H_n$, gdzie H_n jest U-niezmiennicza. Na mocy lematu 2.27, przestrzeń H_n jest także cykliczna, więc

$$\mathbf{Z}(x_{n+1}) = \mathbf{Z}(x_n) \oplus \mathbf{Z}(y_{n+1})$$

i z lematu 2.18 otrzymujemy, że $\sigma_{x_n} \perp \sigma_{y_{n+1}}$ oraz

$$\sigma_{x_{n+1}} = \sigma_{x_n} + \sigma_{y_{n+1}}.$$

Połóżmy $\sigma_{y_1} = \sigma_{x_1}$ i zauważmy, że miary σ_{y_n}, $n \geqslant 1$ są wzajemnie singularne, ponieważ $\sigma_{y_n} \ll \sigma_{x_n} \perp \sigma_{y_{n+1}}$. Ponadto

$$\sigma_{x_{n+1}} = \sigma_{y_{n+1}} + \sigma_{y_n} + \ldots + \sigma_{y_1}, \quad \mathbf{Z}(x_{n+1}) = \mathbf{Z}(y_{n+1}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(y_1),$$

gdzie, bez straty ogólności, możemy założyć, że szereg $\sum_{n\geqslant 0} y_n$ jest zbieżny. Na mocy lematu 2.23, $F = \bigoplus_{n\geqslant 1} \mathbf{Z}(y_n) = \mathbf{Z}(\sum_{n\geqslant 1} y_n)$.

Aby zakończyć dowód użyjemy założenia ośrodkowości przestrzeni H. W takiej przestrzeni każdy ściśle rosnący łańcuch podprzestrzeni cyklicznych musi być przeliczalny (istotnie, przypuśćmy, że $G = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha}$ jest sumą mnogościową łańcucha podprzestrzeni; niech $\{f_n\}$ będzie gęstym podzbiorem przestrzeni G; dla każdej pary (n, m) wybierzmy $\alpha_{n,m} \in \Lambda$ spełniające $\mathrm{dist}(H_{\alpha_{n,m}}, f_n) < 1/m$; wówczas $(H_{\alpha_{n,m}})_{n,m}$ jest także łańcuchem podprzestrzeni Hilberta oraz $F = \overline{\bigcup_{n,m} H_{\alpha_{n,m}}}$). Aby zakończyć dowód wystarczy teraz skorzystać z lematu Kuratowskiego-Zorna. $\square$

2.3 Twierdzenie spektralne. Klasyfikacja operatorów unitarnych

Zakończyliśmy opis najważniejszych własności miar spektralnych. Przystępujemy teraz do pełnego opisu (klasyfikacji) operatorów unitarnych z dokładnością do równoważności unitarnej.

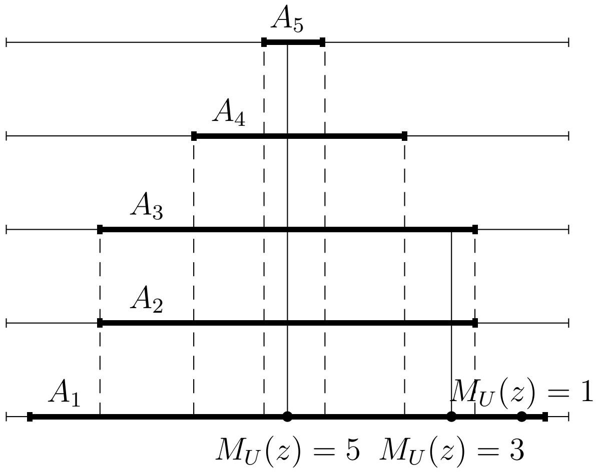
Lemat 2.29 *Jeśli U jest operatorem unitarnym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H, to istnieje rozkład*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n) \quad \text{oraz} \quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots . \tag{2.13}$$

Dowód.
Ustalmy gęsty podzbiór $\{y_n;\ n \geqslant 1\}$ przestrzeni H. Niech $\mathbf{Z}(x_1)$ będzie podprzestrzenią maksymalną, do której należy element y_1. Oznaczmy przez $\{y_n^1;\ n = 2, 3, \ldots\}$ projekcję ortogonalną elementów $\{y_n;\ n = 2, 3, \ldots\}$ na podprzestrzeń $\mathbf{Z}(x_1)^\perp$. W przestrzeni $\mathbf{Z}(x_1)^\perp$ (która jest U-niezmiennicza) wybieramy maksymalną podprzestrzeń cykliczną, powiedzmy $\mathbf{Z}(x_2)$, do której należy element y_2^1. Wynika stąd, że $y_1 \in \mathbf{Z}(x_1)$ oraz $y_2 \in \mathbf{Z}(x_2) \oplus \mathbf{Z}(x_1)$. Ponadto, na mocy lematu 2.26, $\sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2}$. Powtarzamy teraz to samo rozumowanie używając operatora $U|_{\mathbf{Z}(x_1)^\perp}$ oraz przestrzeni $\mathbf{Z}(x_2)$, która jest maksymalna w $\mathbf{Z}(x_1)^\perp$, etc. Konstruujemy w ten sposób ciąg (x_n) taki, że $y_n \in \mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_n)$, gdzie z maksymalności wyboru na każdym kroku konstrukcji i lematu 2.26 wynika, że $\sigma_{x_1} \gg \ldots \gg \sigma_{x_n} \gg \ldots$. W końcu $H = \overline{\{y_n :\ n \geqslant 1\}} \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n) \subset H$, co kończy dowód. □

Każdy rozkład przestrzeni H spełniający (2.13) nazywamy rozkładem *spektralnym*. Zauważmy, że w każdym rozkładzie spektralnym (2.13) przestrzeń $\mathbf{Z}(x_1)$ jest maksymalną podprzestrzenią cykliczną (istotnie, jeśli $y = \sum_{i\geqslant 1} x_i'$, gdzie $x_i' \in \mathbf{Z}(x_i)$, to $\sigma_y = \sum_{i\geqslant 1} \sigma_{x_i'} \ll \sigma_{x_1}$ i wystarczy zastosować lemat 2.26). Ciąg miar w (2.13) nazywamy *ciągiem spektralnym* operatora U. Typ (tzn. klasa wszystkich miar równoważnych danej mierze) miary σ_{x_1} będzie nazywany *maksymalnym typem spektralnym* operatora U; będziemy go oznaczać przez σ_U (mimo wszystko, trochę niekonsekwentnie, przez typy spektralne będziemy rozumieli miary). Połóżmy $A_1 = \mathbf{T}$ i dla $n \geqslant 2$ niech

$$A_n(U) = A_n = \operatorname{supp} \frac{d\sigma_{x_n}}{d\sigma_{x_1}}. \tag{2.14}$$



Rysunek 1: $\mathbf{T} = [0, 1)$

Zatem A_n jest zdefiniowany σ_{x_1}-p.w. Ponieważ

$$\frac{d\sigma_{x_{n+1}}}{d\sigma_{x_1}} = \frac{d\sigma_{x_{n+1}}}{d\sigma_{x_n}} \frac{d\sigma_{x_n}}{d\sigma_{x_1}},$$

więc

$$\mathbf{T} = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \quad (\text{modulo } \sigma_{x_1}).$$

Kładziemy

$$M_U : \mathbf{T} \to \{1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}, \quad M_U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(z).$$

Funkcję tę nazywa się funkcją *krotności spektralnej* operatora U i jest ona zdefiniowana z dokładnością do zbioru miary σ_U-zero (patrz Rysunek 1). Oczywiście określenie funkcji M_U wymagało konkretnego rozkładu spektralnego. Niemniej, następne twierdzenie powie nam, że funkcja M_U zależy jedynie od operatora, a nie od rozkładu spektralnego.

Następne twierdzenie jest centralnym wynikiem teorii spektralnej operatorów unitarnych. Twierdzenie to uzasadnia ponadto poprawność wprowadzonych powyżej pojęć.

Twierdzenie 2.30 (twierdzenie spektralne) *Niech U będzie operatorem unitarnym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że dane są dwa rozkłady spektralne:*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n), \quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots,$$

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(y_n), \quad \sigma_{y_1} \gg \sigma_{y_2} \gg \ldots.$$

Wówczas, dla dowolnego $n \geqslant 1$, $\sigma_{x_n} \equiv \sigma_{y_n}$.

Dowód.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Przypuśćmy zatem, że $n \geqslant 1$ jest najmniejsze o tej własności, że $\sigma_{x_n} \not\equiv \sigma_{y_n}$. Wówczas $n \geqslant 2$ (bo obie podprzestrzenie $\mathbf{Z}(x_1)$ i $\mathbf{Z}(y_1)$ są maksymalne). Niech $0 \neq \nu \in M^+(\mathbf{T})$ spełnia

$$\nu \ll \sigma_{y_n}, \quad \nu \perp \sigma_{x_n}$$

(być może, aby otrzymać miarę ν o powyższej własności, musimy tutaj zamienić rolami ciągi (x_n) i (y_n)). Zatem istnieją $y_i' \in \mathbf{Z}(y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ takie, że $\sigma_{y_i'} = \nu$. Ponadto istnieją $x_j' \in \mathbf{Z}(x_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$ takie, że $\sigma_{x_j'} = \nu$. Zauważmy, że jeśli

$$F = \mathbf{Z}(x_1') \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n-1}'),$$

to dowolny typ spektralny na $F^{\perp}$ jest singularny względem ν. Istotnie

$$\mathbf{Z}(x_j) = \mathbf{Z}(x_j') \oplus \mathbf{Z}(x_j''), \ \sigma_{x_j''} \perp \sigma_{x_j'} = \nu \ \ (j = 1, \ldots, n-1),$$

więc

$$F^{\perp} = \mathbf{Z}(x_1'') \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n-1}'') \oplus \mathbf{Z}(x_n) \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1}) \ldots,$$

z czego wynika, że typ spektralny na $F^{\perp}$ jest absolutnie ciągły względem miary $\sigma_{x_1''} + \ldots + \sigma_{x_{n-1}''} + \sigma_{x_n} + \ldots$. Otrzymaliśmy zatem, że dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbf{Z}(y_i') \subset F.$$

Przechodzimy teraz do standardowych reprezentacji na F, identyfikując F z $\bigoplus_{j=1}^{n-1} L^2(\mathbf{T}, \nu)$. Przy tej identyfikacji operator $U|_F$ jest równy $\bigoplus_{j=1}^{n-1} V_\nu$, gdzie $V_\nu(f)(z) = zf(z)$ na przestrzeni $L^2(\mathbf{T}, \nu)$. Istnieją więc elementy $g_1, \ldots, g_n \in F$ (g_i odpowiada y_i') takie, że

$$\sigma_{g_i} = \nu \ \text{ oraz } \ \mathbf{Z}(g_i) \perp \mathbf{Z}(g_{i'})$$

dla $i \neq i'$, przy czym $i, i' = 1, \ldots, n$. Oczywiście $g_i = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij}$, gdzie $g_{ij} \in L^2(\mathbf{T}, \nu)$. Otóż dla dowolnego $k \in \mathbf{Z}$, $t \neq s$, $1 \leqslant t, s \leqslant n$,

$$0 = \langle U^k y_s', y_t' \rangle_F = \sum_{j=1}^{n-1} \langle V_\nu^k g_{sj}, g_{tj} \rangle_{L^2(\mathbf{T},\nu)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbf{T}} z^k g_{sj}(z) \overline{g_{tj}(z)}\, d\nu(z) = \int_{\mathbf{T}} z^k \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_{sj}(z) \overline{g_{tj}(z)} \right) d\nu(z).$$

Ponieważ k w tym rozumowaniu jest dowolne, więc

$$\sum_{j=1}^{n-1} g_{sj}(z) \overline{g_{tj}(z)} = 0 \ \text{ dla } \nu - \text{p.w. } z \in \mathbf{T}. \tag{2.15}$$

Ale $\sigma_{g_s} = \nu$, więc

$$\int_{\mathbf{T}} z^k \, d\nu(z) = \langle U^k y_s', y_s' \rangle_F =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} z^k \, d\sigma_{g_s}(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbf{T}} z^k |g_{sj}(z)|^2 \, d\nu(z),$$

a więc

$$\sum_{j=1}^{n-1} |g_{sj}(z)|^2 = 1 \ \text{ dla } \nu - \text{p.w. } z \in \mathbf{T}. \tag{2.16}$$

Patrząc teraz na zależności (2.15) i (2.16) widzimy, że w przestrzeni liniowej $\mathbf{C}^{n-1}$ otrzymaliśmy wektory

$$(g_{11}(z), \ldots, g_{1,n-1}(z)), (g_{21}(z), \ldots, g_{2,n-1}(z)), \ldots, (g_{n1}(z), \ldots, g_{n,n-1}(z))$$

wszystkie o długości 1 i parami ortogonalne (dla ν-p.w. $z \in \mathbf{T}$), co daje oczywistą sprzeczność z wymiarem przestrzeni $\mathbf{C}^{n-1}$. □

Wniosek 2.31 *Załóżmy, że U_k jest operatorem unitarnym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H_k, $k = 1, 2$. Załóżmy dodatkowo, że dany jest rozkład spektralny*

$$H_k = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_{k,i}), \quad \sigma_{x_{k,1}} \gg \sigma_{x_{k,2}} \gg \ldots,$$

($k = 1, 2$). Jeśli $U_1 \simeq U_2$, to $\sigma_{x_{1,i}} \equiv \sigma_{x_{2,i}}$ dla dowolnego $i \geqslant 1$.

Dowód.
Załóżmy, że operator unitarny $V : H_1 \to H_2$ ustala unitarną równoważność pomiędzy operatorami U_1 oraz U_2 (tzn. $V \circ U_1 = U_2 \circ V$). Wówczas, $V^{-1}(\mathbf{Z}(x_{2,i})) = \mathbf{Z}(V^{-1}(x_{2,i}))$, a stąd $H_1 = \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathbf{Z}(V^{-1}(x_{2,i}))$. Oczywiście, miara $\sigma_{x_{2,i}}$ (miara spektralna liczona względem operatora U_2) jest równa mierze $\sigma_{V^{-1}(x_{2,i})}$ (miara spektralna liczona względem operatora U_1). Teza naszego wniosku wynika zatem bezpośrednio z twierdzenia spektralnego. □

Jak wynika z powyższego dowodu również i następny wniosek jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia spektralnego.

Wniosek 2.32 *Załóżmy, że U_k jest operatorem unitarnym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H_k, $k = 1, 2$. Jeśli $U_1 \simeq U_2$, to $\sigma_{U_1} = \sigma_{U_2}$ oraz $M_{U_1} = M_{U_2}$ (σ_{U_1}-p.w.).* □

Okazuje się, że para (σ_U, M_U) całkowicie wyznacza operator U.

Twierdzenie 2.33 *Jeśli $\sigma_{U_1} = \sigma_{U_2}$ oraz $M_{U_1} = M_{U_2}$ (σ_{U_1}-p.w.), to $U_1 \simeq U_2$.*

Dowód.
Dla danego $U : H \to H$ mamy (używając lematu 2.14), że jeśli

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n), \quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots$$

jest rozkładem spektralnym, to operator U jest spektralnie izomorficzny z operatorem

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} V_{x_n} : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \sigma_{x_n}) \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \sigma_{x_n}).$$

□

Mówimy, że:

- U ma *proste widmo*, jeśli jego ciąg spektralny jest postaci

$$\sigma_{x_1} \gg 0 \equiv 0 \equiv \ldots;$$

  równoważnie, gdy $M_U = 1$;

- U ma *jednorodne widmo krotności n*, jeśli ciąg spektralny tego operatora ma postać
$$\sigma_{x_1} \equiv \ldots \equiv \sigma_{x_n} \gg 0 \equiv \ldots;$$
równoważnie, gdy $M_U = n$;

- U ma *widmo Lebesgue'a* (*widmo absolutnie ciągłe*, *widmo singularne*, *widmo dyskretne*), gdy σ_{x_1} jest miarą równoważną mierze Lebesgue'a (mierze absolutnie ciągłej względem miary Lebesgue'a, mierze singularnej względem miary Lebesgue'a, mierze dyskretnej).

Liczba $n \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ nazywa się *wartością istotną* funkcji krotności spektralnej operatora U, gdy
$$\sigma_U(\{z \in \mathbf{T} : M_U(z) = n\}) > 0.$$
Istotne supremum funkcji M_U nazywa się *maksymalną krotnością spektralną* operatora U. Niech

(2.17) $E_U = \{n \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\};\ n$ jest istotną wartością funkcji $M_U\}$.

Ćwiczenie 2.34 Niech $V : L^2(\mathbf{T}, \mu) \to L^2(\mathbf{T}, \mu)$, $Vf(z) = zf(z)$. Pokazać, że $\sigma_V = \mu$ oraz $M_V = 1$.

Ćwiczenie 2.35 Pokazać, że operator U ma proste widmo Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza ortonormalna $(x_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$ przestrzeni H taka, że $U^i x_0 = x_i$ dla dowolnego $i \in \mathbf{Z}$. Sformułować i udowodnić podobne kryterium dla jednorodnej krotności Lebesgue'a.

Ćwiczenie 2.36 Niech $U : l^2(\mathbf{Z}) \to l^2(\mathbf{Z})$, $U((x_n)) = (y_n)$, gdzie $y_n = x_{n+1}$. Pokazać, że U ma proste widmo, a maksymalny typ spektralny jest typem Lebesgue'a.

Ćwiczenie 2.37 Pokazać, że $n \in \{1, 2, \ldots\}$ jest istotną wartością funkcji krotności spektralnej operatora U wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym ciągu spektralnym $\sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots$, miara $\sigma_{x_{n+1}}$ nie jest równoważna mierze σ_{x_n}. Pokazać, że ∞ jest istotną wartością funkcji M_U wtedy i tylko wtedy, gdy infimum miar ciągu spektralnego jest różne od miary zerowej.

Pokażmy teraz bardzo szczególny przypadek liczenia miar spektralnych.

Lemat 2.38 *Element $x \in H$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $z_0 \in \mathbf{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy σ_x jest miarą Diraca o atomie z_0, a mówiąc dokładniej, $\sigma_x = \|x\|^2 \delta_{z_0}$.*

Dowód.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że $Ux = z_0 x$. Wówczas

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_x(z) = \langle U^n x, x \rangle = z_0^n \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\delta_{z_0}(z)$$

i stąd $\sigma_x = \|x\|^2 \delta_{z_0}$.

$\Leftarrow$ Jeśli $\langle U^n x, x \rangle = \|x\|^2 z_0^n$, to dla $n = 1$ otrzymujemy, że $|\langle Ux, x \rangle| = \|x\|^2 = \|Ux\| \, \|x\|$, co oznacza, że w nierówności Schwarza mamy równość. Wynika stąd, że $Ux = cx$, skąd $c = z_0$. □

Ćwiczenie 2.39 Pokazać, że dla dowolnych $x, y \in H$ mamy: $\sigma_x(\{1\}) = \|x_1\|^2$, $\sigma_{x,y}(\{1\}) = \langle x_1, y_1 \rangle$, gdzie x_1 (y_1) oznacza rzut ortogonalny elementu x (y) na podprzestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartości własnej 1 (tzn. podprzestrzeń $Fix(U)$ punktów stałych operatora U).

Wskazówka Zauważyć, że jeśli $\sigma_z(\{1\}) > 0$, to $\delta_{\{1\}} \ll \sigma_z$, a więc istnieje element $w \in \mathbf{Z}(z)$ taki, że $\sigma_w = \delta_{\{1\}}$, następnie napisać $x = x_1 + z$, gdzie $z \in Fix(U)^{\perp}$.

Pokażemy teraz inne (oczywiście równoważne do wprowadzonego) rozumienie pojęcie krotności spektralnej.

Niech U będzie operatorem unitarnym na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Niech $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ będzie miarą absolutnie ciągłą względem maksymalnego typu spektralnego σ_U operatora U. Będziemy mówili, że ciąg $x_1, \ldots, x_n$ elementów przestrzeni H jest *typu* σ, gdy spełnia on następujące warunki:

$$\mathbf{Z}(x_i) \perp \mathbf{Z}(x_j) \text{ dla } i \neq j \text{ oraz } \sigma_{x_i} = \sigma \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

W sposób naturalny możemy rozpatrywać *maksymalne* ciągi typu σ (oznacza to, że miara σ NIE jest absolutnie ciągła względem maksymalnego typu spektralnego operatora U działającego w uzupełnieniu ortogonalnym podprzestrzeni $\mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_n)$).

Twierdzenie 2.40 *Dowolne dwa maksymalne ciągi typu σ mają tę samą długość. Ponadto, liczba $m \in \{1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ jest istotną wartością funkcji krotności spektralnej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje maksymalny ciąg pewnego typu σ o długości m.*

Dowód.

Niech więc $x_1, \ldots, x_n$ będzie maksymalnym ciągiem typu σ. Wówczas $H = \mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_n) \oplus H_1$, przy czym miara spektralna dowolnego elementu z H_1 jest różna od σ. Weźmy dowolny rozkład spektralny operatora U na H_1:

$$H_1 = \mathbf{Z}(y_1) \oplus \mathbf{Z}(y_2) \oplus \ldots, \quad \sigma_{y_1} \gg \sigma_{y_2} \gg \ldots.$$

Następnie rozłóżmy $\mathbf{Z}(y_i) = \mathbf{Z}(y_i') \oplus \mathbf{Z}(y_i'')$ tak, aby

$$(*) \quad \sigma_{y_i'} \ll \sigma, \ \text{ oraz } \ \sigma_{y_i''} \perp \sigma,$$

$i \geqslant 1$. Otrzymujemy w ten sposób rozkład

$$H_1 = \overbrace{\mathbf{Z}(y_1') \oplus \mathbf{Z}(y_2') \oplus \ldots}^{H_1'} \oplus \underbrace{\mathbf{Z}(y_1'') \oplus \mathbf{Z}(y_2'') \oplus \ldots}_{H_1''}.$$

Na przestrzeni H_1' maksymalny typ spektralny jest absolutnie ciągły względem miary σ (ponieważ jest on absolutnie ciągły względem $\sum \sigma_{y_i'}$), natomiast maksymalny typ spektralny na H_1'' jest singularny względem miary σ (używając podobnego argumentu).

Ze względu na $(*)$, $\sigma_{y_1'} \gg \sigma_{y_2'} \gg \ldots$ oraz $\sigma_{y_1''} \gg \sigma_{y_2''} \gg \ldots$, a więc rozkłady

$$H_1' = \mathbf{Z}(y_1') \oplus \mathbf{Z}(y_2') \oplus \ldots, \quad H_1'' = \mathbf{Z}(y_1'') \oplus \mathbf{Z}(y_2'') \oplus \ldots$$

sa rozkładami spektralnymi. Mamy więc $\sigma_{y_1'} \ll \sigma$, a ze względu na założenie maksymalności, $\sigma_{y_1'}$ nie jest równoważna mierze σ. Oprócz tego $\sigma_{y_1''} \perp \sigma$.

Możemy teraz napisać

$$H = (\mathbf{Z}(x_1) \oplus \mathbf{Z}(y_1'')) \oplus (\mathbf{Z}(x_2) \oplus \mathbf{Z}(y_2'')) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{Z}(x_n) \oplus \mathbf{Z}(y_n''))\oplus$$

$$\oplus(\mathbf{Z}(y_1') \oplus \mathbf{Z}(y_{n+1}'')) \oplus (\mathbf{Z}(y_2') \oplus \mathbf{Z}(y_{n+2}'')) \oplus \ldots =$$

$$= \mathbf{Z}(x_1+y_1'')\oplus\mathbf{Z}(x_2+y_2'')\oplus\ldots\oplus(\mathbf{Z}(x_n+y_n'')\oplus\mathbf{Z}(y_1'+y_{n+1}'')\oplus\mathbf{Z}(y_2'+y_{n+2}'')\oplus\ldots.$$

Ponieważ w powyższym rozkładzie w sposób oczywisty otrzymaliśmy malejący (względem relacji absolutnej ciągłości) ciąg miar, więc rozkład powyższy jest rozkładem spektralnym. Zapisując ten malejący ciąg miar jako

$$\tilde{\sigma}_1 \gg \tilde{\sigma}_2 \gg \ldots \gg \tilde{\sigma}_n \gg \tilde{\sigma}_{n+1} \gg \ldots,$$

zauważamy, że ma on następującą własność:
przy „przejściu" od miary $\tilde{\sigma}_n$ do miary $\tilde{\sigma}_{n+1}$ następuje „skok", a precyzyjniej mówiąc, w rozkładzie miary $\tilde{\sigma}_n$ względem σ otrzymamy σ (plus pewną miarę singularną względem σ), natomiast w rozkładzie miary $\tilde{\sigma}_{n+1}$ względem σ otrzymamy miarę „mniejszą" niż σ (plus miara singularna względem miary σ). Jest oczywiste, że tego typu własność jest już niezmiennikiem ciągu spektralnego, a zatem pierwsza część twierdzenia została udowodniona. Lecz i druga teza twierdzenia wynika z podanego argumentu. □

Przykład 2.41 Załóżmy, że operator unitarny U ma proste widmo. Wyliczymy teraz ciąg spektralny dla operatora U^m ($m \geqslant 2$).

Dla dowolnego $x \in H$ oraz $n \in \mathbf{Z}$ mamy

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_{x,U^m}(z) = \langle (U^m)^n x, x \rangle = \int_{\mathbf{T}} z^{mn} \, d\sigma_{x,U}(z) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} z^n \, d\,(q_m)_* \sigma_{x,U}(z),$$

gdzie $q_m(z) = z^m$. Zatem $\sigma_{x,U^m} = (q_m)_* \sigma_{x,U}$ i stąd wynika, że σ_{U^m} jest obrazem typu σ_U poprzez odwzorowanie q_m.

Połóżmy $\sigma = \sigma_U$ (zatem możemy zakładać, że $U = V_\sigma$). Niech $\varepsilon_m = e^{2\pi i/m}$. Oznaczmy przez A_i łuk (domknięto-otwarty) okręgu, którego punkty końcowe to ε_m^i oraz ε_m^{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Wówczas: rodzina $\{A_0, \ldots, A_{m-1}\}$ jest rozbiciem okręgu, $q_m(A_i) = \mathbf{T}$, a ponadto $q_m|_{A_i}$ jest 1-1 oraz „na", $i = 0, \ldots, m-1$. Kładąc $\sigma_i = \sigma|_{A_i}$, $\sigma_{m,i} = (q_m)_*(\sigma_i)$ otrzymujemy izometrię surjektywną $U_{q_m} : L^2(\mathbf{T}, \sigma_{m,i}) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma_i)$, gdzie

$$U_{q_m}(f)(z) = f(q_m z) = f(z^m).$$

Mamy

$$U_{q_m}\left(V_{\sigma_{m,i}}(f)\right)(z) = V_{\sigma_{m,i}}(f)(q_m z)$$

$$= V_{\sigma_{m,i}}(f)(z^m) = z^m f(z^m) = z^m U_{q_m}(f)(z) = V^m_{\sigma_i}\left(U_{q_m}(f)\right)(z).$$

Zatem $U_{q_m} \circ V_{\sigma_{m,i}} \circ U^{-1}_{q_m} = V^m_{\sigma_i}$.

Ponieważ podprzestrzeń $\chi_{A_i} L^2(\mathbf{T},\sigma)$ jest V^m_σ niezmiennicza, więc operator V^m_σ na tej podprzestrzeni jest izomorficzny z operatorem mnożenia przez zmienną niezależną na $L^2(\mathbf{T},\sigma_{m,i})$ i w szczególności ma on proste widmo. Wynika stad, że $\operatorname{ess\,sup}(M_{U^m}) \leqslant m$, przy czym dokładne policzenie funkcji krotności spektralnej zależy od wzajemnych relacji pomiędzy miarami $\sigma_{m,0},\ldots,\sigma_{m,m-1}$. Jeśli dla przykładu wszystkie te miary są równoważne, to funkcja krotności przyjmuje tylko jedną wartość równą m. Jeśli miary te są wzajemnie singularne, to operator U^m ma proste widmo. Ogólnie, i jest istotną wartością funkcji M_{U^m} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niezerowa miara η oraz maksymalny wybór podzbioru $\{j_1,\ldots,j_i\}$, dla którego $\eta \ll \sigma_{m,j_s}$, $s=1,\ldots,i$.

Ćwiczenie 2.42 Pokazać, że jeśli U ma jednorodne widmo Lebesgue'a krotności k, to dla dowolnego $n \geqslant 1$ operator U^n ma jednorodne widmo Lebesgue'a krotności nk.

Ćwiczenie 2.43 Załóżmy, że U ma proste widmo, a jego maksymalny typ spektralny jest równy $\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}}\delta_{z_0^n}$, gdzie z_0 nie jest pierwiastkiem z jedności. Pokazać, że U^n ma proste widmo dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Ćwiczenie 2.44 Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że $\nu \in M^+(\mathbf{T})$. Pokazać, że

$$H_\nu = \{x \in H;\ \sigma_x \ll \nu\}$$

jest domkniętą podprzestrzenią U-niezmienniczą. Podprzestrzenie postaci H_ν nazywamy *podprzestrzeniami spektralnymi* operatora U.

Ćwiczenie 2.45 *Załóżmy, że $F \subset H$ jest podprzestrznią spektralną operatora U. Pokazać, że dla dowolnego $x \in H$*

$$\mathrm{proj}_F x = \mathrm{proj}_{F\cap \mathbf{Z}(x)} x.$$

Ćwiczenie 2.46 Niech $U_i : H_i \to H_i$ będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta, $i=1,2$. Załóżmy, że operatory U_1 i U_2 są spektralnie izomorficzne i niech $x_i \in H_i$. Jeśli $U_1|_{\mathbf{Z}(x_1)} \simeq U_2|_{\mathbf{Z}(x_2)}$, to $U_1|_{\mathbf{Z}(x_1)^\perp} \simeq U_2|_{\mathbf{Z}(x_2)^\perp}$.

Uwaga 2.47 Ćwiczenie 2.46 oczywiście łatwo wynika z twierdzenia spektralnego. Zauważmy jednak, że możemy wykazać je bezpośrednio. Istotnie, wystarczy pokazać, że jeśli operator unitarny U jest określony na przestrzeni Hilberta $H = \overline{\mathbf{Z}(x) + \mathbf{Z}(y)}$, gdzie $U|_{\mathbf{Z}(x)} \simeq U|_{\mathbf{Z}(y)}$, to $U|_{\mathbf{Z}(x)^\perp} \simeq U|_{\mathbf{Z}(y)^\perp}$. Udowodnimy ten ostatni fakt. Najpierw zauważmy, że maksymalny typ spektralny σ_U jest równoważny typowi miary σ_x (oraz σ_y), gdyż $\sigma_x \equiv \sigma_y$ oraz $\sigma_{aU^n x + bU^m y} \ll \sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_x$ (a ponadto patrz ćwiczenie 2.44). Niech

$$y = y_1 + y_0,\ x = x_1 + x_0,$$

gdzie $y_1 \in \mathbf{Z}(x), y_0 \in \mathbf{Z}(x)^\perp, x_1 \in \mathbf{Z}(y), x_0 \in \mathbf{Z}(y)^\perp$. Zauważmy, że

$$\mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y_0) = H = \mathbf{Z}(y) \oplus \mathbf{Z}(x_0),$$

gdyż $x, y \in \mathbf{Z}(x) \oplus \mathbf{Z}(y_0)$ (i podobnie $x, y \in \mathbf{Z}(y) \oplus \mathbf{Z}(x_0)$). Pozostaje nam wykazać, że $\sigma_{x_0} \equiv \sigma_{y_0}$. Przypuśćmy więc, że miary te nie są równoważne. Wówczas (ewentualnie zamieniając rolami x i y) możemy znaleźć niezerową miarę ν taką, że

$$\nu \ll \sigma_{y_0},\ \ \nu \perp \sigma_{x_0}.$$

Wybierzmy $x_0' \in \mathbf{Z}(x)$ oraz $y_0' \in \mathbf{Z}(y_0)$ tak, aby $\sigma_{x_0'} = \nu = \sigma_{y_0'}$. Ponieważ $\nu \perp \sigma_{x_0}$, więc $x_0', y_0' \in \mathbf{Z}(x_0)^\perp$, a więc $x_0', y_0' \in \mathbf{Z}(y)$. Skoro jednak $\mathbf{Z}(x_0') \perp \mathbf{Z}(y_0')$, więc z lematu 2.18 mamy $\sigma_{x_0'} \perp \sigma_{y_0'}$ i otrzymaliśmy sprzeczność.

Zauważmy, że powyższy fakt pozwala podać inny dowód twierdzenia spektralnego (tzn. twierdzenia 2.30).

Ćwiczenie 2.48 Niech $(V_\nu f)(z) = zf(z)$ na $L^2(\mathbf{T}, \nu)$. Niech $\operatorname{supp}\nu$ oznacza nośnik topologiczny[7] miary ν. Pokazać, że

$$\operatorname{supp}\nu = \{\lambda \in \mathbf{C};\ V_\nu - \lambda \cdot \mathrm{Id}\ \text{ jest nieodwracalny}\},$$

tzn. $\operatorname{supp}\nu$ jest równy widmu (w sensie Gelfanda, patrz uzupełniający rozdział 7.4) operatora V_ν.

[7] *Nośnikiem topologicznym* miary nazywamy najmniejszy zbiór domknięty, którego dopełnienie ma miarę zero. Zauważmy, że zbiór $B := \bigcup_{U-otwarty, \nu(U)=0} U$ ma miarę zero; w przeciwnym przypadku przybliżamy go z „dołu” przez zbiór zwarty $K \subset B$, który z kolei zawiera się w skończonej liczbie zbiorów U otwartych o mierze zero, stąd $\nu(K) = 0$ i korzystamy z regularności miary. Zauważmy, że miary równoważne mają te same nośniki topologiczne.

Jeśli czytelnik nie rozwiązał ćwiczenia 2.48, poniżej podajemy ogólniejszy fakt.

Stwierdzenie 2.49 *Niech* $(\nu_i)_{i\geqslant 1} \subset M^+(\mathbf{T})$ *spełnia dodatkowo*

$$\nu_1 \gg \nu_2 \gg \ldots .$$

Połóżmy $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_i)$ *oraz* $V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} V_{\nu_i}$. *Wówczas widmo (Gelfanda)* $\sigma(V)$ *operatora* V *jest równe* $\operatorname{supp} \nu_1$.

Dowód.

Przypomnijmy, że $\sigma(V)$ jest równe widmu aproksymatywnemu $\Pi(V)$ (patrz rozdział 7.5). Ustalmy $z_0 \in \mathbf{T}$ takie, że

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists f \in H,\ \|f\|_H = 1) \quad \|z_0 f - V f\|_H < \varepsilon.$$

Przypuśćmy, że $z_0 \notin \operatorname{supp} \nu_1$. Wówczas istnieje $\varepsilon_0 > 0$ taki, że $\nu_1((z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)) = 0$ i stąd $\nu_n((z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)) = 0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Połóżmy $A = (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)^c$. Jeśli $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \in H$ to

$$\|g\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|^2_{L^2(\mathbf{T},\nu_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A |g_i|^2 d\nu_i.$$

Przy zadanym $f \in H$ mamy więc

$$\|z_0 f - V f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A |f_i(z)|^2 |z - z_0|^2 d\nu_i(z) \geqslant$$

$$\varepsilon_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_A |f_i(z)|^2 d\nu_i(z) = \varepsilon_0^2 \|f\|_H^2.$$

Pokazaliśmy, że $\Pi(V) \subset \operatorname{supp} \nu_1$.

Jeśli $z_0 \in \operatorname{supp} \nu_1$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\mu((z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)) > 0.$$

Wystarczy pokazać, że $z_0 \in \sigma(V_1)$ ponieważ $\Pi(V_1) \subset \Pi(V_2)$. Definiujemy funkcję

$$f_\varepsilon(z) := \frac{1}{\sqrt{\nu_1((z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon))}} \chi_{(z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)}(z),$$

której norma w $L^2(\mathbf{T},\nu_1)$ jest równa 1. Ponadto

$$\|z_0 f_\varepsilon - V_1 f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{T},\nu_1)} = \left(\frac{1}{\nu_1((z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon))}\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} |z-z_0|\, d\nu_1(z)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{\nu_1((z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon))}\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \varepsilon^2 d\nu_1(z)\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

□

Ćwiczenie 2.50 Znając ciąg spektralny operatora unitarnego U wyznaczyć ciąg spektralny operatora odwrotnego. Pokazać, że operator unitarny U jest izomorficzny ze swoim odwrotnym wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu spektralnym operatora U występują jedynie miary symetryczne (miarę ν na $\mathbf{T}$ nazywa się *symetryczną*, gdy $\nu(A) = \nu(\overline{A})$ dla dowolnego podzbioru borelowskiego $A \subset \mathbf{T}$).

Zobaczmy jeszcze, jaki jest związek pomiędzy miarami spektralnymi σ_x i σ_{Ax}, gdy A jest operatorem przemiennnym z U.

Stwierdzenie 2.51 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Niech $A : H \to H$ będzie liniowy i ograniczony, $A \circ U = U \circ A$. Wówczas dla dowolnego $x \in H$:*
(i) $\sigma_{Ax} \ll \sigma_x$,
(ii) $\sigma_{Ax} = \sigma_x$, o ile A jest izometrią.

Dowód.
(i) Ponieważ, dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$,

$$\langle U^n Ax, Ax\rangle = \langle AU^n x, Ax\rangle = \langle U^n x, A^*Ax\rangle,$$

więc $\sigma_{Ax} = \sigma_{x,A^*Ax} \ll \sigma_x$.

(ii) Ze względu na izometryczność operatora A, powtarzając powyższy rachunek, otrzymujemy natychmiast

$$\langle U^n Ax, Ax\rangle = \langle U^n x, x\rangle,$$

co kończy dowód. $\square$

Pokażemy teraz jeszcze inne podejście pozwalające zdefiniować zarówno maksymalny typ spektralny, jak i funkcję krotności spektralnej operatora unitarnego.

Niech $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ i niech F będzie przestrzenią Hilberta. Definiujemy

$$L^2(\mathbf{T}, \sigma; F) := \{f : \mathbf{T} \to F;\ \int_{\mathbf{T}} \|f\|^2 \, d\sigma < +\infty\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że wzór

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}} \langle f(z), g(z) \rangle_F \, d\sigma(z)$$

jest iloczynem skalarnym na $L^2(\mathbf{T}, \sigma; F)$ i że w ten sposób otrzymaliśmy nową przestrzeń Hilberta. Weźmy teraz $F = l^2 = l^2(\mathbf{N})$. Niech $M : \mathbf{T} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ będzie funkcją mierzalną, określoną σ-p.w. Kładziemy

$$H_{\sigma,M} := \{f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma; l^2); f(z) = (f_1(z), \ldots, f_{M(z)}(z), 0, \ldots) \text{ dla } \sigma\text{–p.w. } \in \mathbf{T}\}.$$

Lemat 2.52 *$H_{\sigma,M}$ jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni $L^2(\mathbf{T}, \sigma; l^2)$.*

Dowód.

Załóżmy, że $f^{(k)} \in H_{\sigma,M}$, $f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma; l^2)$ oraz $f^{(k)} \to f$, tzn. $\int_{\mathbf{T}} \left\| f^{(k)} - f \right\|^2 d\sigma \to 0$. Mamy więc $\int_{\mathbf{T}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| f_i^{(k)}(z) - f_i(z) \right| |^2 \, d\sigma(z) \to 0$, gdy $k \to \infty$ i stąd dla każdego $i \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbf{T}} \left| f_i^{(k)}(z) - f_i(z) \right|^2 \, d\sigma(z) \to 0.$$

Ustalmy $n \in \mathbf{N}$ i niech $B_n = \{z \in \mathbf{T};\ M(z) = n\}$. Wówczas dla dowolnego $i \geqslant n+1$ i dowolnego $k \geqslant 1$, $f_i^{(k)}(z) = 0$ na B_n, a skoro

$$\int_{B_n} \left| f_i^{(k)}(z) - f_i(z) \right|^2 \, d\sigma(z) \to 0, \text{ gdy } k \to \infty,$$

więc $f_i(z) = 0$ dla σ-p.w. $z \in B_n$. $\square$

Określamy teraz operator unitarny U na przestrzeni $H_{\sigma,M}$ kładąc

$$(Uf)(z) = zf(z) = (zf_1(z), zf_2(z), \ldots).$$

Twierdzenie 2.53 *Dla określonego powyżej operatora unitarnego U mamy $\sigma_U = \sigma$ oraz $M_U = M$.*

Dowód.

Dla $n \geqslant 1$ lub $n = +\infty$ połóżmy $B_n = \{z \in \mathbf{T};\ M(z) = n\}$. Oczywiście zbiory B_n są mierzalne, $B_n \cap B_m = \emptyset$, gdy $n \neq m$ oraz $\bigcup_n B_n = \mathbf{T}$ (modulo σ). Dla $n \geqslant 1$ kładziemy

$$H_{n,1} = \mathbf{Z}((\chi_{B_n}, 0, 0, \ldots)),$$

$$H_{n,2} = \mathbf{Z}((0, \chi_{B_n}, 0, 0, \ldots)),$$

$$\ldots,$$

$$H_{n,n} = \mathbf{Z}((0, \ldots, 0, \chi_{B_n}, 0, 0, \ldots)).$$

Podobnie definiujemy podprzestrzenie $H_{\infty,i}$, $i \geqslant 1$. Zauważmy, że na podprzestrzeni $H_{n,i}$ maksymalny typ spektralny operatora U jest równy $\sigma|_{B_n}$. Łatwo sprawdzamy, że

$$H_{\sigma,M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} H_{n,i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\infty} H_{\infty,j} = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots,$$

gdzie

$$F_1 = H_{1,1} \oplus H_{2,1} \oplus \ldots \oplus H_{\infty,1}, F_2 = H_{2,2} \oplus H_{3,2} \oplus \ldots \oplus H_{\infty,2}, \ldots$$

Zauważmy, że przestrzenie F_j są cykliczne, a ponadto typ spektralny operatora U na F_j jest równy $\sigma|_{\bigcup_{i \geqslant j} B_i}$, co daje nam natychmiast tezę twierdzenia. □

2.4 Krotność spektralna operatorów unitarnych

Naszym celem będzie teraz podanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby maksymalna krotność spektralna operatora unitarnego była większa od zadanej liczby naturalnej.

Lemat 2.54 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że*

$$H = \mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m),\ \sigma_{x_1} = \ldots = \sigma_{x_m} = \sigma,$$

$\|x_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, m$. *Niech $y \in H$, $\|y\| \leqslant 1$. Weźmy $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{Z}(y)$. Wówczas*

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i - y_i\|^2 \geqslant m - 1. \tag{2.18}$$

Dowód.

Zamieńmy najpierw y na $y' \in \mathbf{Z}(y)$ tak, aby $\sigma_y \equiv \sigma_{y'}$, $\|y'\| \leqslant 1$ oraz $\sigma_{y'} \leqslant \sigma$. Bez straty ogólności możemy zatem zakładać, że $\sigma_y \leqslant \sigma$. Oznaczmy $\nu = \sigma_y$. Wtedy $\nu \leqslant \sigma$ i dla dowolnego $i = 1, \ldots, m$

$$x_i = x_i' + z_i,$$

gdzie $x_i', z_i \in \mathbf{Z}(x_i)$ oraz

$$\sigma_{x_i'} = \nu,\ \ \sigma_{z_i} \perp \nu, \tag{2.19}$$

$i = 1, \ldots, m$. Zauważmy, że

$$\langle \omega, x_i \rangle = \langle \omega, x_i' \rangle \text{ dla dowolnego } \omega \in \mathbf{Z}(y), \tag{2.20}$$

gdyż $\sigma_\omega \ll \nu$ (i stąd $\omega \perp \mathbf{Z}(z_i)$). Mamy

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i - y_i\|^2 = m - 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{m} \langle x_i, y_i \rangle + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant m - 2\sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, y_i \rangle| + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2.$$

Wystarczy pokazać nierówność (2.18) w przypadku $y_i = p_i(U)y$, gdzie p_i jest dowolnym wielomianem trygonometrycznym (rzeczywiście, lewa strona nierówności (2.18) zależy w sposób ciągły od $y_1, \ldots, y_m$). Korzystając teraz kolejno z: (2.20), z faktu, że operator $p_i(U)$ jest przemienny z projekcją ortogonalną $\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)}$, nierówności Schwarza, nierówności Cauchy-Buniakowskiego, z faktu, że $p_i(U)$ jest operatorem normalnym (a więc $\|p_i(U)y\| = \|p_i(U)^*y\|$), twierdzenia spektralnego i (2.19), otrzymujemy, że

$$\sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, y_i\rangle| = \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, p_i(U)y\rangle| = \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i', p_i(U)y\rangle| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i', p_i(U)(\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)}y)\rangle| = \sum_{i=1}^{m} |\langle p_i(U)^*x_i', \mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)}y\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \|p_i(U)^*x_i'\| \cdot \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)}y\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|p_i(U)^*x_i'\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)}y\|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \|p_i(U)x_i'\|^2\right)^{1/2} \left(\|y\|^2\right)^{1/2} = \|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbf{T}} |p_i(z)|^2 \, d\sigma_{x_i'}(z)\right)^{1/2} =$$

$$= \|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbf{T}} |p_i(z)|^2 \, d\nu(z)\right)^{1/2} = \|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbf{T}} |p_i(z)|^2 \, d\sigma_y(z)\right)^{1/2} =$$

$$= \|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \|p_i(U)y\|^2\right)^{1/2} = \|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2\right)^{1/2}.$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i - y_i\|^2 \geqslant m - 2\|y\| \left(\sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant m - 2 \left(\sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2 \geqslant m - 1$$

(gdyż $m - 2a + a^2 \geqslant m - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a-1)^2 \geqslant 0$, $a = \left(\sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2\right)^{1/2}$). □

Twierdzenie 2.55 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że $\operatorname{ess\,sup}(M_U) \geqslant m$ ($m \geqslant 1$). Wówczas istnieje zbiór ortonormalny $\{x_1, \ldots, x_m\}$ taki, że dla dowolnego $y \in H$ i dowolnych $y_1, \ldots, y_m \in \mathbf{Z}(y)$ mamy*

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i - y_i\|^2 \geqslant m - 1.$$

Dowód.

Z założenia wynika, że możemy znaleźć wektory jednostkowe $x_1, \dots, x_m$ takie, że $\sigma_{x_1} = \ldots = \sigma_{x_m}$ oraz $H = \mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m) \oplus F$. Weźmy dowolny $y \in H$. Jeśli $y = 0$, to twierdzenie zachodzi. Możemy więc założyć, że $y \neq 0$, a nawet, że $\|y\| = 1$ (gdyż $\mathbf{Z}(y) = \mathbf{Z}(y/\|y\|)$). Ustalmy $y_1, \dots, y_m \in \mathbf{Z}(y)$. Oznaczmy

$$\hat{y} = \mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m)}(y), \quad \hat{y}_i = \mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m)}(y_i),$$

$i = 1, \dots, m$. Twierdzimy, że $\hat{y}_i \in \mathbf{Z}(\hat{y})$. Istotnie, element y_i może być dowolnie przybliżany elementami postaci $q(U)y$, gdzie q jest wielomianem trygonometrycznym, a ponadto operator $q(U)$ jest przemienny z projekcją ortogonalną $\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m)}$. Stosujemy teraz lemat 2.54 do $\mathbf{Z}(x_1) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_m)$ oraz $\hat{y}$, $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m$ otrzymując

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i - \hat{y}_i\|^2 \geqslant m - 1.$$

Ale wektory $x_i - \hat{y}_i$, $\hat{y}_i - y_i$ są prostopadłe, więc

$$\|x_i - y_i\|^2 = \|x_i - \hat{y}_i\|^2 + \|\hat{y}_i - y_i\|^2 \geqslant \|x_i - \hat{y}_i\|^2,$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 2.56 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Wówczas* $\operatorname{ess\,sup}(M_U) \geqslant m$ *($m \geqslant 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór ortonormalny $\{x_1, \dots, x_m\}$ taki, że dla dowolnego $y \in H$,*

$$\sum_{i=1}^{m} d^2(x_i, \mathbf{Z}(y)) \geqslant m - 1.$$

Dowód.

Konieczność wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.55 (biorąc za $y_i = \mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(y)} x_i$, $i = 1, \dots, m$). Przejdźmy więc do dowodu dostateczności.

Wystarczy pokazać, że dla $i \neq j$, $\mathbf{Z}(x_i) \perp \mathbf{Z}(x_j)$ oraz $\sigma_{x_i} \equiv \sigma_{x_j}$. Otóż, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, dla dowolnego $y \in H$ mamy

$$d^2(x_i, \mathbf{Z}(y)) = \|x_i - \mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(y)} x_i\|^2 = 1 - \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(y)} x_i\|^2.$$

Sumując po i i korzystając z założenia otrzymujemy, że

$$m-1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} d^2(x_i, \mathbf{Z}(y)) = m - \sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(y)} x_i\|^2,$$

co oznacza, że $\sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(y)} x_i\|^2 \leqslant 1$. Biorąc za y element x_i (oczywiście $\|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)} x_i\| = 1$) otrzymujemy natychmiast, że $\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(x_i)} x_j = 0$ dla $j \neq i$ i stąd wynika już prostopadłość odpowiednich przestrzeni cyklicznych.

Pokażemy teraz równoważność miar $\sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_m}$. Gdyby miary te nie były równoważne, to (ewentualnie przenumerowując elementy $x_1, \ldots, x_m$) mielibyśmy

$$\sigma_{x_1} = \nu_2 + \rho_2, \text{ gdzie } \nu_2 \ll \sigma_{x_2},\ 0 \neq \rho_2 \perp \sigma_{x_2}.$$

Ponieważ $\rho_2 \ll \sigma_{x_1}$, więc istnieje $z_1 \in \mathbf{Z}(x_1)$ taki, że $\rho_2 = \sigma_{z_1}$. Połóżmy $z = z_1 + x_2$. Ponieważ $\sigma_{z_1} \perp \sigma_{x_2}$, więc $\mathbf{Z}(z) = \mathbf{Z}(z_1) \oplus \mathbf{Z}(x_2)$. Mamy

$$1 \geqslant \sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(z)} x_i\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(z)} x_1\|^2 + \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(z)} x_2\|^2 = \|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(z)} x_1\|^2 + \|x_2\|^2 > 1,$$

gdyż $\|\mathrm{proj}_{\mathbf{Z}(z)} x_1\|^2 > 0$ i otrzymaliśmy sprzeczność. □

Ćwiczenie 2.57 Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H i niech $F \subset H$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Pokazać, że $M_{U|F} \leqslant M_U$.

Ćwiczenie 2.58 Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H i niech $H = \mathrm{span}\{U^j x_i;\ i = 1, \ldots, m, j \in \mathbf{Z}\}$. Pokazać, że $\mathrm{ess\,sup}(M_U) \leqslant m$.

Ćwiczenie 2.59 Jeśli F_1 i F_2 są domkniętymi, wzajemnie prostopadłymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta H, to zachodzi wzór

$$\mathrm{proj}_{F_1 \oplus F_2} y = \mathrm{proj}_{F_1} y + \mathrm{proj}_{F_2} y$$

dla dowolnego $y \in H$.

Poniższy wniosek będzie użytecznym kryterium szacowania krotności spektralnej z góry.

Wniosek 2.60 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Jeśli istnieje $c > 0$ oraz ciąg przestrzeni cyklicznych $F_n \subset H$, $n \geqslant 1$, taki, że dla dowolnego $y \in H$ o długości 1 mamy*

$$\liminf_{n\to\infty} \|\mathrm{proj}_{F_n} y\|^2 \geqslant c, \tag{2.21}$$

to $\operatorname{ess\,sup}(M_U) \leqslant \frac{1}{c}$.

Dowód.
Załóżmy, że $\operatorname{ess\,sup}(M_U) \geqslant m$. Wówczas istnieje zbiór ortonormalny $\{x_1, \ldots, x_m\}$ taki, że $\sum_{i=1}^m d^2(x_i, F) \geqslant m-1$ dla dowolnej przestrzeni cyklicznej F. W szczególności,

$$m - 1 \leqslant \sum_{i=1}^m d^2(x_i, F_n) = \sum_{i=1}^m (\|x_i\|^2 - \|\mathrm{proj}_{F_n} x_i\|^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^m (1 - \|\mathrm{proj}_{F_n} x_i\|^2)$$

i biorąc w (2.21) za y kolejno $x_1, \ldots, x_m$ otrzymamy, że $m - 1 \leqslant m(1-c)$, a zatem $m \leqslant 1/c$. □

Wniosek 2.61 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Niech dany będzie ciąg rosnący $F_n \subset H$, $n \geqslant 1$, domkniętych podprzestrzeni niezmienniczych takich, że*

$$\operatorname{ess\,sup}(M_{U|F_n}) \leqslant r$$

oraz

$$\mathrm{proj}_{F_n} y \to y \tag{2.22}$$

dla dowolnego $y \in H$. Wówczas $\operatorname{ess\,sup}(M_U) \leqslant r$.

Dowód.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $\operatorname{ess\,sup}(M_{U|F_n}) = r$. Pokażemy teraz, że można teraz tak wybrać ciągi $(x_{n,i})_n$, $i = 1, \ldots, r$, aby dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$F_n = \mathbf{Z}(x_{n,1}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n,r}), \ \ \sigma_{x_{n,1}} \gg \ldots \gg \sigma_{x_{n,r}} \neq 0$$

oraz

$$\mathbf{Z}(x_{n,i}) \subset \mathbf{Z}(x_{n+1,i}), \ i = 1, \ldots r.$$

Wówczas z dowodu lematu 2.28 wynika, że $G_i := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_{n,i})}$ jest przestrzenią cykliczną, natomiast założenie (2.22) implikuje, że $\overline{G_1 + \ldots + G_r} = H$, co oznacza, że krotność operatora U nie przekracza liczby r.

Pozostaje zatem wskazanie, jak wybrać ciągi $(x_{n,i})_n$, $i = 1, \ldots, r$ o powyższych własnościach. Załóżmy zatem, że jesteśmy na etapie n. Podprzestrzeń $\mathbf{Z}(x_{n,1})$ rozszerzamy do maksymalnej podprzestrzeni cyklicznej $\mathbf{Z}(x_{n+1,1})$ w F_{n+1}. Wtedy $\mathbf{Z}(x_{n+1,1}) = \mathbf{Z}(x_{n,1}) \oplus \mathbf{Z}(y_{n,1})$ (dla pewnego $y_{n,1} \in F_{n+1}$), przy czym

$$(*) \qquad \sigma_{y_{n,1}} \perp \sigma_{x_{n,1}}.$$

Zauważmy, że z $(*)$ wynika, że

$$\mathbf{Z}(x_{n+1,1}) \perp \mathbf{Z}(x_{n,2}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n,r}).$$

Następnie rozszerzamy podprzestrzeń $\mathbf{Z}(x_{n,2})$ do maksymalnej podprzestrzeni cyklicznej w $F_{n+1} \ominus \mathbf{Z}(x_{n+1,1})$ otrzymując podprzestrzeń $\mathbf{Z}(x_{n+1,2})$, przy czym argument podobny do $(*)$ pokazuje, że

$$\mathbf{Z}(x_{n+1,1}) \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1,2}) \perp \mathbf{Z}(x_{n,3}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n,r}),$$

itd. (postępując podobnie do dowodu twierdzenia spektralnego, co da nam natychmiast żądane relacje absolutnej ciągłości miar). Musimy teraz jedynie uzasadnić, że

$$F_{n+1} = \mathbf{Z}(x_{n+1,1}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1,r}).$$

Gdybyśmy nie mieli równości, to istniałaby podprzestrzeń cykliczna $\mathbf{Z}(z)$ zawarta w F_{n+1} i ortogonalna do prawej strony powyższej równości. Jeśli miara spektralna σ_z nie jest ortogonalna do $\sigma_{x_{n+1,r}}$, to biorąc część absolutnie ciągłą względem obu tych miar uzyskujemy, że miara ta ma krotność co najmniej $r+1$ i sprzeczność. Jeśli zaś miary te są wzajemnie singularne, to

$\mathbf{Z}(z) \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1,r})$ jest przestrzenią cykliczną i znowu mamy sprzeczność – tym razem – z maksymalnością podprzestrzeni. $\square$

2.5 Własności charakterystyczne operatorów unitarnych z widmem prostym

Załóżmy, że U jest operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Niech $C(U) = \{W \in \mathcal{U}(H);\ WU = UW\}$. Oczywiście $C(U)$ jest grupą. Grupę tę nazywamy *centralizatorem* operatora U.

Ćwiczenie 2.62 Pokazać, że $C(U)$ jest podzbiorem domkniętym w mocnej topologii operatorowej. Wykazać, że z tą topologią $C(U)$ jest metryzowalną grupą topologiczną ośrodkową i zupełną. Pokazać, że na $C(U)$ słaba i mocna topologia operatorowa są sobie równe.

Jeśli U ma proste widmo, to bez straty ogólności możemy zakładać, że $U = V_\sigma$.

Lemat 2.63 *Niech $W : L^2(\mathbf{T}, \sigma) \to L^2(\mathbf{T}, \sigma)$ będzie operatorem unitarnym takim, że $W \circ V_\sigma = V_\sigma \circ W$. Wówczas istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbf{T}, \sigma)$, $|g| = 1$, taka, że*

$$W(f)(z) = g(z)f(z)$$

dla σ-p.w. $z \in \mathbf{T}$.

Dowód.
Połóżmy $g := W(1)$. Dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$ mamy

$$W(z^n) = W(V_\sigma^n(1))(z) = V_\sigma^n(W(1))(z) = z^n g(z).$$

Zatem dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego $P = P(z)$ mamy $W(P)(z) = g(z)P(z)$. Ale $\|W(P)\|^2 = \|P\|^2$, więc

$$\int_{\mathbf{T}} |P(z)|^2 d((|g(\cdot)|^2 - 1)\sigma)(z) = \int_{\mathbf{T}} (|g(z)|^2 - 1)|P(z)|^2\, d\sigma(z) = 0,$$

co oznacza, że dla miary zespolonej $(|g|^2 - 1)d\sigma$ całki kwadratów modułów wielomianów trygonometrycznych są równe zero. To jest jednak możliwe jedynie dla miary zerowej (patrz ćwiczenie 1.15), a stąd $|g| = 1$ (σ-p.w.). Wynika stąd, że operator mnożenia przez g jest operatorem unitarnym na $L^2(\mathbf{T}, \sigma)$ – operator ten jest zatem równy W. $\square$

Oczywistą konsekwencją powyższego lematu jest więc następujące

Stwierdzenie 2.64 *Jeśli U ma proste widmo, to $C(U)$ jest grupą abelową.* $\square$

Ćwiczenie 2.65 Pokazać, że stwierdzenie 2.64 w istocie jest charakteryzacją prostoty widma, tzn. jeśli U nie ma prostego widma, to $C(U)$ nie jest grupą abelową.

Ćwiczenie 2.66 Pokazać, że jeśli $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ jest miarą symetryczną, to każdy izomorfizm W pomiędzy V_σ i V_σ^{-1} jest postaci $Wf(z) = h(z)f(\overline{z})$ dla pewnej funkcji $h \in L^2(\mathbf{T}, \sigma)$ o module 1.

Ćwiczenie 2.67 Pokazać, że jeśli $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ jest miarą symetryczną, to każdy izomorfizm W pomiędzy V_σ i V_σ^{-1} zachowujący podprzestrzeń funkcji hermitowskich jest inwolucją.
Wskazówka Zauważyć, że $\chi_{\mathbf{T}}$ oraz $I(\chi_{\mathbf{T}})$ są funkcjami hermitowskimi.

Ćwiczenie 2.68 Pokazać, że jeśli $U \in \mathcal{U}(H)$ ma proste widmo, $A : H \to H$ jest liniowy i ograniczony oraz $A \circ U = U \circ A$, to istnieje ciąg wielomianów trygonometrycznych ($p_n = p_n(z)$) taki, że $p_n(U) \to A$ w mocnej topologii operatorowej. Wywnioskować stąd, że półgrupa operatorów liniowych i ciągłych, komutujących z U jest przemienna.
Wskazówka Pokazać, że każdy operator liniowy i ciągły, przemienny z V_σ jest mnożeniem przez funkcję ograniczoną.

Ćwiczenie 2.69 Pokazać, że jeśli $U \in \mathcal{U}(H)$ ma proste widmo, $F \subset H$ jest (domkniętą) podprzestrzenią niezmienniczą, to $proj_F(\mathbf{Z}(x)) = \mathbf{Z}(proj_F x)$. Czy podobny fakt ma miejsce dla operatorów o wielokrotnym widmie?
Wskazówka Dla przestrzeni Hilberta F i operatora $V \in \mathcal{U}(F)$ z prostym widmem rozpatrzeć operator liniowy i ciągły $A : F \to F$, dla którego obraz $A(F)$ NIE jest domknięty w F. Dla $U = V \oplus V \in \mathcal{U}(F \oplus F)$ pokazać, że rzut ortogonalny na „drugą współrzędną" w przestrzeni $H = F \oplus F$ podprzestrzeni $\{x + Ax;\ x \in F\}$ nie jest domknięty.

Ćwiczenie 2.70 Pokazać, że operator U z prostym widmem ma symetryczny maksymalny typ spektralny wtedy i tylko wtedy, gdy U jest złożeniem dwóch inwolucji (unitarnych).

Lemat 2.71 *Załóżmy, że U ma proste widmo i niech H_1, H_2 będą podprzestrzeniami niezmienniczymi.*
(i) Jeśli $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, to $H_1 \perp H_2$.
(ii) Jeśli $U|_{H_1} \sim U|_{H_2}$, to $H_1 = H_2$.

Dowód.
Obie tezy wynikają natychmiast z lematu Wienera (miary $\sigma|_A$ i $\sigma|_B$ są równoważne wtedy i tylko wtedy $A = B$ modulo σ). □

Lemat 2.72 *Jeśli U ma proste widmo z maksymalnym typem spektralnym σ, to*

$$\{x \in H;\ \sigma_x \equiv \sigma\}$$

jest zbiorem typu G_δ i gęstym w H.

Dowód.
Niech $L_n = \{f \in L^2(\mathbf{T}, \sigma);\ \sigma(\mathbf{T} \setminus \operatorname{supp} f) < \frac{1}{n}\}$. Przypuśćmy, że dla pewnej $\delta > 0$, $\|f - g\|^2 < \delta$. Wówczas

$$\int_{\mathbf{T} \setminus \operatorname{supp} g} |f|^2\, d\sigma = \int_{\mathbf{T} \setminus \operatorname{supp} g} |f - g|^2\, d\sigma < \delta.$$

Istnieje $\eta_0 > 0$ taka, że $\sigma([|f| < \eta_0]) < \frac{1}{n}$ oraz

$$\int_{(\mathbf{T} \setminus \operatorname{supp} g) \cap [|f| \geqslant \eta_0]} |f|^2 d\sigma \geqslant \eta_0^2 \cdot \sigma((\mathbf{T} \setminus \operatorname{supp} g) \cap [|f| \geqslant \eta_0]).$$

Wybierając teraz δ dostatecznie małe jasnym jest, że zbiór L_n jest otwarty w $L^2(\mathbf{T}, \sigma)$. Zbiór $L = \bigcap_{n \geqslant 1} L_n$ jest równy podzbiorowi funkcji σ-p.w. różnych od zera. Ponieważ dowolną funkcję z $L^2(\mathbf{T}, \sigma)$ można przybliżać z dowolna dokładnością funkcjami σ-p.w. różnymi od zera, więc teza została udowodniona. □

Ćwiczenie 2.73 Pokazać, że teza lematu 2.72 zachodzi dla dowolnego operatora unitarnego.

Ćwiczenie 2.74 Niech $U \in \mathcal{U}(H)$. Pokazać, że dowolny element $x \in H$ jest postaci $x = x_1 + x_2$, gdzie x_i realizuje maksymalny typ spektralny.
<u>Wskazówka</u> Zauważyć, że jeśli L jest podzbiorem typu G_δ i gęstym w $L^2(\mathbf{T}, \sigma)$, to $L - x$ ma tę samą własność.

Powiemy, że operator unitarny $U : H \to H$ jest (unitarnie) *koalescentny*, jeśli każda izometria przemienna z U jest operatorem odwracalnym.

Twierdzenie 2.75 *Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że ∞ nie jest istotną wartością funkcji M_U. Wówczas U jest koalescentny.*

Dowód.
Niech $W : H \to H$ będzie izometrią taką, że $WU = UW$. Na mocy twierdzenia spektralnego

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n), \quad \text{gdzie } \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots .$$

Dla $n \in \mathbf{Z}$ i $z \in H$ mamy $\langle U^n Wz, Wz\rangle = \langle WU^n z, Wz\rangle = \langle U^n z, z\rangle$, więc $\sigma_{Wx_n} = \sigma_{x_n}$, $n \geqslant 1$ oraz

$$WH = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W\mathbf{Z}(x_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(Wx_n).$$

Przypuśćmy, że $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(Wx_n) \oplus F$, gdzie $F \neq \{0\}$. Weźmy $0 \neq y \in F$. Dla otrzymania sprzeczności (a więc dla zakończenia dowodu) wystarczy teraz pokazać, że $\sigma_y \ll \sigma_{x_n}$ dla wszystkich $n \geqslant 1$, gdyż jedyną miarą absolutnie ciągłą względem wszystkich miar σ_{x_n} jest miara zerowa (patrz ćwiczenie 2.37). Oczywiście mamy $\sigma_y \ll \sigma_{x_1}$. Ale $U|_{\mathbf{Z}(x_1)}$ oraz $U|_{\mathbf{Z}(Wx_1)}$ są spektralnie izomorficzne, więc ze względu na ćwiczenie 2.46, operatory $U|_{\mathbf{Z}(x_1)^\perp}$ oraz $U|_{Z(Wx_1)^\perp}$ są również izomorficzne. Mamy więc σ_y jest miarą absolutnie ciągłą względem maksymalnego typu spektralnego operatora $U|_{\mathbf{Z}(Wx_1)^\perp}$ (bo $y \in \mathbf{Z}(Wx_1)^\perp$), który jest równy σ_{x_2} (bo jest on równy maksymalnemu typowi spektralnemu operatora $U|_{\mathbf{Z}(x_1)^\perp}$). Zatem $\sigma_y \ll \sigma_{x_2}$. Rozważmy teraz $U : \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n) \to \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n)$ oraz $U : \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbf{Z}(Vx_n) \oplus F \to$

$\bigoplus_{n=2}^{\infty}\mathbf{Z}(Vx_n)\oplus F$. Otóż te dwa operatory są spektralnie izomorficzne, a ponadto ich maksymalne typy spektralne są równe $\sigma_{x_2}(=\sigma_{Wx_2})$. Ponownie używając ćwiczenia 2.46 otrzymujemy, że $U:\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbf{Z}(x_n)\to\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbf{Z}(x_n)$ oraz $U:\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbf{Z}(Wx_n)\oplus F\to\bigoplus_{n=3}^{\infty}\mathbf{Z}(Wx_n)\oplus F$ są również spektralnie izomorficzne. Ponieważ ich maksymalny typ spektralny jest równy σ_{x_3}, więc $\sigma_y\ll\sigma_{x_3}$. W ten sposób łatwo otrzymujemy, że $\sigma_y\ll\sigma_{x_n}$ dla dowolnego $n\geqslant 1$. □

Ćwiczenie 2.76 Pokazać, że gdy ∞ jest istotną wartością operatora $U\in\mathcal{U}(H)$, to U nie jest koalescentny.

Ćwiczenie 2.77 Pokazać, że $U\in\mathcal{U}(H)$ jest koalescenty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej (domkniętej) podprzestrzeni niezmienniczej $F\subset H$ operatory U i $U|_F$ nie są spektralnie izomorficzne.

2.6 Równoważność cykliczna operatorów unitarnych

Jak już widzieliśmy, każdy operator unitarny jest całkowicie wyznaczony przez dwa niezmienniki: maksymalny typ spektralny i funkcję krotności spektralnej. W tym podrozdziale pokażemy, że można tak osłabić pojęcie równoważności reprezentacji spektralnej, że w zasadzie klasyfikacja sprowadzi się do funkcji krotności spektralnej, a nawet jedynie do wyznaczenia zbioru istotnych wartości tej funkcji.

Niech $U\in\mathcal{U}(H)$ i niech

$$\sigma_{x_1}\gg\sigma_{x_2}\gg\ldots$$

będzie ciągiem spektralnym operatora U. Rozkładając każdą z miar $\sigma_{x_n}=\sigma_{x_n}^d+\sigma_{x_n}^c$ na sumę części dyskretnej i części ciągłej, otrzymujemy w szczególności

$$\sigma_{x_1}^c\gg\sigma_{x_2}^c\gg\ldots \tag{2.23}$$

Funkcję $M_U^c:\mathbf{T}\to\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ zadaną wzorem

$$M_U^c(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{C_n}(z),$$

gdzie $C_1(U) = C_1 = \mathbf{T}$ oraz $C_n(U) = C_n = \{z \in \mathbf{T} : \frac{d\sigma^c_{x_n}}{d\sigma^c_{x_1}}(z) > 0\}$ nazywamy *funkcją c-krotności spektralnej.* Zbiór

$$E^c(U) = \{n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\} : \sigma_{x_1}\{z \in \mathbf{T} : M^c_U(z) = n\} > 0\}$$

nazywamy zbiorem *istotnych wartości* funkcji M^c_U. Połóżmy $D(U) : \mathbf{N} \cup \{+\infty\} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, $D(U)(n) = card\, D_n$, gdzie

$$D_n = \begin{cases} \{z \in supp_{x_n} \setminus supp\, \sigma_{x_{n+1}} : \sigma_{x_1}(\{z\}) > 0\} & \text{dla} \quad n = 1, 2, ... \\ \{z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} supp_{x_n} : \sigma_{x_1}(\{z\}) > 0\} & \text{dla} \quad n = +\infty. \end{cases}$$

Lemat 2.78 *Niech $U_i \in \mathcal{U}(H_i)$, $i = 1, 2$. Załóżmy, że $V : H_1 \to H_2$ jest izometrią „na". Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) *Dla dowolnego $x \in H_1$, $\mathbf{Z}(Vx) = V\mathbf{Z}(x)$.*

(ii) *Jeśli $H \subset H_1$ jest domkniętą podprzestrzenią U_1-niezmienniczą, to $VH \subset H_2$ jest domkniętą podprzestrzenią U_2-niezmienniczą i jeśli $H' \subset H_2$ jest domkniętą podprzestrzenią U_2-niezmienniczą, to $V^{-1}H' \subset H_1$ jest domkniętą podprzestrzenią U_1-niezmienniczą.*

Dowód.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Załóżmy więc, że $H \subset H_1$ jest domkniętą podprzestrzenią U_1-niezmienniczą i niech $y \in VH$. Niech $x \in H$ spełnia $y = Vx$. Ponieważ $\mathbf{Z}(y) = V\mathbf{Z}(x)$, więc

$$U_2^{-1}y, U_2 y \in \mathbf{Z}(y) = V\mathbf{Z}(x) \subset VH$$

i dlatego VH jest U_2-niezmiennicza. Ponieważ w (i) możemy zastąpić V przez V^{-1}, więc (ii) zostało udowodnione.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $x \in H_1$. Ponieważ $\mathbf{Z}(x)$ jest U_1-niezmiennicza, z założenia, $V\mathbf{Z}(x)$ jest U_2-niezmiennicza. Ponieważ $Vx \in V\mathbf{Z}(x)$, więc $\mathbf{Z}(Vx) \subset V\mathbf{Z}(x)$. Podobnie, jeśli $y = Vx$, to $\mathbf{Z}(x) = \mathbf{Z}(V^{-1}y) \subset V^{-1}\mathbf{Z}(y) = V^{-1}\mathbf{Z}(Vx)$. Stąd wynika, że $V\mathbf{Z}(x) \subset \mathbf{Z}(Vx)$, następnie $\mathbf{Z}(Vx) = V\mathbf{Z}(x)$. □

Mówimy, że operatory $U_1 \in \mathcal{U}(H_1)$ oraz $U_2 \in \mathcal{U}(H_2)$ są *równoważne cyklicznie*, gdy istnieje izometria „na" $V : H_1 \to H_2$ spełniająca (i) (lub równoważnie (ii)) lematu 2.78 (Mówimy ponadto, że V ustala równoważność cykliczną operatorów U_1 i U_2.). Łatwo sprawdzamy, że równoważność cykliczna jest relacją równoważności. Naszym zadaniem będzie teraz opis całkowitego zbioru niezmienników tej relacji.

Lemat 2.79 *Załóżmy, że* $\mu, \nu \in M^+(\mathbf{T})$. *Połóżmy* $U_1 = V_\mu$, $U_2 = V_\nu$. *Jeśli* $V : L^2(\mathbf{T}, \mu) \to L^2(\mathbf{T}, \nu)$ *ustala równoważność cykliczną operatorów* U_1 *i* U_2, *to istnieje odwracalne odwzorowanie niesingularne*[8] $S : (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \nu) \to (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \mu)$ *oraz funkcja* $h \in L^2(\mathbf{T}, \nu)$ *takie, że*

$$Vf = h \cdot f \circ S \quad \textit{dla dowolnej funkcji } f \in L^2(\mathbf{T}, \mu).$$

Dowód.

Niech $A \in \mathcal{B}$ i połóżmy $H = \mathbf{1}_A L^2(\mathbf{T}, \mu)$. Wówczas $H \subset L^2(\mathbf{T}, \mu)$ domkniętą podprzestrzenią U_1-niezmienniczą. Z lematu Wienera 2.6 wynika, że istnieje zbór borelowski $\Phi(A) \subset \mathbf{T}$ taki, że $VH = \mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\mathbf{T}, \nu)$. Ponieważ $V(\{0\}) = \{0\}$ oraz $V^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, więc $\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu(\Phi(A)) = 0$. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $\mathbf{1}_A L^2(\mathbf{T}, \mu) \perp \mathbf{1}_B L^2(\mathbf{T}, \mu)$, skąd

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\mathbf{T}, \nu) \perp \mathbf{1}_{\Phi(B)} L^2(\mathbf{T}, \nu).$$

Zatem $\Phi(A) \cap \Phi(B) = \emptyset$. Jeśli $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, gdzie zbiory A_n, $n \geqslant 1$, są parami rozłączne, to

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\mathbf{T}, \nu) = V(\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} L^2(\mathbf{T}, \mu)) = V(\bigoplus_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} L^2(\mathbf{T}, \mu)) =$$

$$= \bigoplus_{n=1}^\infty V(\mathbf{1}_{A_n} L^2(\mathbf{T}, \mu)) = \bigoplus_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{\Phi(A_n)} L^2(\mathbf{T}, \nu) = \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty \Phi(A_n)} L^2(\mathbf{T}, \nu),$$

skąd $\Phi(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \Phi(A_n)$. Łatwo wykazujemy („urozłączniając" zadany ciąg zbiorów), że równość $\Phi(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \Phi(A_n)$ zachodzi bez założenia rozłączności nałożonego na ciąg (A_n). Ponieważ $V(L^2(\mathbf{T}, \mu)) = L^2(\mathbf{T}, \nu)$, więc $\Phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Zatem $\mathbf{T} = \Phi(A) \cup \Phi(A^c)$ i stąd $\Phi(A)^c = \Phi(A^c)$. Wykazaliśmy zatem, że $\Phi : (\mathcal{B}, \mu) \to (\mathcal{B}, \nu)$ jest σ-boolowskim izomorfizmem. Wynika stąd[9], że istnieje odwracalne odwzorowanie niesingularne $S : (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \nu) \to (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \mu)$ takie, że $\Phi(A) = S^{-1}(A)$ dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$. Połóżmy $h = V(1)$. Dla $A \in \mathcal{B}$ mamy $1 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c}$, skąd $h = V(\mathbf{1}_A) + V(\mathbf{1}_{A^c})$. Ale funkcje $V(\mathbf{1}_A)$ oraz $V(\mathbf{1}_{A^c})$ mają

[8] Niesingularność oznacza, że S i S^{-1} przeprowadza zbiory miary zero w zbiory miary zero. Innymi słowy obraz $S_*\mu$ miary μ jest miarą równoważną mierze ν.

[9] Korzystamy tu ze znanego twierdzenia o tzw. standardowych przestrzeniach borelowskich orzekającego, że odwzorowania boolowskie na σ-algebrach muszą pochodzić od przekształceń punktowych.

rozłączne nośniki, więc $V(\mathbf{1}_A) = h$ na swoim nośniku i podobna własność zachodzi dla $V(\mathbf{1}_{A^c})$. Mamy

$$V(\mathbf{1}_A) = h \cdot \mathbf{1}_{\Phi(A)} = h \cdot \mathbf{1}_A \circ S.$$

Ponieważ powyższa zależność zachodzi dla dowolnej funkcji charakterystycznej, zachodzi ona i dla skończonych kombinacji liniowych takich funkcji i wreszcie zachodzi ona dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbf{T}, \mu)$. Ponieważ V jest izometrią, więc dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$ may

$$\mu(SA) = \int_{\mathbf{T}} |\mathbf{1}_A S^{-1}|^2 d\mu = \|\mathbf{1}_A S^{-1}\|^2_{L^2(\mu)} =$$

$$= \|V(\mathbf{1}_A S^{-1})\|^2_{L^2(\nu)} = \|h \cdot \mathbf{1}_A\|^2_{L^2(\nu)} = \int_A |h|^2 d\nu.$$

Zatem $|h|^2 = \frac{d\mu \circ S}{d\nu}$. $\square$

Pokażemy teraz, że zbiór istotnych wartości funkcji krotności spektralnej (patrz (2.17)) operatora unitarnego jest niezmiennikiem równoważności cyklicznej.

Lemat 2.80 *Niech $U_i \in \mathcal{U}(H_i)$, $= 1, 2$ i niech $V : H_1 \to H_2$ ustala równowazność cykliczną operatorów U_1 oraz U_2. Niech*

$$H_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n) \quad \textit{oraz} \quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots$$

będzie rozkładem spektralnym operatora U_1. Wówczas mamy

$$H_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(Vx_n) \quad \textit{oraz} \quad \sigma_{Vx_1} \gg \sigma_{Vx_2} \gg \ldots .$$

Ponadto, $\sigma_{x_n} \equiv \sigma_{x_{n+1}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{Vx_n} \equiv \sigma_{Vx_{n+1}}$ i w szczególności $E_{U_1} = E_{U_2}$.

Dowód.
Z izometryczności (i surjektywności) operatora V wynika, że

$$H_2 = V(H_1) = V(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V\mathbf{Z}(x_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(Vx_n).$$

Pokażemy teraz, że $\mathbf{Z}(Vx_1)$ jest maksymalną przestrzenią cykliczną. Rzeczywiście, przypuśćmy, że istnieje element $y \in H_2$ taki, że $\mathbf{Z}(Vx_1) \subsetneq \mathbf{Z}(y)$. Wówczas $\mathbf{Z}(x_1) \subsetneq \mathbf{Z}(V^{-1}y)$ i otrzymujemy sprzeczność z maksymalnością przestrzeni $\mathbf{Z}(x_1)$. Zatem $\sigma_{Vx_1} = \sigma_{U_2}$. Nietrudno spostrzec, że $V\mid_{\mathbf{Z}(x_1)^\perp}$ dalej ustala równoważność cykliczną odpowiednich obcięć operatorów unitarnych i stąd $\sigma_{Vx_2} = \sigma_{U_2|_{\mathbf{Z}(Vx_2)^\perp}}$. Powtarzając ten sam argument otrzymujemy, że

$$\sigma_{Vx_1} \gg \sigma_{Vx_2} \gg \ldots .$$

Załóżmy, że $\sigma_{x_n} \gg \sigma_{x_{n+1}}$, przy czym $\sigma_{x_n} \not\equiv \sigma_{x_{n+1}}$. Wówczas

$$\mathbf{Z}(x_n) \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1}) = \mathbf{Z}(x_n') \oplus \mathbf{Z}(x_n'') \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1}),$$

gdzie $\sigma_{x_n''} \perp \sigma_{x_{n+1}}$ oraz $\sigma_{x_n'} \ll \sigma_{x_{n+1}}$. Mamy

$$V(\mathbf{Z}(x_n) \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1})) = \mathbf{Z}(Vx_n') \oplus \mathbf{Z}(Vx_n'') \oplus \mathbf{Z}(Vx_{n+1}).$$

Ale przestrzeń $\mathbf{Z}(x_n'') \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1})$ jest cykliczna, więc i przestrzeń $V(\mathbf{Z}(x_n'') \oplus \mathbf{Z}(x_{n+1})) = \mathbf{Z}(Vx_n'') \oplus \mathbf{Z}(Vx_{n+1})$ jest cykliczna. To pokazuje, że miary spektralne $\sigma_{Vx_n''}$ oraz $\sigma_{Vx_{n+1}}$ są ortogonalne, więc $\sigma_{Vx_n} \gg \sigma_{Vx_{n+1}}$ i miary te nie są równoważne. □

Zauważmy ponadto, że jeśli x jest wektorem własnym operatora U_1, to $\mathbf{Z}(x)$ jest podprzestrzenią jednowymiarową. Wówczas $V\mathbf{Z}(x)$ też jest jednowymiarowa dla dowolnej izometrii V ustalającej równoważność cykliczną. Zatem Vx też jest wektorem własnym (z tym, że nie kontrolujemy wartości własnej). Poza tezą lematu 2.80 otrzymaliśmy zatem drugi niezmiennik równoważności cyklicznej. Udowodnimy teraz twierdzenie, które pokazuje, że te dwa niezmienniki stanowią zbiór zupełny niezmienników równoważności cyklicznej operatorów unitarnych.

Twierdzenie 2.81 *Niech $U_i \in \mathcal{U}(H_i)$, gdzie H_i jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, $i = 1, 2$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *Operatory U_1 i U_2 równoważne cyklicznie.*

(ii) *Istnieją ciągi spektralne $\mu_1 \gg \mu_2 \gg \ldots$ oraz $\nu_1 \gg \nu_2 \gg \ldots$ operatorów odpowiednio U_1 i U_2 oraz izomorfizm miarowy $S : (\mathbf{T}, \nu_1) \to (\mathbf{T}, \mu_1)$ takie, że*

$$\nu_n = \mu_n \circ S \quad \textit{dla wszystkich} \quad n \geqslant 1.$$

(iii) $E^c(U_1) = E^c(U_2)$ *oraz* $D(U_1) = D(U_2)$.

Dowód.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $V : H_1 \to H_2$ ustala równoważność cykliczną operatorów U_1 i U_2. Ustalmy rozkład spektralny $H_1 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(x_n)$ operatora U_1 i połóżmy $\mu_n := \sigma_{x_n}$, $n \geqslant 1$. Z lematu 2.80 otrzymujemy rozkład spektralny $H_2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}(Vx_n)$ operatora U_2 i niech $\nu_n := \sigma_{Vx_n}$, $n \geqslant 1$. Istnieją izomorfizmy unitarne V_1 i V_2: $V_1 : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n) \to H_1$ operatorów $U = \bigoplus_{n=1} V_{\mu_n}$ i U_1 oraz $V_2 : H_2 \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$ of operatorów U_2 and $U = \bigoplus V_{\nu_n}$ takie, że $V_1(L^2(\mathbf{T}, \mu_n)) = \mathbf{Z}(x_n)$ and $V_2\mathbf{Z}(x_n) = L^2(\mathbf{T}, \nu_n))$ dla $n \geqslant 1$. Zatem operator $V' := V_2VV_1$ ustala równoważność cykliczną operatora U na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n)$ z operatorem U na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$, przy czym $V'(L^2(\mathbf{T}, \mu_n)) = L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$ (więc odpowiednie obcięcia operatora V' też ustalają równoważności cykliczne) dla $n \geqslant 1$.

Z lematu 2.79 wynika, że istnieją odwracalne odwzorowania niesingularne $S_n : (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \nu_n) \to (\mathbf{T}, \mathcal{B}, \mu_n)$ oraz $h_n \in L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$ takie, że

$$\left(V' \mid_{L^2(\mathbf{T}, \mu_n)}\right) f = h_n \cdot f \circ S_n$$

dla wszystkich $n \geqslant 1$. Zatem

$$V'(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(z_n) \cdot f_n(S_n z_n)$$

dla $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n)$.
Dla dowolnych $n \neq m$ połóżmy

$$H = \{f(z_n) + f(z_m) : f \in L^2(\mathbf{T}, \mu_1)\}.$$

Otrzymujemy w ten sposób pewną U-niezmienniczą podprzestrzeń domkniętą przestrzeni $\bigoplus_{k=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_k)$. Bez straty ogólności możemy zakładać, że $\mu_n = \mu_1 \mid_{A_n}$ (tzn. $\frac{d\mu_n}{d\mu_1} = \chi_{A_n}$). Wówczas

$$V'H = \{h_n(z_n)f(S_n z_n) + h_m(z_m)f(S_m z_m) : f \in L^2(\mathbf{T}, \mu_1)\}.$$

Ponieważ podprzestrzeń $V'H$ jest U-niezmiennicza, więc dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbf{T}, \mu_1)$ istnieje funkcja $g \in L^2(\mathbf{T}, \mu_1)$ taka, że

$$z_n h_n(z_n)f(S_n z_n) + z_m h_m(z_m)f(S_m z_m) = h_n(z_n)g(S_n z_n) + h_m(z_m)g(S_m z_m).$$

Ponieważ naturalne włożenia przestrzeni $L^2(\mathbf{T}, \mu_n)$ oraz $L^2(\mathbf{T}, \mu_m)$ w przestrzeń H są ortogonalne, więc musimy mieć równości:

$$\begin{aligned} zh_n(z)f(S_n z) &= h_n(z)g(S_n z), \quad \mu_n - \text{p.w. } z \in \mathbf{T}, \\ zh_m(z)f(S_m z) &= h_m(z)g(S_m z), \quad \mu_m - \text{p.w. } z \in \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Zatem $S_n^{-1}(z)f(z) = g(z)$ oraz $S_m^{-1}(z)f(z) = g(z)$ p.w., ponieważ $h_n \neq 0$, μ_n-p.w. oraz $h_m \neq 0$, μ_m-p.w. na mocy lematu 2.79. Jeśli $f = 1$, to $S_n^{-1}(z) = g(z) = S_m^{-1}(z)$ i stąd $S = S_n = S_m$ dla wszystkich $n \neq m$. Otrzymaliśmy zatem, że $\nu_n \equiv \mu_n \circ S$, więc zamieniając miary ν_n miarami $\mu_n \circ S$ otrzymamy pierwszą implikację.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Załóżmy, że mamy ciągi spektralne $\mu_1 \gg \mu_2 \gg ...$, $\nu_1 \gg \nu_2 \gg ...$ odpowiednio operatorów U_1 i U_2 oraz izomorfizm miarowy $S : (\mathbf{T}, \nu_1) \to (\mathbf{T}, \mu_1)$ taki, że $\nu_n = \mu_n \circ S$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Definiujemy izometrię „na” $V' : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n) \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$, kładąc

$$V'\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(Sz_n).$$

Pokażemy teraz, że V' ustala równoważność cykliczną operatorów $U = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_{\mu_n}$ on $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n)$ oraz $U = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_{\nu_n}$ na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$. Let $H \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \mu_n)$ będzie domkniętą podprzestrzenią U-niezmienniczą. Pokażemy, że $V'H$ jest U-niezmiennicza. Dla dowolnej funkcji $\psi \in L^\infty(\mathbf{T}, \mu_1)$ otrzymujemy, że H jest $\psi(U)$-niezmiennicza. Zatem jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_n) \in H$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(z_n) f_n(z_n) \in H$.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z_n) \in V'H$. Możemy znaleźć element $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_n) \in H$ taki,że $g_n = f_n \circ S$ dla $n \geqslant 1$. Ponieważ $|S^{-1}(z)| = 1$, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} S^{-1}(z_n) f_n(z_n) \in H$$

i stąd

$$U\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n f_n(Sz_n) \in V'H.$$

Rozumując podobnie, jeśli $H \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbf{T}, \nu_n)$ jest U-niezmiennicza, to podprzestrzeń $V'^{-1}H$ jest U-niezmiennicza. Stąd wynika, że operator $V := V_2^{-1} V' V_1^{-1}$ ustala równoważność cykliczną operatorów U_1 oraz U_2.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Oczywiste.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Niech $\mu = \sigma_{U_1}$ oraz $\nu = \sigma_{U_2}$. Jeśli $E^c(U_1) = E^c(U_2)$ oraz

$D(U_1) = D(U_2)$, to:

$$(2.24) \qquad \begin{array}{l} \nu(C_n(U_2) \setminus C_{n+1}(U_2)) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \mu(C_n(U_1) \setminus C_{n+1}(U_1)) > 0 \end{array}$$

dla $n \geqslant 1$,

$$(2.25) \qquad \begin{array}{l} \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U_2)) > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U_1)) > 0 \end{array}$$

oraz

$$(2.26) \qquad card\, D_n(U_1) = card\, D_n(U_2)$$

dla $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Ponieważ (patrz 2.14) $A_n \setminus A_{n+1} = (C_n \setminus C_{n+1}) \cup D_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \cup D_{\infty}$, więc istnieją odwracalne odwzorowania niesingularne (patrz 2.14) $S_n : (A_n(U_2) \setminus A_{n+1}(U_2), \nu) \to (A_n(U_1) \setminus A_{n+1}(U_1), \mu)$ dla $n \geqslant 1$ oraz $S_{\infty} : (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U_2), \nu) \to (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U_1), \mu)$. Definiujemy odwracalne odwzorowanie niesingularne $S : (\mathbf{T}, \nu) \to (\mathbf{T}, \mu)$, kładąc

$$S(x) = \begin{cases} S_n(x) & \text{dla} \quad x \in A_n(U_2) \setminus A_{n+1}(U_2) \\ S_{\infty}(x) & \text{dla} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U_2). \end{cases}$$

Mamy

$$\nu\,|_{A_n(U_2)} \equiv \mu\,|_{A_n(U_1)} \circ S.$$

Połóżmy $\mu_n := \mu\,|_{A_n(U_1)}$ oraz $\nu_n := \mu\,|_{A_n(U_1)} \circ S$. Wówczas ciągi $\mu_1 \gg \mu_2 \gg ...$ oraz $\nu_1 \gg \nu_2 \gg ...$ są ciągami spektralnymi odpowiednio operatorów U_1 i U_2. Ponadto, $\nu_n = \mu_n \circ S$ dla wszystkich $n \geqslant 1$, co kończy dowód. □

Wniosek 2.82 *Jeśli $U_i \in \mathcal{U}(H_i)$, $i = 1, 2$, są operatorami z ciągłym widmem, to U_1 i U_2 są równoważne cyklicznie wtedy i tylko wtedy, gdy mają one te same istotne wartości funkcji krotności spektralnej.*

3 Operatory unitarne na przestrzeniach Focka

Celem tego rozdziału jest dość dokładne przedstawienie teorii spektralnej operatorów unitarnych zadanych jako hilbertowskie sumy proste symetrycznych potęg tensorowych.

3.1 Produkt tensorowy przestrzeni Hilberta

Przypomnijmy najpierw konstrukcję produktu tensorowego $V_1 \otimes_{alg} V_2$ przestrzeni liniowych V_1 i V_2 nad ciałem K (wszystkie przestrzenie rozpatrujemy nad ciałem $K = \mathbf{C}$, czytelnik powinien przeprowadzić odpowiednie modyfikacje rozumowań dla przypadku $K = \mathbf{R}$). Niech $\widetilde{V_1 \times V_2}$ będzie przestrzenią liniową, której bazą jest zbiór $V_1 \times V_2$. Niech N oznacza podprzestrzeń przestrzeni $\widetilde{V_1 \times V_2}$ generowaną przez wektory postaci

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{1,i}, x_2\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_{1,i}, x_2), \tag{3.1}$$

$$\left(x_1, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{2,i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_1, x_{2,i}) \tag{3.2}$$

($\alpha_i \in \mathbf{C}$, $x_{1,i}, x_1 \in V_1$, $x_2, x_{2,i} \in V_2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 1$). Przestrzeń ilorazową $\widetilde{V_1 \times V_2}/N$ nazywamy (algebraicznym) *produktem tensorowym* i oznaczamy ją przez $V_1 \otimes_{alg} V_2$. Niech

$$\pi : \widetilde{V_1 \times V_2} \to \widetilde{V_1 \times V_2}/N = V_1 \otimes_{alg} V_2$$

będzie naturalnym homomorfizmem. Dla dowolnych $x_i \in V_i$ stosujemy oznaczenie

$$x_1 \otimes x_2 = \pi((x_1, x_2)).$$

Wówczas (3.1) i (3.2) oznacza, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{1,i}\right) \otimes x_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{1,i} \otimes x_2, \tag{3.3}$$

$$x_1 \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{2,i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_1 \otimes x_{2,i}. \tag{3.4}$$

Ćwiczenie 3.1 Pokazać, że $\{x_1 \otimes x_2;\ x_i \in Z_i, i = 1,2\}$ jest generujący w $V_1 \otimes_{alg} V_2$, o ile zbiory Z_i były generujące w V_i, $i = 1,2$. Wykazać, że jeśli $dim\, V_i = d_i$, $i = 1,2$, to $dim\, V_1 \otimes_{alg} V_2 = d_1 \cdot d_2$.

Zasadniczą własnością produktu tensorowego jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej przestrzeni liniowej W istnieje naturalny izomorfizm liniowy pomiędzy przestrzenią odwzorowań liniowych $Lin(V_1 \otimes_{alg} V_2, W)$, a przestrzenią odwzorowań dwuliniowych $Lin_2(V_1 \times V_2, W)$,

przy czym izomorfizm naturalny uzyskuje się w sposób następujący: Jeśli $A : V_1 \times V_2 \to W$ jest dwuliniowe, to zależność

$$\widehat{A}(x_1 \otimes x_2) = A(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

poprawnie wyznacza odwzorowanie liniowe z $V_1 \otimes_{alg} V_2$ o wartościach w przestrzeni W.

Jednakże dla naszych celów (przypadek $K = \mathbf{C}$ (!)) celowe będzie sprawdzenie, że dla funkcjonałów, tzn. gdy $W = \mathbf{C}$, w dokładnie ten sam sposób otrzymujemy izomorfizm w przypadku antyliniowym. Mówiąc precyzyjniej: Jeśli odwzorowanie $A : V_1 \times V_2 \to \mathbf{C}$ jest antyliniowe ze względu na każdą współrzędną, to $\widehat{A}$ wyznaczone przez (3.5) jest odwzorowaniem antyliniowym. Istotnie, oczywisty dowód wynika z faktu, że funkcjonał A jest antyliniowy wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonał $\overline{A}$ ($\overline{A}(\widetilde{x}) = \overline{A(\widetilde{x})}$) jest liniowy.

Przykład 3.2 Niech X_i, $i = 1,2$, będą niepustymi zbiorami i niech $V_i \subset \mathbf{C}^{X_i}$ będzie dowolną podprzestrzenią liniową. Wówczas $V_1 \otimes_{alg} V_2$ jest izomorficzna z podprzestrzenią $W \subset \mathbf{C}^{X_1 \times X_2}$ generowaną przez funkcje postaci $f_1 \otimes f_2$ ($f_i \in V_i$), gdzie

$$f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ \text{ dla dowolnych } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Rzeczywiście, odwzorowanie

$$(f_1, f_2) \mapsto [(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) f_2(x_2)]$$

jest dwuliniowym odwzorowaniem przestrzeni $V_1 \times V_2$ w W, a zatem odpowiada ono odwzorowaniu liniowemu I produktu tensorowego $V_1 \otimes_{alg} V_2$ w W wyznaczonemu przez zależność

$$I : f_1 \otimes f_2 \mapsto [(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) f_2(x_2)].$$

Trzeba więc pokazać, że odwzorowanie I jest różnowartościowe. Załóżmy, że $I\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \otimes g_i\right) = 0$, gdzie możemy zakładać, że np. $g_1, \ldots, g_n$ są elementami przestrzeni V_2 liniowo niezależnymi. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_1) \cdot g_i(x_2) = 0 \text{ dla dowolnych } (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2,$$

a więc $\sum_{i=1} \alpha_i f_i(x_1) \cdot g_i(\cdot) = 0$, skąd $\alpha_i f_i(x_1) = 0$ dla dowolnego $x_1 \in X_1$, co kończy uzasadnienie naszej tezy.

Załóżmy teraz, że H_1, H_2 są przestrzeniami Hilberta. Twierdzimy, że wzór

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2} \tag{3.6}$$

wyznacza formę półtoraliniową na przestrzeni liniowej $H_1 \otimes_{alg} H_2$. Istotnie, odzworowanie

$$H_1 \times H_2 \times H_1 \times H_2 \ni (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

jest liniowe ze względu na pierwszą i drugą współrzędną i antyliniowe ze względu na pozostałe współrzędne. Stąd odpowiada ono przekształceniu półtoraliniowemu przestrzeni $(H_1 \otimes_{alg} H_2) \times (H_1 \otimes_{alg} H_2)$, które spełnia zależność (3.6). Musimy jednak wykazać, że otrzymana forma półtoraliniowa jest dodatnio określona. Otóż dowolny element $\tilde{x} \in H_1 \otimes_{alg} H_2$ możemy napisać w postaci

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_{1,i} \otimes x_{2,j},$$

gdzie $\{x_{1,1}, \ldots, x_{1,m}\}$ oraz $\{x_{2,1}, \ldots, x_{2,n}\}$ są rodzinami ortonormalnymi (po prostu najpierw znajdujemy reprezentację z rodzinami elementów liniowo niezależnych, którą następnie ortogonalizujemy), skąd łatwo otrzymujemy $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 > 0$, o ile $\tilde{x} \neq 0$.

Zatem wzór (3.6) w istocie rzeczy definiuje pewien iloczyn skalarny na przestrzeni $H_1 \otimes_{alg} H_2$.

Definicja 3.3 *Produktem tensorowym* $H_1 \otimes H_2$ przestrzeni Hilberta nazywamy uzupełnienie przestrzeni metrycznej $H_1 \otimes_{alg} H_2$ z metryką wyznaczoną przez określony powyżej iloczyn skalarny.

Uwaga 3.4 Przypomnijmy, że jeśli X jest przestrzenią metryczną, to jej uzupełnienie $\widehat{X}$ otrzymuje się rozpatrując przestrzeń ciągów Cauchy'ego na X podzieloną przez relację równoważności, dla której dwa ciągi są w relacji, gdy ciąg liczbowy odległości pomiędzy wyrazami o tym samym indeksie jest ciągiem zbieżnym do zera. Odległość zaś pomiędzy klasami abstrakcji definiuje się jako granicę (która istnieje i nie zależy od wyboru reprezentantów) ciągu liczbowego odległości pomiędzy wyrazami o tym samym indeksie dowolnie wybranych reprezentantów. Jeśli X jest przestrzenią ośrodkową, to $\widehat{X}$ jest również przestrzenią ośrodkową.

Jeśli G jest przestrzenią unitarną, tzn. metryka jest wyznaczona przez iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, to metryka w przestrzeni uzupełnionej również jest zadana przez iloczyn skalarny:

$$\langle \widehat{(x_n)}, \widehat{(y_n)} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle.$$

Wynika stąd w szczególności, że produkt tensorowy przestrzeni Hilberta jest przestrzenią Hilberta. Ponadto, jeśli H_1 i H_2 są ośrodkowe, to ich produkt tensorowy jest również przestrzenią ośrodkową.

Ćwiczenie 3.5 Pokazać, że dla dowolnych $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_2$ mamy $\|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\| \cdot \|x_2\|$.

Lemat 3.6 *Jeśli $\{x_{1,i};\ i \geqslant 1\}$ oraz $\{x_{2,i};\ i \geqslant 1\}$ są bazami ortonormalnymi odpowiednio w przestrzeniach Hilberta H_1 i H_2, to rodzina*

$$\{x_{1,i} \otimes x_{2,j};\ i, j \geqslant 1\}$$

jest bazą ortonormalną produktu tensorowego $H_1 \otimes H_2$.

Dowód.

Zauważmy najpierw, że ze względu na definicję iloczynu skalarnego w produkcie tensorowym rodzina $\{x_{1,i} \otimes x_{2,j};\ i, j \geqslant 1\}$ jest rodziną ortonormalną, gdy rodziny $\{x_{k,i};\ i \geqslant 1\}$, $k = 1, 2$, są ortonormalne.

Oznaczmy przez $\widetilde{G} \subset H_1 \otimes H_2$ podprzestrzeń domkniętą generowaną przez rodzinę $\{x_{1,i} \otimes x_{2,j};\ i, j \geqslant 1\}$. Dla dowolnego $j \geqslant 1$ odwzorowanie

$$y_1 \mapsto y_1 \otimes x_{2,j}$$

jest liniowe i ograniczone. Ponieważ dla $y_1 = x_{1,i}$ obraz poprzez to odwzorowanie jest zawarty w $\widetilde{G}$, więc i obraz całej przestrzeni H_1 poprzez to odwzorowanie jest zawarty w $\widetilde{G}$. Ustalając teraz dowolny element $y_1 \in H_1$ i rozumując podobnie dla drugiej współrzędnej otrzymamy, że $y_1 \otimes y_2 \in \widetilde{G}$ dla dowolnego $y_2 \in H_2$, co kończy dowód. □

Przykład 3.7 Naszkicujemy teraz dowód faktów, że jeśli $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, są przestrzeniami z miarą, to $L^2(X_1, \mu_1) \otimes L^2(X_2, \mu_2)$ ma naturalną identyfikację z $L^2(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, a także z przestrzenią $L^2(X_1, \mu_1; L^2(X_2, \mu_2))$.

Rzeczywiście, zauważmy najpierw, że jeśli przez $f_1 \otimes f_2$ rozumiemy funkcję zdefiniowaną w przykładzie 3.2, to ze względu na twierdzenie Fubiniego $f_1 \otimes f_2 \in L^2(X_1 \otimes X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, o ile $f_i \in L^2(X_i, \mu_i)$ dla $i = 1, 2$. Ponownie twierdzenie Fubiniego mówi nam, że iloczyny skalarne funkcji $f_1 \otimes f_2$ i $g_1 \otimes g_2$ w $L^2(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ liczy się tak, jak nakazuje wzór (3.6). Zatem pierwszą tezę można uznać za uzasadnioną.

Drugi naturalny izomorfizm otrzymuje się poprzez identyfikację tensora $f_1 \otimes f_2$ z funkcją

$$x_1 \mapsto f_1(x_1) f_2(\cdot) \in L^2(X_2, \mu_2).$$

3.2 Produkt tensorowy operatorów unitarnych

Niech teraz U_i będzie operatorem (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta H_i, $i = 1, 2$.

Lemat 3.8 *Wzór $x_1 \otimes x_2 \mapsto Ux_1 \otimes U_2 x_2$ wyznacza jednoznacznie operator unitarny oznaczany przez $U_1 \otimes U_2$ na przestrzeni $H_1 \otimes H_2$.*

Dowód.
Wzór

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) \mapsto \langle U_1 x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle U_2 x_2, y_2 \rangle_{H_1}$$

wyznacza formę półtoraliniową ciągłą na $H_1 \otimes H_2 \times H_1 \otimes H_2$, a zatem istnieje operator liniowy i ciągły U na $H_1 \otimes H_2$ taki, że

$$\langle U(x_1 \otimes x_2), y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle U_1 x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle U_2 x_2, y_2 \rangle_{H_1}.$$

Ale

$$\langle U_1 x_1 \otimes U_2 x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle U_1 x_1, y_1 \rangle_{H_1} \langle U_2 x_2, y_2 \rangle_{H_1},$$

więc ze względu na dowolność y_1, y_2 w tym rozumowaniu $U(x_1 \otimes x_2) = U_1x_1 \otimes U_2x_2$. Izometryczność operatora $U_1 \otimes U_2$ wynika z izometryczności operatorów U_1 i U_2. Operatorem odwrotnym do $U_1 \otimes U_2$ jest operator $U_1^{-1} \otimes U_2^{-1}$. □

Spróbujmy teraz przeprowadzić analizę spektralną operatora $U_1 \otimes U_2$.

Lemat 3.9 *Maksymalny typ spektralny $\sigma_{U_1 \otimes U_2}$ jest równy $\sigma_{U_1} * \sigma_{U_2}$.*

Dowód.
Dowód wynika natychmiast z faktu, że przestrzeń $H_1 \otimes H_2$ jest generowana przez tensory postaci $x_1 \otimes x_2$ oraz z faktu, że

$$\langle (U_1 \otimes U_2)^n (x_1 \otimes x_2), x_1 \otimes x_2 \rangle = \langle U_1^n x_1, x_1 \rangle \langle U_2^n x_2, x_2 \rangle,$$

co oznacza, że $\widehat{\sigma}_{x_1 \otimes x_2}[n] = \widehat{\sigma}_{x_1}[n] \cdot \widehat{\sigma}_{x_2}[n]$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$. □

Znacznie bardziej złożonym jest problem obliczenia krotności spektralnej produktu tensorowego operatorów unitarnych. Przeprowadzimy analizę w przypadku, gdy dodatkowo U_1 i U_2 mają proste widmo. Niech więc $\sigma, \nu \in M^+(\mathbf{T})$ i rozpatrzmy $V_\sigma \otimes V_\nu$. Otóż przy identyfikacji (patrz przykład 3.7) przestrzeni $L^2(\mathbf{T}, \sigma) \otimes L^2(\mathbf{T}, \nu)$ z przestrzenią $L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ operator $V_\sigma \otimes V_\nu$ staje się równy operatorowi W, dla którego

$$W(F)(z_1, z_2) = z_1 z_2 F(z_1, z_2), \text{ dla dowolnej funkcji } F \in L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu).$$

Niech $s : \mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \mathbf{T}$, $s(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Zatem $s_*(\sigma \otimes \nu) = \sigma * \nu$, a ponadto

$$\sigma \otimes \nu = \int_{\mathbf{T}} \mu_z \, d(\sigma * \nu)(z), \tag{3.7}$$

gdzie miary warunkowe μ_z są skupione na zbiorach $s^{-1}(z)$ (dla $\sigma * \nu$-p.w. $z \in \mathbf{T}$). Zauważmy, że wówczas dla $A \in \mathcal{B}(\mathbf{T})$,

$$\sigma * \nu(A) = 0 \iff \mu_z(s^{-1}(A)) = 0 \text{ dla } \sigma * \nu\text{-p.w. } z \in A. \tag{3.8}$$

Rzeczywiście,

$$\sigma * \nu(A) = 0 \iff s_*(\sigma \otimes \nu)(A) = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \ \sigma \otimes \nu(s^{-1}(A)) = 0 \ \Leftrightarrow \ \int_A \mu_z(s^{-1}(A))\, d\sigma * \nu(z) = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \mu_z(s^{-1}(A)) = 0 \text{ dla } \sigma * \nu\text{-p.w. } z \in A.$$

Zauważmy ponadto, że operator $U_s : L^2(\mathbf{T}, \sigma * \nu) \to L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ określony wzorem

$$U_s(f)(z_1, z_2) = f(s(z_1, z_2)) = f(z_1 z_2)$$

jest izometrią (na ogół nieodwracalną, gdyż, na ogół, odwzorowanie s nie jest różnowartościowe p.w.). Ponadto

$$W \circ U_s = U_s \circ V_{\sigma*\nu}. \tag{3.9}$$

Okrąg $\mathbf{T}$ rozbijamy teraz (i rozbicie to jest mierzalne):

$$\mathbf{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \cup Z_\infty \cup Z_c,$$

gdzie dla $z \in Z_n$ miara warunkowa μ_z jest miarą atomową o n atomach ($n \geqslant 1$), dla $z \in Z_\infty$ miara μ_z jest miarą dyskretną o nieskończenie wielu atomach, natomiast dla $z \in Z_c$ miara warunkowa nie jest miarą dyskretną.

Zauważmy, że dla dowolnego $Z \in \mathcal{B}(T)$ podprzestrzeń $\chi_{s^{-1}(Z)} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla operatora W.

Ustalmy $n \geqslant 1$ i niech $\rho_n = \sigma * \nu|_{Z_n}$. Istnieje rozbicie mierzalne

$$s^{-1}(Z_n) = \bigcup_{i=1}^{n} Z_{n,i},$$

dla którego zbiór $Z_{n,i} \cap s^{-1}(z)$ zawiera dokładnie jeden atom miary μ_z dla (ρ_n-p.w.) $z \in Z_n$ (tzn. istnieje mierzalna metoda wyboru po jednym atomie miar warunkowych z włókien odwzorowania s, patrz rozdział 7.3). Oznacza to, że odwzorowanie $s|_{Z_{n,i}}$ jest różnowartościowe (p.w.), a ponadto

$$\left(s|_{Z_{n,i}}\right)_* (\sigma \otimes \nu|_{s^{-1}(Z_{n,i})}) \equiv \sigma * \nu|_{Z_n},$$

co (patrz (3.9)) oznacza, że odpowiednie obcięcie operatora U_s ustala izomorfizm działania operatora W na podprzestrzeni $\chi_{Z_{n,i}} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ z obcięciem działania operatora $V_{\sigma*\nu}$ do $\chi_{Z_n} L^2(\mathbf{T}, s_*(\sigma \otimes \nu)|_{Z_{n,i}})$. Ale ze względu na (3.8),

$$s_*(\sigma \otimes \nu)|_{Z_{n,i}} \equiv (\sigma * \nu)|_{Z_n}.$$

Ponieważ $V_{\sigma*\nu}|_{\chi_{Z_n}} L^2(\mathbf{T}, \sigma * \nu)$ ma proste widmo, więc na $\chi_{s^{-1}(Z_n)} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ operator W ma krotność jednorodną równą n (a maksymalny typ spektralny wynosi $\sigma * \nu|_{Z_n}$).

Podobne rozumowanie przeprowadzamy dla Z_∞. Dla (p.w.) $z \in Z_c$ kładziemy $\mu_z = \mu_z^{(d)} + \mu_z^{(c)}$, gdzie $\mu_z^{(c)}$ jest (z założenia niezerową) częścią ciągłą miary μ_z. Zauważmy, że maksymalny typ spektralny operatora W na podprzestrzeni $\chi_{s^{-1}(Z_c)} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ jest równy $\sigma * \nu|_{Z_c}$. Weźmy dowolną liczbę naturalną $k \geqslant 1$. Ponieważ miary $\mu_z^{(c)}$ są ciągłe, więc istnieje rozbicie mierzalne

$$s^{-1}(Z_c) = \bigcup_{i=1}^{k} Z_{c,i}$$

takie, że $\mu_z^{(c)}(Z_{c,i}) > 0$ dla (p.w.) $z \in Z_c$. Wtedy ze względu na (3.8) miara $s_*(\sigma \otimes \nu)|_{Z_{c,i}}$ jest miarą równoważną mierze $\sigma * \nu|_{Z_c}$. Oznacza to, że znaleźliśmy k podprzestrzeni niezmienniczych (dla operatora W) przestrzeni $\chi_{s^{-1}(Z_{c,i})} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ parami ortogonalnych, na których ich maksymalny typ spektralny jest typem miary $\sigma * \nu|_{Z_c}$. Ponieważ maksymalny typ spektralny operatora W na $\chi_{s^{-1}(Z_{c,i})} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ jest równy $\sigma * \nu|_{Z_c}$, więc na $\chi_{s^{-1}} L^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \sigma \otimes \nu)$ operator W ma nieskończoną krotność jednorodną (zauważmy, że ewentualne atomy miar warunkowych dla $z \in Z_c$ już niczego nie wnoszą do tego rozumowania). W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.10 *Operator $V_\sigma \otimes V_\nu$ ma:*
(i) jednorodną krotność spektralną n na Z_n z typem $\sigma * \nu|_{Z_n}$, $n \geqslant 1$,
(ii) nieskończoną krotność jednorodną na $Z_\infty \cup Z_c$ z typem $\sigma * \nu|_{Z_\infty \cup Z_c}$. □

Uwaga 3.11 Czytelnik powinien być już w tym miejscu wyczulony na fakt, że nawet jeśli miary σ i ν są miarami ciągłymi, to miary warunkowe μ_z mogą być miarami czysto atomowymi. Odpowiednie przykłady zobaczymy później.

Ćwiczenie 3.12 Pokazać, że $V_{\lambda_\mathbf{T}} \otimes V_\nu$ ma przeliczalnie krotne widmo Lebesgue'a dla dowolnej miary ciągłej $\nu \in M^+(\mathbf{T})$. Pokazać, że $V_{\delta_{z_1}} \otimes V_{\delta_{z_2}}$ ma proste widmo.

Ćwiczenie 3.13 Załóżmy, że $J \subset \mathbf{T}$ jest przeliczalną podgrupą i niech $\nu = \sum_{z\in J} a_z \delta_z$, gdzie $\sum_{z\in J} a_z = 1$ (wszystkie a_z są liczbami dodatnimi). Pokazać, że operator $V_\sigma \otimes V_\nu$ ma proste widmo wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma \perp \sigma * \delta_z$ dla dowolnego $z \in J \setminus \{1\}$.

W podobny sposób jak rozpatrywaliśmy produkt tensorowy dwóch przestrzeni Hilberta możemy zdefiniować produkt tensorowy $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ dowolnej skończonej liczby przestrzeni Hilberta $H_1, \ldots, H_n$ (odwzorowania dwuliniowe zamienia się na wieloliniowe, a obowiązywać będzie reguła „łączności” operacji produktu tensorowego). Iloczyn skalarny w przestrzeni $H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ spełnia zatem równość:

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} \cdot \ldots \cdot \langle x_n, y_n \rangle_{H_n} \tag{3.10}$$

dla dowolnych $x_1, y_1 \in H_1$, ..., $x_n, y_n \in H_n$. Podobnie jak w przypadku $n = 2$ definiujemy też produkty tensorowe operatorów unitarnych.

3.3 Symetryczna przestrzeń Focka

Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Przestrzeń

$$F(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}, \text{ gdzie } H^{\otimes n} = \underbrace{H \otimes \ldots \otimes H}_{n}, \ H^{\otimes 0} = \mathbf{C},$$

nazywamy *przestrzenią Focka.*

Załóżmy, że $U \in \mathcal{U}(H)$. Niech $F(U) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U^{\otimes n}$ będzie odpowiadającym operatorem unitarnym przestrzeni Focka. Korzystając z lematu 3.9 łatwo pokazujemy, że:

Twierdzenie 3.14 *Maksymalny typ spektralny operatora unitarnego $F(U)$ jest równy mierze* $\exp(\sigma)$*, gdzie*

$$\exp(\sigma) = \delta_1 + \sigma/1! + \sigma^{(2)}/2! + \sigma^{(3)}/3! + \ldots,$$

przy czym $\sigma^{(n)} = \sigma^{*n} = \underbrace{\sigma * \ldots * \sigma}_{n}$, $n \geqslant 0$. □

Załóżmy, że operator U ma proste widmo, a σ jest jego maksymalnym typem spektralnym. Ustalmy teraz $m \geqslant 1$. Możemy zatem rozpatrywać m-ty splot σ^{*m} miary σ, który formalnie jest zdefiniowany jako obraz miary $\sigma^{\otimes m}$ poprzez odwzorowanie $s_m : \mathbf{T}^m \to \mathbf{T}$:

$$s_m(z_1, \ldots, z_m) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_m.$$

Uwaga 3.15 Nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie s_m ma σ-zwarte włókna. Zatem z twierdzenia 7.11, jeśli $A \subset \mathbf{T}^m$ jest podzbiorem borelowskim oraz $\sigma^{\otimes m}(A^c) = 0$, to $s_m(A) \subset \mathbf{T}$ jest również borelowski oraz (z definicji splotu miary) $\sigma^{*m}(s_m(A)^c) = 0$.

Możemy jednak użyć nieco prostszego argumentu. Mianowicie zbiór A zawiera podzbiór σ-zwarty A' taki, że $\sigma^{\otimes m}(A \setminus A') = 0$. Wówczas $s_m(A')$ jest σ-zwarty i jest nośnikiem miary σ^{*m}.

Niech

$$\sigma^{\otimes m} = \int_{\mathbf{T}} \mu_z^{(m)}\, d(\sigma^{*m})(z), \tag{3.11}$$

gdzie miary warunkowe $\mu_z^{(m)}$ są skupione na zbiorach $s_m^{-1}(z)$ (dla σ^{*m}-p.w. $z \in \mathbf{T}$). Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.10 możemy teraz wprowadzić zbiory $Z_n^{(m)}$, $Z_\infty^{(m)}$ oraz $Z_c^{(m)}$ charakteryzujące typ miar warunkowych w dezintegracji (3.11). Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 3.10 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.16 *Dla dowolnego $m \geqslant 1$ operator $F(U)|_{H^{\otimes m}}$ ma:*
(i) jednorodną krotność spektralną n na $Z_n^{(m)}$ z typem $\sigma^{*m}|_{Z_n^{(m)}}$, $n \geqslant 1$,
(ii) nieskończoną krotność jednorodną na $Z_\infty^{(m)} \cup Z_c^{(m)}$ z typem $\sigma^{*m}|_{Z_\infty^{(m)} \cup Z_c^{(m)}}$.
□

Oczywiście wniosek powyższy nie opisuje w pełni funkcji krotności operatora unitarnego $F(U)$. Aby tę funkcję wyliczyć precyzyjnie, potrzebna jest nam dodatkowa wiedza o wzajemnych zależnościach pomiędzy miarami σ^{*k}, σ^{*l} dla $k \neq l$.

Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Ustalmy $n \geqslant 1$ i niech $\pi \in \mathcal{S}(n)$, gdzie $\mathcal{S}(n)$ oznacza grupę permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator unitarny U_π, dla którego

$$U_\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)}. \tag{3.12}$$

Istotnie, odwzorowanie

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)}$$

jest n-liniowym odwzorowanie przestrzeni liniowej $H^{\times n}$ w $H^{\otimes_{alg} n}$, a więc istnieje jedyne odwzorowanie liniowe U_π z $H^{\otimes_{alg} n}$ w siebie spełniające (3.12). Zauważmy, że odwzorowanie to jest odwracalne, gdyż obowiązuje tu wzór

$$U_{\pi_1 \circ \pi_2} = U_{\pi_1} \circ U_{\pi_2} \text{ dla dowolnych } \pi_1 \pi_2 \in \mathcal{S}(n),$$

a więc w szczególności $(U_\pi)^{-1} = U_{\pi^{-1}}$.

Podobnie jak w przypadku produktu tensorowego dwóch operatorów unitarnych, odwzorowanie U_π rozszerza się do operatora U_π pomiędzy odpowiednimi potęgami tensorowymi przestrzeni H, przy czym ze względu na równość (której uzasadnienie wynika w sposób oczywisty z (3.10))

$$\langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \rangle = \langle x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)}, y_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes y_{\pi(n)} \rangle$$

operator U_π jest izometrią, której odwrotnością jest również izometria $U_{\pi^{-1}}$, a więc rzeczywiście $U_\pi \in \mathcal{U}(H^{\otimes n})$.

Definicja 3.17 *n-tą symetryczną potęgą tensorową* przestrzeni H nazywamy przestrzeń

$$H^{\odot n} = \{\widetilde{x} \in H^{\otimes n};\ U_\pi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \text{ dla dowolnej permutacji } \pi \in \mathcal{S}(n)\}.$$

Zauważmy, że dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in H$,

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)} \in H^{\odot n}. \tag{3.13}$$

Uwaga 3.18 Zauważmy, że na poziomie czysto algebraicznym podstawową własnością symetrycznej potęgi tensorowej jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy symetrycznymi odwzorowaniami wieloliniowymi przestrzeni $V^{\times n}$ o wartościach w przestrzeni W z liniowymi odwzorowaniami przestrzeni $V^{\odot n}$ o wartościach w W:
jeśli $\widehat{A} : V^{\odot n} \to W$, to kładziemy

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \widehat{A}\left(\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)}\right).$$

Lemat 3.19 *Dla dowolnej przestrzeni Hilberta H oraz $n \geqslant 1$,*

$$proj_{H^{\odot n}} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} U_\pi.$$

Dowód.

Połóżmy $p = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} U_\pi$. Ze względu na (3.13), $p : H^{\otimes n} \to H^{\odot n}$. Ponadto, dla dowolnych tensorów $\widetilde{x} \in H^{\otimes n}$, $\widetilde{y} \in H^{\odot n}$ mamy

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = \langle \widetilde{x}, \frac{1}{n!}\sum_{\pi^{-1}\in\mathcal{S}(n)} U_{\pi^{-1}}\widetilde{y}\rangle = \langle \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} U_\pi \widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle = \langle p\widetilde{x}, \widetilde{y}\rangle,$$

co kończy dowód. □

Niech $x_1, \ldots, x_n \in H$. Kładziemy

$$x_1 \odot \ldots \odot x_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} U_\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).$$

Celowość wprowadzenia współczynnika $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ widać w następującym wzorze:

$$\big\langle x_1 \odot \ldots \odot x_n, y_1 \odot \ldots \odot y_n\big\rangle =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\pi,\pi'\in\mathcal{S}(n)} \langle U_\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n), U_{\pi'}(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n)\rangle =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\pi,\pi'\in\mathcal{S}(n)} \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, U_{\pi^{-1}\circ\pi'}(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n)\rangle =$$

$$\frac{1}{n!}\left(n!\sum_{\pi_1\in\mathcal{S}(n)} \langle x_1 \otimes \ldots \otimes x_n, U_{\pi_1}(y_1 \otimes \ldots \otimes y_n)\rangle\right) =$$

$$= \sum_{\pi\in\mathcal{S}(n)} \big\langle x_1, y_{\pi(1)}\big\rangle \cdot \ldots \cdot \langle x_n, y_{\pi(n)}\rangle,$$

więc w szczególności, jeśli położymy dla $x \in H$,

$$x^{\odot n} = \underbrace{x \odot \ldots \odot x}_{n} = \sqrt{n!}x^{\otimes n},$$

to otrzymamy

$$\langle x^{\odot n}, y^{\odot n}\rangle = n!\langle x, y\rangle^n$$

dla dowolnych $x, y \in H$ i w szczególności

$$\|x^{\odot n}\| = \sqrt{n!}\|x\|^n.$$

Ćwiczenie 3.20 Pokazać, że jeśli $x \perp y$, to $\|x \odot y\| = \|x\|\|y\|$.

Lemat 3.21 *Niech $\{x_i;\ i \geqslant 1\}$ będzie bazą ortonormalną ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Wówczas rodzina*

$$(*)\{\frac{1}{\Pi_{s=1}^{r} k_s!} x_{i_1}^{\odot k_1} \odot \ldots \odot x_{i_r}^{\odot k_r}; i_1 < \ldots < i_r, 0 < k_s\ (s = 1, \ldots, r), k_1 + \ldots + k_r = n\}$$

jest bazą ortonormalną przestrzeni $H^{\odot n}$.

Dowód.

Ponieważ tensor $x_{i'_1} \odot \ldots \odot x_{i'_n}$ jest niezmienniczy dla każdego operatora U_π, więc tensor ten zależy jedynie od liczb k_j, które są krotnościami występowania liczb i_j w ciągu $(i'_1, \ldots, i'_n)$. Ponadto (dla $j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_n$, $j'_1 \leqslant \ldots \leqslant j'_n$) mamy

$$\langle x_{j_1} \odot \ldots \odot x_{j_n}, x_{j'_1} \odot \ldots \odot x_{j'_n} \rangle = \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} \langle x_{j_1}, x_{j'_{\pi(1)}} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle x_{j_n}, x_{j'_{\pi(n)}} \rangle,$$

a więc

$$\|x_{j_1} \odot \ldots \odot x_{j_n}\|^2 = \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} \langle x_{j_1}, x_{j_{\pi(1)}} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle x_{j_n}, x_{j_{\pi(n)}} \rangle = \Pi_{s=1}^{n} k_s!,$$

gdzie $j_1 = \ldots = j_{k_1}$, $j_{k_1+1} = \ldots = j_{k_1+k_2}$, itd. To dowodzi ortonormalności rodziny $(*)$.

Pozostaje do wykazania zupełność. Niech $\widetilde{y} \in H^{\odot n}$ będzie tensorem ortogonalnym do wszystkich elementów rodziny $(*)$. Wówczas dla dowolnych $j_1, \ldots, j_n \geqslant 1$, z lematu 3.19 wynika, że

$$\langle \widetilde{y}, x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_n} \rangle = \langle \widetilde{y}, \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} U_\pi (x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_n}) \rangle =$$

$$= \langle \widetilde{y}, x_{j_1} \odot \ldots \odot x_{j_n} \rangle = 0.$$

Stąd $\widetilde{y} \perp x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_n}$, a więc ze względu na lemat 3.6 otrzymujemy, że $\widetilde{y} = 0$. (Tzn. korzystamy z ogólnego faktu, że rzut ortogonalny zbioru generującego jest zbiorem generującym w obrazie rzutu.) $\square$

Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta i niech $U \in \mathcal{U}(H)$. Ograniczenie $U^{\otimes n}$ do podprzestrzeni $H^{\odot n}$ będziemy oznaczali $U^{\odot n}$. Przestrzeń

$$F_{sym}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\odot n}\ ,\ H^{\odot 0} = \mathbf{C},$$

nazywamy *symetryczną przestrzenią Focka.*

Załóżmy, że $U \in \mathcal{U}(H)$. Niech $F_{sym}(U) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U^{\odot n}$ będzie odpowiadającym operatorem unitarnym symetrycznej przestrzeni Focka. Ponieważ maksymalny typ spektralny operatora $U^{\otimes n}$ jest równy σ_U^{*n}, a więc jest osiągany na każdym tensorze symetrycznym $x^{\odot n}$, gdzie $\sigma_x \equiv \sigma_U$, więc korzystając z twierdzenia 3.14 otrzymujemy natychmiast, że:

Twierdzenie 3.22 *Maksymalny typ spektralny operatora unitarnego $F_{sym}(U)$ jest równy mierze* $\exp(\sigma)$. □

Bezpośrednią konsekwencją identyfikacji produktów tensorowych przestrzeni L^2 z przestrzenią L^2 dla odpowiedniej miary produktowej (patrz przykład 3.7) jest następujący opis symetrycznej potęgi tensorowej przestrzeni postaci $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Lemat 3.23 *Dla dowolnego $n \geqslant 1$ przestrzen $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^{\odot n}$ możemy w sposób naturalny identyfikować z podprzestrzenią przestrzeni $L^2(X^{\times n}, \mu^{\otimes n})$ funkcji niezmienniczych ze względu na dowolną permutację współrzędnych:*

$$f_1 \odot \ldots \odot f_n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} f_1(x_{\pi(1)}) \cdot \ldots \cdot f_n(x_{\pi(n)})$$

dla dowolnych $f_1, \ldots, f_n \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Załóżmy, że $X = \mathbf{T}$, przy czym na $\mathbf{T}$ rozpatrujemy porządek indukowany z $[0, 1)$ (lub $X = \mathbf{R}$ z naturalnym porządkiem). Załóżmy dodatkowo, że miara $\mu \in M^+(\mathbf{T})$ jest miarą ciągłą. Niech

$$E_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{T}^n;\ z_1 < \ldots < z_n\}.$$

Zauważmy, że dla dowolnych $1 \leqslant k < l \leqslant n$

$$\mu^{\otimes n}\left(\{(z_1, \ldots z_n) \in \mathbf{T}^n;\ z_k = z_l\}\right) = \mu \otimes \mu \Big(\{(z_1, z_2) \in \mathbf{T}^2;\ z_1 = z_2\Big) =$$

$$= \sum_{z \in \mathbf{T}} (\mu(\{z\}))^2,$$

a więc ze względu na bezatomowość miary μ

$$\mu^{\otimes n}\left(\bigcup_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \{(z_1, \ldots z_n) \in \mathbf{T}^n;\ z_k = z_l\}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Twierdzenie 3.24 *Jeśli $\mu \in M^+(\mathbf{T})$ jest miarą bezatomową, to dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ symetryczny produkt tensorowy $L^2(\mathbf{T}, \mu)^{\odot n}$ można identyfikować z przestrzenią $L^2(E_n, \mu^{\otimes n}|_{E_n})$, przy czym naturalny izomorfizm jest wyznaczony przez odwzorowanie*

$$f_1 \odot \ldots \odot f_n \mapsto \left((z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sum_{\pi \in \mathcal{S}(n)} f_{\pi(1)}(z_1) \cdot \ldots \cdot f_{\pi(n)}(z_n)\right).$$

Dowód.
Ze względu na (3.14)

$$\mathbf{T}^n = \bigcup_{\pi \in \mathcal{S}(n)} \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{T}^n;\ z_{\pi(1)} < \ldots < z_{\pi(n)}\}$$

modulo miara $\mu^{\otimes n}$.

Dla $F \in L^2(E_n, \mu^{\otimes n})$ określamy F_1 na $\mathbf{T}^n$ (zdefiniowaną jedynie $\mu^{\otimes n}$ – *p.w.*), kładąc

$$F_1(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} F(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}),$$

gdzie permutację π wybieramy tak, aby $z_{\pi(1)} < \ldots < z_{\pi(n)}$. Zauważmy, że

$$\int_{\mathbf{T}^n} |F_1|^2 \, d\mu^{\otimes n} = n! \int_{E_n} |F_1| \, d\mu^{\otimes n} = \int_{E_n} |F|^2 \, d(\mu|_{E_n}).$$

Odwzorowanie odwrotne otrzymamy przyporządkowując funkcji symetrycznej $G \in L^2(\mathbf{T}^n, \mu^{\otimes n})$ funkcję $n! \cdot G|_{E_n}$. □

Wróćmy teraz do problemu liczenia funkcji krotności spektralnej operatora $F_{sym}(U)$. Jak i w przypadku operatora $F(U)$ podamy sposób jej wyliczania jedynie w przypadku, gdy U ma proste widmo. Załóżmy ponadto, że σ jest miarą ciągłą i niech $m \geqslant 1$. Ogólnie sposób rozumowania jest bardzo podobny do dowodu wniosku 3.16 z jedną zasadniczą różnicą – badając symetryczne produkty tensorowe nie jesteśmy w stanie odróżnić punktów $(z_1, \dots, z_m)$, $(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(m)})$, gdzie π jest dowolną permutacją zbioru $\{1, \dots, m\}$ (zakładamy przy tym, że rozpatrujemy tylko punkty, których wszystkie współrzędne są parami różne). Interesuje nas teraz operator $V_\sigma^{\odot m}$, który jednakże jest de facto operatorem $V_\sigma^{\otimes m}$ tyle, że ograniczonym do pewnej podprzestrzeni. Zatem, rozpatrując zbiory $Z_n^{(m)}$, $Z_\infty^{(m)}$ oraz $Z_c^{(m)}$ musimy wziąć pod uwagę symetryzację punktów. Dla przykładu rozpatrzmy przypadek $n = 1$, tzn. zbiór $Z_1^{(m)}$ – jeśli $z \in Z_1^{(m)}$, to $\mu_z^{(m)}$ jest miarą czysto atomową skupioną na $m!$ atomach. Ale ze względu na twierdzenie 3.24 podprzestrzeń symetryczną, na której działa $V_\sigma^{\odot m}$, możemy opisać jako $L^2(E_m, \sigma^{\otimes m})$, przy czym wzór na działanie $V_\sigma^{\odot m}$ nie zmienia się:

$$(V_\sigma^{\odot m} F)(z_1, \dots, z_m) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_m F(z_1, \dots, z_m).$$

Z tego już łatwo wynika, że dla $z \in Z_1^{(m)}$, $s_m^{-1}(z)$ „wybiera” tylko jeden punkt z włókna $s_m^{-1}(z) \cap E_m$ i dlatego dla takich punktów funkcja krotności wynosi 1.

Wniosek 3.25 *Jeśli U ma proste widmo ciągłe, to dla dowolnego $m \geqslant 1$ operator $F_{sym}(U)|_{H^{\odot m}}$ ma:*
(i) jednorodną krotność spektralną n na $Z_{n \cdot m!}^{(m)}$ z typem $\sigma^{*m}|_{Z_{n \cdot m!}^{(m)}}$, $n \geqslant 1$,
(ii) nieskończoną krotność jednorodną na $Z_\infty^{(m)} \cup Z_c^{(m)}$ z typem $\sigma^{*m}|_{Z_\infty^{(m)} \cup Z_c^{(m)}}$. □

Wniosek 3.26 *Jeśli U ma proste widmo ciągłe, to $F_{sym}(U)$ ma proste widmo wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \geqslant 1$ miary warunkowe $\mu_z^{(m)}$ są dla σ^{*m}-p.w. $z \in \mathbf{T}$ czysto atomowe o $m!$ atomach oraz $\sigma^{*k} \perp \sigma^{*l}$ dla $k \neq l$.* □

Ten ostatni wniosek jest dość oczywistą konsekwencją naszych poprzednich rezultatów. Nie jest jednak jasne, czy oba podane warunki, tzn. wzajemna rozłączność splotów oraz minimalna ilość atomów dla miar warunkowych są od siebie niezależne. W następnych rozdziałach dość szeroko omówimy ten problem.

3.4 Konsekwencje prostoty widma operatorów $U^{\odot n}$

Rozpocznijmy od obserwacji, że jeśli $U \in \mathcal{U}(H)$ oraz $U^{\odot n}$ ma proste widmo dla pewnego $n \geqslant 1$, to U ma proste widmo. Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku moglibyśmy znaleźć elementy $x_1, x_2 \in H$ generujące podprzestrzenie cykliczne prostopadłe i takie, że $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}$. Łatwo sprawdzamy, że dla operatora $U^{\odot n}$ mamy $\mathbf{Z}(x_1^{\otimes n}) \perp \mathbf{Z}(x_2^{\otimes n})$ oraz $\sigma_{x_1^{\otimes n}} = \sigma_{x_2^{\otimes n}}$.

Twierdzenie 3.27 *Jeśli dla wszystkich $n > 1$ operator $U^{\odot n}$ ma proste widmo ciągłe, to operator $F_{sym}(U)$ ma również proste widmo (ciągłe).*

Dowód.

Bez straty ogóności możemy zakładać, że $U = V_\sigma$, gdzie $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ jest miarą ciągłą.

Przypuśćmy, że dla $1 \leqslant m < n$ mamy

$$\sigma^{*m} \not\ll \sigma^{*n}. \tag{3.15}$$

Pokażemy, że odwzorowanie s_{m+n} nie jest $(n+m)!$ na 1 na żadnym zbiorze borelowskim $A \subset \mathbf{T}^{m+n}$, dla którego $\sigma^{\otimes(m+n)}(A) = 1$ (co oznacza, że $U^{\odot(m+n)}$ nie ma prostego widma, sprzeczność).

Weźmy więc jakikolwiek nośnik borelowski $A \subset \mathbf{T}^{m+n}$ miary $\sigma^{\otimes(m+n)}$ i połóżmy

$$A_1 = \{x \in \mathbf{T}^m;\ \sigma^{\otimes n}(\{y \in \mathbf{T}^n;\ (x,y) \in A\}) = 1\}$$

oraz

$$A_2 = \{y \in \mathbf{T}^n;\ \sigma^{\otimes m}(\{y \in \mathbf{T}^m;\ (x,y) \in A\}) = 1\}.$$

Ze względu na uwagę 3.15 oraz twierdzenie Fubiniego mamy $\sigma^{*m}(s_m A_1) = 1 = \sigma^{*n}(s_n A_2)$, więc ze względu na (3.15) mamy $s_m A_1 \cap s_n A_2 \neq \emptyset$. Wybierzmy $z \in s_m A_1 \cap s_n A_2$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A_1$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A_2$ tak, aby

$$s_m x = z = s_n y. \tag{3.16}$$

Na mocy definicji zbiorów A_1 i A_2 możemy teraz znaleźć zbiory borelowskie $B_1 \subset \mathbf{T}^m$, $\sigma^{\otimes m}(B_1) = 1$ oraz $B_2 \subset \mathbf{T}^n$, $\sigma^{\otimes n}(B_2) = 1$ takie, że

$$(x', y) \in A \text{ dla dowolnego } x' \in B_1$$

oraz

$$(x, y') \in A \text{ dla dowolnego } y' \in B_2.$$

Ponadto ze względu na ciągłość miary σ, zbiór $y' \in \mathbf{T}^n$ z ustaloną wartością na danej współrzędnej ma miarę $\sigma^{\otimes n}$ zero, a więc możemy zakładać, że dla $y' = (y'_1, \ldots, y'_n) \in B_2$ żadna współrzędna y'_i nie należy do zbioru $\{y_j;\ j =$

$1, \ldots, n\}$. Na mocy (3.15), $s_m B_1 \cap s_n B_2 \neq \emptyset$, więc możemy znaleźć $z' \in s_m B_1 \cap s_n B_2$ oraz $x' \in B_1$, $y' \in B_2$ takie, że

$$s_m x' = z' = s_n y'. \tag{3.17}$$

Mamy oczywiście $(x, y') \in A$ oraz $(x', y) \in A$. Ponadto, używając (3.16) i (3.17)

$$s_{m+n}(x, y') = s_m(x) \cdot s_n(y') = zz' = s_{m+n}(x', y). \tag{3.18}$$

Ale ponieważ $n > m$ co najmniej jedna współrzędna y_i' nie pojawia się jako x_j', a ponadto y_i' jest różna od wszystkich liczb y_k, $k = 1, \ldots, n$. Wynika stąd, że punkt $(x, y') \in \mathbf{T}^{m+n}$ nie może być otrzymany poprzez permutację współrzędnych punktu $(x', y) \in \mathbf{T}^{m+n}$, co ze względu na (3.18) kończy dowód. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika, że prostota widma wszystkich symetrycznych potęg tensorowych implikuję singularność splotów. Jednakże bliższe spojrzenie na dowód twierdzenia 3.27 pozwala dostrzec mocniejszą własność singularności splotów i translacji.

Wniosek 3.28 *Jeśli dla wszystkich $n > 1$ operator $U^{\odot n}$ ma proste widmo ciągłe z maksymalnym typem spektralnym σ, to dla dowolnych $m, n \geqslant 1$ oraz $a \in \mathbf{T}$ mamy $\sigma^{*m} \perp \sigma^{*n} * \delta_a$ chyba, że $m = n$ oraz $a = 1$.*

Dowód.

Gdy $1 \leqslant m < n$ w dowodzie twierdzenia 3.27 należy zastąpić $s_n A_2$ przez $a \cdot s_n A_2$, $s_n y = z$ przez $s_n y = a \cdot z$ i dokonać podobnych modyfikacji dla y'.

Ponadto, gdy $a \neq 1$, dowód ten działa i dla $n = m$. Rzeczywiście, końcowy argument przechodzi, gdyż y' nie można otrzymać przestawiając współrzędne w x', bo $s_n x' \neq s_n y'$. $\square$

Zobaczmy jeszcze jak prostota widma operatora $U^{\odot n}$ wpływa na widmo niższych potęg tensorowych.

Lemat 3.29 *Niech $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ będzie ciągła. Jeśli dla pewnego $n \geqslant 1$ operator $V_\sigma^{\odot n}$ ma proste widmo, to wszystkie operatory $V_\sigma^{\odot k}$, $k = 1, \ldots, n-1$, mają również proste widmo.*

Dowód.

Wystarczy pokazać, że $V^{\odot(n-1)}$ ma proste widmo (indukcja). Przypuśćmy zatem, że ten operator nie ma prostego widma. To oznacza, że dla dowolnego nośnika borelowskiego $A \subset \mathbf{T}^{n-1}$ miary $\sigma^{\otimes(n-1)}$ odwzorowanie s_{n-1} nie jest $(n-1)!$ na 1.

Weźmy dowolny nośnik borelowski $B \subset \mathbf{T}^n$ miary $\sigma^{\otimes n}$. Kładziemy

$$\pi_{n-1} : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^{n-1}, \quad \pi_{n-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Na mocy uwagi 3.15 zbiór $\pi_{n-1}(B)$ jest borelowski. Niech

$$A := \{(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \pi_{n-1}(B);\ \sigma(\{y \in \mathbf{T};\ (z_1, \dots, z_{n-1}, y) \in B\}) = 1\}.$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że $\sigma^{\otimes(n-1)}(A) = 1$. Z założenia s_{n-1} nie jest $(n-1)!$ na 1 na zbiorze A, więc możemy znaleźć $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in A$ oraz $(z_1', \dots, z_{n-1}') \in A$ takie, że

$$s_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = s_{n-1}(z_1', \dots, z_{n-1}'),$$

przy czym $\{z_1, \dots, z_{n-1}\} \neq \{z_1', \dots, z_{n-1}'\}$. Na mocy określenia zbioru A możemy teraz znaleźć $y \in \mathbf{T}$ takie, że oba punkty $(z_1, \dots, z_{n-1}, y)$ oraz $(z_1', \dots, z_{n-1}', y)$ należą do B. Mamy oczywiście

$$s_n(z_1, \dots, z_{n-1}, y) = s_n(z_1', \dots, z_{n-1}', y),$$

ale skoro $(z_1, \dots, z_{n-1}, y)$ nie można otrzymać z $(z_1', \dots, z_{n-1}', y)$ przez przestawienie współrzędnych, to otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Do tej pory, aby powiedzieć coś o wzajemnych osobliwościach poszczególnych splotów, musieliśmy rozpatrywać wszystkie potęgi tensorowe. Okazuje się jednak, że prosto widma na ustalonej potędze tensorowej implikuje silne własności rozłączności splotów (dokładniej przypatrzymy się temu zjawisku w następnym rozdziale) i to nie tylko splotów związanych z miarą σ.

Twierdzenie 3.30 *Niech $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ będzie miarą ciągłą. Załóżmy, że $V_\sigma \odot V_\sigma$ ma proste widmo. Wówczas*

$$\sigma \perp \sigma_1 * \sigma_2$$

dla dowolnych miar ciągłych $\sigma_1, \sigma_2 \in M^+(\mathbf{T})$. W szczególności, $\sigma \perp \sigma^{*2}$.

Dowód.

Oznaczmy $s = s_2$, więc $s : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}$, $s(z,w) = z \cdot w$. Połóżmy też $p = s \times s$. Dowód będzie przebiegał metodą nie wprost. Ustalmy zbiór borelowski $N \subset \mathbf{T}^2$ taki, że

$$\sigma \otimes \sigma(N) = 0. \tag{3.19}$$

Na mocy wniosku 3.25 wystarczy zatem pokazać, że mnożenie obcięte do zbioru $\mathbf{T}^2 \setminus N$ nie jest odwzorowaniem różnowartościowym. Połóżmy $\widetilde{N} = p^{-1}(N)$. Wystarczy pokazać, że do zbioru $\mathbf{T}^4 \setminus \widetilde{N}$ należy punkt (z_1, w_1, z_2, w_2) taki, że również $(z_1, w_2, z_2, w_1) \in \mathbf{T}^4 \setminus \widetilde{N}$, przy czym $z_1 \neq z_2$ oraz $w_1 \neq w_2$ (istotnie, mamy wówczas $(z_1 w_1, z_2 w_2) \notin \widetilde{N}$, $(z_1 w_2, z_2 w_1) \notin \widetilde{N}$, punkty te są różne, natomiast iloczyny ich współrzędnych są sobie równe). Ponieważ zakładamy teraz, że $\sigma \not\perp \sigma_1 * \sigma_2$ dla pewnych miar ciągłych $\sigma_i \in M^+(\mathbf{T})$, $i = 1, 2$, więc istnieje zbiór borelowski $A \subset \mathbf{T}$ taki, że

$$\sigma_1 * \sigma_2(A) > 0, \tag{3.20}$$

$$(\sigma_1 * \sigma_2)|_A \ll \sigma. \tag{3.21}$$

Ze względu na (3.19) i (3.21) mamy

$$(\sigma_1 * \sigma_2) \otimes (\sigma_1 * \sigma_2)(A \times A \cap N) = 0,$$

a więc

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \otimes (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\widetilde{A} \times \widetilde{A} \cap \widetilde{N}) = 0,$$

gdzie $\widetilde{A} = s^{-1}(A)$. Możemy teraz znaleźć zbiory borelowskie $B, C \subset \mathbf{T}$ takie, że $\sigma_1 \otimes \sigma_2(B \times C) > 0$ oraz „prostokąt” $B \times C$ jest niemal zawarty w $\widetilde{A}$, a mówiąc precyzyjniej

$$\sigma_1 \otimes \sigma_2(B \times C \setminus \widetilde{A}) < \frac{1}{2}\sigma_1 \otimes \sigma_2(B \times C).$$

Dla $z \in \mathbf{T}$ połóżmy $\widetilde{A}_z = \{w \in \mathbf{T};\ (z,w) \in \widetilde{A}\}$. Na mocy twierdzenia Fubiniego, ewentualnie pomniejszając zbiór B, możemy założyć, że

$$\sigma_2(C \setminus \widetilde{A}_z) < \delta\sigma_2(C) \ \text{ dla wszystkich } z \in B$$

dla pewnej liczby $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Wówczas dla dowolnych $z_1, z_2 \in B$ mamy

$$\sigma_2(\widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2}) > 0,$$

a więc

$$\sigma_2 \otimes \sigma_2(\widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2} \times \widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2}) > 0. \tag{3.22}$$

Niech $P : \mathbf{T}^4 \to \mathbf{T}^4$,

$$P(z_1, w_1, z_2, w_2) = (z_1, w_2, z_2, w_2).$$

Mamy

$$\{(z_1, w_1, z_2, w_2); z_1, z_2 \in B, w_1, w_2 \in \widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2}\} \subset \widetilde{A} \times \widetilde{A} \times P^{-1}(\widetilde{A} \times \widetilde{A}).$$

$$\int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} 1_{\widetilde{A} \times \widetilde{A}} \cdot 1_{P^{-1}(\widetilde{A} \times \widetilde{A})} \, d\sigma_1^{\otimes 2} d\sigma_2^{\otimes 2} \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \left(\int_B \int_B \sigma_2 \otimes \sigma_2(\widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2} \times \widetilde{A}_{z_1} \cap \widetilde{A}_{z_2}) \right) d\sigma_1(z_1) d\sigma_2(z_2).$$

Ze względu na (3.22) ta ostatnia całka jest dodatnia, więc

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \otimes (\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\widetilde{A} \times \widetilde{A} \cap P^{-1}(\widetilde{A} \times \widetilde{A})) > 0.$$

Ponieważ rozpatrywane miary są ciągłe, więc możemy założyć dodatkowo, że $z_1 \neq z_2$ oraz $w_1 \neq w_2$, co kończy dowód. □

3.5 Analiza spektralna na podprzestrzeniach permutacyjnych przestrzeni Focka

Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 2$. Grupę $\mathcal{S}(n)$ permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ będziemy identyfikowali ze zbiorem

$$I = \{\vec{i} = (i_1, \ldots, i_n);\ i_j \neq i_k \text{ dla } j \neq k,\ 1 \leqslant i_j \leqslant n\}.$$

Niech $G \subset \mathcal{S}(n)$ będzie ustaloną podgrupą. Wówczas G działa na zbiorze I:

$$\pi((i_1, \ldots, i_n)) = (\pi(i_1, \ldots, \pi(i_n)), \tag{3.23}$$

przy czym

$$G(I) = I. \tag{3.24}$$

Ze względu na (3.23) i (3.24) możemy na I rozpatrywać relację równoważności daną przez orbity działania grupy G na I:

$$\vec{i} \equiv \vec{i'} \Leftrightarrow (\exists \pi \in G)\ \ \pi(\vec{i}) = \vec{i'}\ .$$

Niech o_G oznacza liczbę orbit[10] działania grupy G na I, tzn.

$$o_G = \sharp\,(I/\equiv) = \frac{n!}{\sharp G}. \tag{3.25}$$

Załóżmy teraz, że U jest operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Zakładać będziemy, że $\sigma_U = \sigma$ jest miarą ciągłą. Dla $\pi \in \mathcal{S}(n)$ i przypomnijmy, że U_π oznacza operator unitarny produktu tensorowego $H^{\otimes n}$ wyznaczony jednoznacznie przez warunek $U_\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(n)}$. Połóżmy

$$H^{\otimes n}_{inv}(G) := \{\widetilde{x} \in H^{\otimes n};\ U_\pi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}\ \text{ dla wszystkich } \pi \in G\}.$$

Uwaga 3.31 Oczywiście, gdy $G = \mathcal{S}(n)$, to $H^{\otimes n}_{inv}(G) = H^{\odot n}$.

Łatwo sprawdzamy (rozumując jak w dowodzie lematu 3.19), że

$$\mathrm{proj}_{H^{\otimes n}_{inv}(G)} = \frac{1}{\sharp G}\sum_{\pi \in G} U_\pi. \tag{3.26}$$

Naszym celem będzie teraz udowodnienie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.32 *Jeśli U ma widmo ciągłe oraz $U^{\odot n}$ ma proste widmo, to $U^{\otimes n}|_{H^{\otimes n}_{inv}(G)}$ ma widmo jednorodne krotności o_G.*

[10]Przypomnijmy tutaj lemat Cauchy'ego-Frobeniusa: *Jeśli X jest zbiorem skończonym, G zaś podgrupą grupy permutacji zbioru X, to*

$$o := \text{liczba orbit działania } G \text{ na } X = \frac{1}{\sharp G}\sum_{\pi \in G} \sharp\, Fix(\pi),$$

gdzie $Fix(\pi)$ oznacza liczbę punktów stałych odwzorowania $\pi : X \to X$.

Dowód.

Możemy zakładać, że $U = V_\sigma$, gdzie $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ jest miarą ciągłą. Połóżmy

$$A_{\overrightarrow{i}} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{T}^n;\ z_{i_1} < \ldots < z_{i_n}\}$$

oraz

$$F_{\overrightarrow{i}} = \mathbf{1}_{A_{\overrightarrow{i}}} L^2(\mathbf{T}^n, \sigma^{\otimes n}).$$

Wówczas zbiory $A_{\overrightarrow{i}}$, $\overrightarrow{i} \in I$ są parami rozłączne, więc dla $\overrightarrow{i} \neq \overrightarrow{i'}$ mamy $F_{\overrightarrow{i}} \perp F_{\overrightarrow{i'}}$. Ponieważ σ jest ciągła, z dokładnością do zbioru o mierze $\sigma^{\otimes n}$ równej zeru, mamy

$$\mathbf{T}^n = \bigcup_{\overrightarrow{i} \in I} A_{\overrightarrow{i}}.$$

Zatem

$$H^{\otimes n} = \bigoplus_{\pi \in \mathcal{S}(n)} F_{\pi(1,\ldots,n)}. \tag{3.27}$$

Stąd

$$H_{inv}^{\otimes n}(G) = \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} H^{\otimes n} = \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} \left(\bigoplus_{\pi \in \mathcal{S}(n)} F_{\pi(1,\ldots,n)} \right).$$

Zauważmy, że dla $\pi \in \mathcal{S}(n)$ oraz $\overrightarrow{i} \in I$ mamy

$$U_\pi(F_{\overrightarrow{i}}) = F_{\pi(\overrightarrow{i})}. \tag{3.28}$$

Ponadto, jeśli $\overrightarrow{i} \equiv \overrightarrow{i'}$, to $\overrightarrow{i} = \tau(\overrightarrow{i'})$ dla pewnego $\tau \in G$ i z (3.26) wynika, że

$$\mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\overrightarrow{i}} = \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\overrightarrow{i'}}.$$

Jeśli natomiast $\overrightarrow{i} \not\equiv \overrightarrow{i'}$, to dla dowolnych $\pi, \pi' \in G$ mamy $\pi(\overrightarrow{i}) \neq \pi'(\overrightarrow{i'})$ i dlatego zbiory $A_{\pi(\overrightarrow{i})}$ i $A_{\pi'(\overrightarrow{i'})}$ są rozłączne, stąd $F_{\pi(\overrightarrow{i})} \perp F_{\pi'(\overrightarrow{i'})}$. Zatem z (3.26) w tym przypadku otrzymamy

$$\mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\overrightarrow{i}} \perp \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\overrightarrow{i'}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$H_{inv}^{\otimes n}(G) = \bigoplus_{k=1}^{o_G} \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\vec{i_k}}. \tag{3.29}$$

Pokażemy teraz, że

$$U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i}}} \text{ jest izomorficzny z } U^{\otimes n}|_{\mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\vec{i}}}. \tag{3.30}$$

Dla uzasadnienia (3.30) rozpatrzmy odwzorowanie $W : F_{\vec{i}} \to \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)}(F_{\vec{i}})$ zadane wzorem

$$F_{\vec{i}} \ni f = \mathbf{1}_{A_{\vec{i}}} f \mapsto \sqrt{\sharp G}\,\mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} f \in \mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} F_{\vec{i}}.$$

Z (3.26), (3.28) oraz dowodu twierdzenia 3.24 wynika, że W jest surjektywną izometrią. Ekwiwariantność wynika z niezmienniczości rozpatrywanych podprzestrzeni[11], co kończy dowód (3.30).

Na mocy (3.29) oraz (3.30) otrzymujemy

$$U^{\otimes n}|_{H_{inv}^{\otimes n}(G)} \text{ jest izomorficzny z } \bigoplus_{k=1}^{o_G} U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i_k}}}.$$

Oczywiście dla dowolnych $\vec{i}, \vec{i'} \in \mathcal{S}(n)$ operatory $U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i}}}$ oraz $U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i'}}}$ są izomorficzne (izomorfizm ustala operator U_π dla odpowiednio dobranej permutacji $\pi \in \mathcal{S}(n)$). Zauważmy ponadto, że w (3.30) grupa G jest dowolna(!). Zatem biorąc $G = \mathcal{S}(n)$ otrzymamy, że $U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i}}}$ jest izomorficzny z $U^{\odot n}$. Stąd $U^{\otimes n}|_{F_{\vec{i_k}}}$ ma proste widmo i dowód został zakończony. □

Będzie nam jeszcze potrzebny następujący rezultat:

Lemat 3.33 *Załóżmy, że $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ jest ciągła. Załóżmy ponadto, że operator $V_\sigma^{\odot mk}$ ma proste widmo. Wówczas operator $(V_{\sigma^{*k}})^{\otimes m}$ ma widmo jednorodne krotności $\frac{(mk)!}{(k!)^m}$ i maksymalny typ spektralny równy σ^{*mk}.*

[11] Przypomnijmy, że jeśli Q jest operatorem liniowym i ciągłym przestrzeni Hilberta H, $F \subset H$ zaś podprzestrzenią, która jest Q oraz Q^*-niezmienniczą, to $\mathrm{proj}_F \circ Q = Q \circ \mathrm{proj}_F$.

Dowód.

Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że $m = 2$. Wówczas maksymalny typ spektralny operatora $(V_{\sigma^{*2}})^{\otimes 2}$ jest równy $\sigma^{*k} * \sigma^{*k} = \sigma^{*2k}$. Pozostaje nam więc do wyliczenia funkcja krotności spektralnej. Na mocy lematu 3.29 operator $V_\sigma^{\odot k}$ ma widmo proste. Jego maksymalny typ spektralny to oczywiście σ^{*k}, zatem $V_{\sigma^{*k}}$ is izomorficzny z operatorem $V_\sigma^{\odot k}$. Stąd

$$(V_{\sigma^{*k}})^{\otimes 2} \simeq \left(V_\sigma^{\odot k}\right)^{\otimes 2} = \left(V_\sigma^{\otimes k}\right)^{\otimes 2}|_{(H^{\odot k})^{\otimes 2}},$$

gdzie $H = L^2(T, \sigma)$. Pokażemy, że

$$(H^{\odot k})^{\otimes 2} = H_{inv}^{\otimes 2k}(G) \tag{3.31}$$

dla odpowiednio zdefiniowanej podgrupy $G \subset \mathcal{S}(2k)$. Otóż grupę G definiujemy w sposób następujący[12]:

$$G := \{\pi \in \mathcal{S}(2k);\ (\exists \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}(k))$$

$$(\pi(1), \ldots, \pi(2k)) = (\pi_1(1), \ldots, \pi_1(k), k + \pi_2(1), \ldots, k + \pi_2(k))\}.$$

Weźmy $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2k} \in H^{\otimes 2k}$. Wówczas $x_1 \otimes \ldots \otimes x_k \in H^{\otimes k}$ oraz $x_{k+1} \otimes \ldots \otimes x_{2k} \in H^{\otimes k}$. Zatem

$$\sum_{\pi_1 \in \mathcal{S}(k)} x_{\pi_1(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi_1(k)},\ \sum_{\pi_2 \in \mathcal{S}(k)} x_{k+\pi_2(1)} \otimes \ldots \otimes x_{k+\pi_2(k)} \in H^{\odot k}.$$

Stąd

$$\left(\sum_{\pi_1 \in \mathcal{S}(k)} x_{\pi_1(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi_1(k)}\right) \otimes \left(\sum_{\pi_2 \in \mathcal{S}(k)} x_{k+\pi_2(1)} \otimes \ldots \otimes x_{k+\pi_2(k)}\right) \in \left(H^{\odot k}\right)^{\otimes 2}.$$

Ponadto, elementy powyższej postaci generują przestrzeń $(H^{\odot k})^{\otimes 2}$. Z (3.26) otrzymujemy, że

$$\mathrm{proj}_{H_{inv}^{\otimes 2k}(G)}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{2k}) =$$

$$\frac{1}{\sharp G}\left(\sum_{\pi_1 \in \mathcal{S}(k)} x_{\pi_1(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi_1(k)}\right) \otimes \left(\sum_{\pi_2 \in \mathcal{S}(k)} x_{k+\pi_2(1)} \otimes \ldots \otimes x_{k+\pi_2(k)}\right)$$

[12] Gdy $m > 2$ dowód jest ten sam, π jest permutacją wyznaczoną przez m permutacji $\pi_1, \ldots, \pi_m \in \mathcal{S}(k)$ działających kolejno na kolejnych k współrzędnych.

i dlatego (3.31) zachodzi.

Zauważmy, że aby wyznaczyć permutację $\pi \in G$ musimy wybrać dwie (niekoniecznie różne) permutacje zbioru k-elementowego. Zatem mamy $(k!)^2$ takich możliwości, innymi słowy $\sharp G = (k!)^2$ i stąd

$$o_G = \frac{(2k)!}{\sharp G} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy użyć twierdzenia 3.32. $\square$

Stwierdzenie 3.34 *Załóżmy, że $\sigma \in M_1^+(\mathbf{T})$ jest ciagła i taka, że $F_{sym}(V_\sigma)$ ma proste widmo (równoważnie, $V_\sigma^{\odot m}$ ma proste widmo dla wszystkich $m \geqslant 1$). Wówczas dla dowolnego $k \geqslant 1$ zbiór istotnych wartości funkcji krotności spektralnej operatora $F_{sym}(V_{\sigma^{*k}})$ jest równy*

$$\left\{ \frac{(mk)!}{(k!)^m m!};\ m \geqslant 1 \right\}.$$

Zauważmy, że dla $k \geqslant 2$ funkcja krotności spektralnej przyjmuje nieskończenie wiele wartości. Pozostaje otwartym następujący:

Problem Jakie własności arytmetyczne posiada funkcja krotności spektralnej operatora $F_{sym}(V_\sigma)$, gdy σ przebiega podzbiór miar ciągłych w $M^+(\mathbf{T})$?

Jedynym znanym (klasycznym) rezultatem jest następujące:

Twierdzenie 3.35 *Dla dowolnej miary ciągłej $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ funkcja krotności spektralnej $M_{F_{sym}(V_\sigma)}$ albo przyjmuje tylko jedną wartość 1, albo nie jest ona ograniczona.*

4 Teoria spektralna reprezentacji unitarnych lokalnie zwartych grup abelowych

Zajmiemy się obecnie sytuacją, w której zamiast pojedynczego operatora unitarnego rozpatrywać będziemy reprezentację unitarną lokalnie zwartej grupy abelowej $\mathbf{A}$.

Zakładamy zatem, że mamy reprezentację unitarną $\mathcal{U} = \{U_a\}_{a\in\mathbf{A}}$ lokalnie zwartej grupy abelowej $\mathbf{A}$ na ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Zakładamy przy tym, że reprezentacja ta jest ciągła, tzn. dla dowolnego $x \in H$ odwzorowanie $a \mapsto U_a x$ jest ciągle jako odwzorowanie z $\mathbf{A}$ do H (mówimy, że reprezentacja $\mathcal{U}$ jest *mocno ciągła*). Równoważnie, łatwo pokazujemy, że reprezentacja $\mathcal{U}$ jest mocno ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona *słabo ciągła* tzn. odwzorowanie $a \mapsto \langle U_a x, y\rangle$ jest ciągłe dla dowolnych $x, y \in H$.

Przypomnijmy, że $\hat{\mathbf{A}}$ oznacza grupę charakterów grupy $\mathbf{A}$, tzn. grupę wszystkich ciągłych homomorfizmów grupowych z $\mathbf{A}$ do $\mathbf{T}$. Rozpatrując na $\hat{\mathbf{A}}$ topologię zwarto-otwartą (w tej topologii bazę otoczeń zera w $\widehat{A}$ stanowią zbiory postaci

$$\{\chi \in \widehat{\mathbf{A}};\ |\chi(a) - 1| < \varepsilon \text{ dla dowolnego } a \in K\},$$

gdzie $K \subset \mathbf{A}$ jest podzbiorem zwartym, a $\varepsilon > 0$) otrzymujemy, że również $\hat{\mathbf{A}}$ jest lokalnie zwartą grupą abelową. Przypomnijmy ponadto, że kanoniczne zanurzenie $i : \mathbf{A} \to \hat{\hat{\mathbf{A}}}$ dane wzorem

$$i(a)(\chi) = \chi(a)$$

w istocie jest naturalnym ciągłym grupowym izomorfizmem grup $\mathbf{A}$ i $\hat{\hat{\mathbf{A}}}$ (jest to treść twierdzenia Pontriagina o dualności).

Podamy teraz kilka najważniejszych twierdzeń związanych z dualnością.

(4.1) $\mathbf{A}$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności
wtedy i tylko wtedy, gdy
$\widehat{\mathbf{A}}$ spełnia drugi aksjomat przeliczalności.

(4.2) $\mathbf{A}$ spójna wtedy i tylko wtedy, gdy
$\widehat{\mathbf{A}}$ nie zawiera podgrup zwartych różnych od $\{1\}$.

$$
\text{(4.3)} \qquad \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{A}} \text{ jest zerowymiarowa} \\ \text{(tzn. posiada bazę zbiorów otwarto-domkniętych)} \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \text{dla dowolnego } a \in \mathbf{A}\text{, grupa cykliczna} \\ \text{generowana przez } a \text{ jest relatywnie zwarta.} \end{array}
$$

$$
\text{(4.4)} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \widehat{\mathbf{A}} \text{ jest dyskretna.} \end{array}
$$

$$
\text{(4.5)} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ jest zwarta, to } \widehat{\mathbf{A}} \subset L^2(\mathbf{A}, \lambda_A) \\ \text{jest bazą ortonormalną} \\ (\lambda_{\mathbf{A}} \text{ oznacza (unormowaną) miarę Haara grupy } \mathbf{A}). \end{array}
$$

$$
\text{(4.6)} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} \text{ jest zwarta, to } \mathbf{A} \text{ spełnia drugi aksjomat przeliczalności} \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } \widehat{\mathbf{A}} \text{ jest przeliczalna.} \end{array}
$$

Podajmy jeszcze podstawowe własności grupy charakterów. Przede wszystkim charaktery *rozdzielają punkty*, tzn. jeśli $0 \neq a \in \mathbf{A}$, to istnieje $\chi \in \widehat{\mathbf{A}}$ taki, że $\chi(a) \neq 1$. Równoważnie, jeśli $a \neq a'$, to istnieje $\chi \in \widehat{\mathbf{A}}$ taki, że $\chi(a) \neq \chi(a')$.

Wniosek 4.1 *Załóżmy, że* $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ *jest podgrupą domkniętą i niech* $a \notin \mathbf{B}$. *Wówczas istnieje* $\chi \in \widehat{\mathbf{A}}$ *taki, że* $\chi|_{\mathbf{B}} = 1$ *oraz* $\chi(a) \neq 1$.

Dowód.
Ponieważ $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ jest lokalnie zwarta oraz $a+\mathbf{B} \neq 0$ w $\mathbf{A}/\mathbf{B}$, więc wystarczy zastosować twierdzenie o rozdzielaniu punktów przez charaktery grupy $\mathbf{A}/\mathbf{B}$.
□

Załóżmy, że $\mathbf{B}$ jest podgrupą domkniętą grupy $\mathbf{A}$. Wówczas zachodzi ważne twierdzenie o rozszerzaniu:

$$
\text{(4.7)} \qquad \text{Dla dowolnego } \eta \in \widehat{\mathbf{B}} \text{ istnieje } \chi \in \widehat{\mathbf{A}} \text{ taki, że } \chi|_{\mathbf{B}} = \eta.
$$

Zdefiniujmy ponadto *anihilator* tej podgrupy kładąc

$$ann(\mathbf{B}) = \{\chi \in \widehat{\mathbf{A}};\ \chi|_{\mathbf{B}} = 1\}.$$

Niech $p_{\mathbf{B}}$ będzie homomorfizmem dualnym do włożenia $j_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, tzn. $p_{\mathbf{B}}(\chi) = \chi \circ j_{\mathbf{B}}$. Wówczas nietrudno spostrzec, że dla dowolnego $\eta \in \widehat{\mathbf{B}}$ mamy

$$p_{\mathbf{B}}^{-1}(\eta) = \widetilde{\eta}\, ann(\mathbf{B}), \tag{4.8}$$

gdzie $\widetilde{\eta}$ jest dowolnym rozszerzeniem charakteru η do charakteru grupy $\mathbf{A}$. Stąd łatwo już pokazać, że zachodzi następujący fakt:

(4.9) Anihilator $ann(\mathbf{B})$ jest naturalnie izomorficzny z grupą $(\mathbf{A}/\mathbf{B})\widehat{\ }$.

Zapiszmy jeszcze ważny wniosek, którego użyjemy, gdy będziemy rozpatrywali reprezentacje indukowane.

Wniosek 4.2 *Załóżmy, że* $\mathbf{A}$ *spełnia drugi aksjomat przeliczalności. Jeśli* $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ *jest kozwarta (tzn. grupa* $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ *jest zwarta), to włókna odwzorowania dualnego* $p_{\mathbf{B}}$ *są przeliczalne.*

Dowód.
Jest to natychmiastowy wniosek z (4.8), (4.9) oraz (4.6). □

Uwaga 4.3 *Przypomnijmy też, że w świetle teorii charakterów pojęcia produktu i sumy prostej grup stają się dualne:*

$$(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots)\widehat{\ } = \widehat{\mathbf{A}_1} \oplus \widehat{\mathbf{A}_2} \oplus \ldots,$$

$$(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots)\widehat{\ } = \widehat{\mathbf{A}_1} \times \widehat{\mathbf{A}_2} \times \ldots.$$

4.1 Twierdzenie Bochnera

Będziemy stale zakładali, że rozpatrywane grupy abelowe, lokalnie zwarte spełniają drugi aksjomat przeliczalności (spełnione są zatem w szczególności własności wymienione w twierdzeniu 1.13) zarówno dla $\mathbf{A}$, jak i dla grupy $\widehat{\mathbf{A}}$).

Zanim przejdziemy do pełnego opisu reprezentacji unitarnych grupy $\mathbf{A}$, udowodnimy twierdzenie Bochnera, które jest uogólnieniem twierdzenia Herglotza. Centralnym pojęciem jest oczywiście pojęcie funkcji dodatnio określonej: Funkcję $r : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ nazywamy *dodatnio określoną*, gdy

$$\sum_{n,m=0}^{N} r(a_n - a_m)c_n\overline{c_m} \geqslant 0 \tag{4.10}$$

dowolnego $N \geqslant 0$, $(a_n) \subset \mathbf{A}$ i dowolnego ciągu liczb zespolonych (c_n). Jeśli $r : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ jest funkcją dodatnio określoną, to dla dowolnych elementów $a, b \in \mathbf{A}$:

$$r(-a) = \overline{r(a)}, \tag{4.11}$$

$$|r(a)| \leqslant r(0), \tag{4.12}$$

$$|r(a) - r(b)|^2 \leqslant 2r(0)\mathrm{Re}[r(0) - r(a-b)], \tag{4.13}$$

przy czym dowody tych własności są powtórzeniami argumentów dla przypadku $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$. Zauważmy, że jeśli funkcja dodatnio określona jest ciągła, to jest ona jednostajnie ciągła (wynika to z (4.13)).

Ćwiczenie 4.4 Pokazać, że jeśli $G \subset \mathbf{A}$ jest podgrupą borelowską grupy $\mathbf{A}$, to 1_G jest (borelowską) funkcją dodatnio określoną na $\mathbf{A}$.

Wskazówka Niech $C = \{0 \leqslant n \leqslant N;\ a_n \in G\}$. Wówczas suma (4.10) redukuje się do

$$\left|\sum_{n,m\in C} c_n\right|^2 + \sum_{n,m\notin C, a_n - a_m \in G} c_n\overline{c}_m.$$

Zauważyć, że ta druga suma jest sumą składników postaci $|c_n + c_m|^2$, gdzie $n, m \notin C$, $a_n - a_m \in G$.

Dla funkcji $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ przyjmijmy $\widetilde{f}(a) = \overline{f(-a)}$. Niech $f, g \in L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$. Przypomnijmy, że wówczas splot $f * g \in L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$, gdzie $f * g(a) = \int_{\mathbf{A}} f(a-b)g(b)\, db$[13]. Korzystając z faktu, że miara Haara jest niezmiennicza dla odwzorowania $a \mapsto -a$, łatwo sprawdzamy, że $\widetilde{f * g} = \widetilde{f} * \widetilde{g}$.

[13]Dla skrótu piszemy db zamiast $d\lambda_{\mathbf{A}}(b)$.

Twierdzenie 4.5 (Bochnera) *Niech $r : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas r jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara (regularna) $\sigma \in M^+(\widehat{\mathbf{A}})$ taka, że*

$$r(a) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \gamma(a)\, d\sigma(\gamma). \tag{4.14}$$

Dowód.

Ze względu na (4.12) możemy zakładać, że $r(0) = 1$ (i stąd $\|r\|_\infty = 1$). Jeśli $f \in C_c(\mathbf{A})$, a wiec jej nośnikiem jest pewien zbiór zwarty K, to funkcja

$$K \times K \ni (a, b) \mapsto f(a)\overline{f(b)}r(a - b)$$

jest jednostajnie ciągła na $K \times K$ oraz zbiór K można rozbić na rozłączne podzbiory $E_1, \ldots, E_n$ takie, że suma

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(a_i)\overline{f(a_j)}r(a_i - a_j)\lambda_{\mathbf{A}}(E_i)\lambda_{\mathbf{A}}(E_j) \tag{4.15}$$

($a_i \in E_i$) jest dowolnie bliska całce

$$\int_{\mathbf{A}}\int_{\mathbf{A}} f(a)\overline{f(b)}r(a - b)\, dadb. \tag{4.16}$$

Ale funkcja r jest dodatnio określona, więc każda suma postaci (4.15) jest nieujemna, a więc i całka w (4.16) jest nieujemna. Ponieważ przestrzeń $C_c(\mathbf{A})$ jest gęsta w $L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$, więc całka w (4.16) jest nieujemna i dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$.

Definiujemy teraz funkcjonał (liniowy i ciągły) $T_r : L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}}) \to \mathbf{C}$ kładąc

$$T_r(f) = \int_{\mathbf{A}} f(a)r(a)\, da. \tag{4.17}$$

Ponadto definiujemy formę $[\cdot, \cdot] : L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}}) \times L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}}) \to \mathbf{C}$ wzorem

$$[f, g] = T_r(f * \widetilde{g}), \tag{4.18}$$

tzn.

$$[f, g] = \int_{\mathbf{A}}\int_{\mathbf{A}} f(a)\overline{g(b)}r(a - b)\, dadb. \tag{4.19}$$

Istotnie

$$\int_{\mathbf{A}}(f*\widetilde{g})(a)r(a)\,da=\int_{\mathbf{A}}\Big(\int_{\mathbf{A}}f(a-b)\widetilde{g}(b)\,db\Big)\,r(a)\,da=$$

$$=\int_{\mathbf{A}}\Big(\int_{\mathbf{A}}f(a-b)r(a)\,da\Big)\,\widetilde{g}(b)\,db=\int_{\mathbf{A}}\Big(\int_{\mathbf{A}}f(a)r(a+b)\,da\Big)\,\overline{g(-b)}\,db=$$

$$=\int_{\mathbf{A}}\int_{\mathbf{A}}f(a)\overline{g(b)}r(a-b)\,dadb$$

Wynika stąd, że otrzymana forma $[\cdot,\cdot]$ jest półtoraliniowa, a dodatkowo z faktu, że całki (4.16) są nieujemne, otrzymujemy, że stowarzyszona z nią forma kwadratowa jest nieujemna. Te dwie własności są jedynymi, z których korzystamy przy dowodzie nierówności Schwarza. Zatem mamy

$$|[f,g]|^2\leqslant[f,f]\cdot[g,g] \tag{4.20}$$

dla dowolnych funkcji $f,g\in L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$. Weźmy teraz za g funkcję charakterystyczną symetrycznego otoczenia V, gdzie domknięcie $\overline{V}$ jest zwarte, punktu 0 „unormowaną” przez $1/\lambda_{\mathbf{A}}(V)$. Z (4.19) otrzymujemy, że

$$[f,g]-T_r(f)=\int_{\mathbf{A}}\int_{\mathbf{A}}f(a)\overline{g(b)}r(a-b)\,dadb-\int_{\mathbf{A}}f(a)r(a)\,da=$$

$$=\int_{\mathbf{A}}f(a)\Big(\int_{\mathbf{A}}\overline{g(b)}r(a-b)\,db-r(a)\Big)\,da=$$

$$=\int_{\mathbf{A}}f(a)\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbf{A}}(V)}\int_V\left(r(a-b)-r(a)\right)\,db\right)da,$$

a ponadto

$$[g,g]-1=\frac{1}{\lambda_{\mathbf{A}}(V)^2}\int_V\int_V(r(a-b)-1)\,dadb.$$

Skoro funkcja r jest jednostajnie ciągła, więc przez wzięcie V dostatecznie małego powyżej liczone różnice funkcji podcałkowych, co do modułu, są dowolnie małe, a zatem z nierówności Schwarza (4.20) wynika, że

$$|T_r(f)|^2\leqslant[f,f]=T_r(f*\widetilde{f}). \tag{4.21}$$

Połóżmy $h=f*\widetilde{f}$ oraz $h^{*n}=h^{*(n-1)}*h$ $(n=2,3,\ldots)$. Ponieważ $\|r\|_\infty=1$, więc $\|T_r\|=1$. Stosujemy teraz (4.21) wstawiając zamiast funkcji f kolejno h, h^{*2}, ..., otrzymując

$$|T_r(f)|^2\leqslant T_r(h)\leqslant\Big(T_r(h^{*2})\Big)^{1/2}\leqslant\ldots\leqslant$$

$$\leqslant \Big(T_r(h^{*2^n})\Big)^{2^{-n}} \leqslant \|h^{*2^n}\|_1^{2^{-n}}.$$

Ponieważ jesteśmy w algebrze Banacha $L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$, więc

$$\|h^{*2^n}\|_1^{2^{-n}} \to \text{(z definicji!) promień spektralny funkcji } h = \|\widehat{h}\|_\infty$$

(patrz Dodatek, rozdział 7.4 dotyczący algebr Banacha). Ponieważ $\widehat{f * \widetilde{f}} = \widehat{f} \cdot \widehat{\widetilde{f}}$, więc

$$|T_r(f)|^2 \leqslant \|\widehat{h}\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty^2,$$

a więc

$$|T_r(f)| \leqslant \|\widehat{f}\|_\infty. \tag{4.22}$$

To oznacza, że funkcjonał T_r możemy rozpatrywać jako funkcjonał liniowy określony na przestrzeni $A(\widehat{\mathbf{A}})(\subset C_0(\widehat{\mathbf{A}}))$ transformat Fouriera: istotnie, wzór $T_r(\widehat{f}) = T_r(f)$ daje poprawną definicję. Ponieważ jednak przestrzeń $A(\widehat{\mathbf{A}})$ jest gęsta w $C_0(\widehat{\mathbf{A}})$, więc funkcjonał T_r można rozszerzyć do funkcjonału liniowego i ciągłego na $C_0(\widehat{\mathbf{A}})$ (z zachowaniem normy). Na mocy twierdzenia Riesza istnieje miara (jedyna) $\sigma \in M(\widehat{\mathbf{A}})$ o wahaniu równym 1 taka, że $T_r(F) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} F(-\gamma)\, d\sigma(\gamma)$ dla dowolnej funkcji $F \in C_0(\widehat{\mathbf{A}})$. Zatem dla $f \in L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$ mamy

$$\begin{aligned} T_r(f) &= T_r(\widehat{f}) = \textstyle\int_{\widehat{\mathbf{A}}} \widehat{f}(-\gamma)\, d\sigma(\gamma) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \left(\int_{\mathbf{A}} f(a)\gamma(a)\, da\right) d\sigma(\gamma) = \\ &= \textstyle\int_{\mathbf{A}} f(a) \left(\int_{\widehat{\mathbf{A}}} \gamma(a)\, d\sigma(\gamma)\right) da. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Patrząc na (4.17) i (4.23) otrzymujemy, że dla $\lambda_{\mathbf{A}}$-p.w. $a \in \mathbf{A}$ mamy $r(a) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \gamma(a)\, d\sigma(\gamma)$, ale ponieważ obie strony w powyższej równości p.w. są funkcjami ciągłymi argumentu $a \in \mathbf{A}$, więc powyższa równość zachodzi dla wszystkich $a \in \mathbf{A}$. Biorąc $a = 0$ w (4.14) otrzymujemy, że

$$1 = r(0) = \sigma(\widehat{\mathbf{A}}) \leqslant \|\sigma\| = 1,$$

a więc $\sigma(\widehat{\mathbf{A}}) = \|\sigma\|$ i stąd $\sigma \geqslant 0$, co kończy dowód twierdzenia Bochnera-Herglotza. □

Wracając do naszej reprezentacji, dla dowolnego $x \in H$ jego miara spektralna $\sigma_x = \sigma_{x,\mathcal{U}}$ jest więc jedyną (dodatnią) miarą borelowską na grupie dualnej $\hat{\mathbf{A}}$ spełniającą warunek

$$\hat{\sigma}_x(a) := \int_{\hat{\mathbf{A}}} \chi(a)\, d\sigma_x(\chi) = \langle U_a x, x\rangle \tag{4.24}$$

dla dowolnego $a \in \mathbf{A}$ (oczywiście funkcja $(\hat{\sigma}_x(a))_{a\in\mathbf{A}}$ jest funkcją ciągłą i dodatnio określoną).

Zauważmy, że naturalnym przykładem reprezentacji grupy $\mathbf{A}$ jest ustalenie $\sigma \in M^+(\widehat{\mathbf{A}})$ i położenie $H = L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma)$, $\mathcal{V}_\sigma = (V_{\sigma,a})_{a\in\mathbf{A}}$, gdzie

$$V_{\sigma,a}(f)(\chi) = \chi(a)f(\chi).$$

Oczywiście w tym przypadku H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta (i tę samą własność posiadają sumy proste takich reprezentacji).

Zauważmy, jak „trudno" jest takiej reprezentacji być reprezentacją nieprzywiedlną. Istotnie, jedyne reprezentacje nieprzywiedlne otrzymamy biorąc za σ miary Diraca (w przeciwnym razie biorąc funkcje skupione na podzbiorze miary dodatniej istotnie mniejszym niż $\widehat{\mathbf{A}}$ otrzymujemy podprzestrzeń niezmienniczą). W tym sensie jest jasne, że klasyfikacja reprezentacji grup niezwartych, lokalnie zwartych (abelowych) jest istotnie różna od przypadku zwartego (i twierdzenia Petera-Weyla).

Zauważmy, że jeśli $J \subset \mathbf{A}$ jest zbiorem zwartym, to obcięcia kombinacji liniowych charakterów dają zbiór gęsty w $C(J)$ (ponieważ charaktery rozdzielają punkty, więc wystarczy skorzystać z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa). Ponieważ $C_c(\mathbf{A})$ jest podprzestrzenią gęstą w $C_0(\mathbf{A})$, więc w tym sensie charaktery tworzą zbiór liniowo gesty w $C_0(\mathbf{A})$.

Uwaga 4.6 Zauważmy, że jesli $\mu \in M^+(\mathbf{A})$ oraz $\widehat{\mu}(a) = 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{A}$, to $\mu = 0$.

Istotnie, powtórzymy dowód twierdzenia 1.14 z kilkoma modyfikacjami. Mianowicie ustalmy $K \subset \widehat{\mathbf{A}}$ zwarty i rozpatrzmy zamiast μ miarę $\mu|_K$. Weźmy dowolną funkcję $f \in C_c(\widehat{\mathbf{A}})$, powiedzmy, że jej nośnik jest zawarty w zbiorze zwartym $L \subset \widehat{\mathbf{A}}$. Wówczas funkcja

$$(\mu|_K * f)(\chi) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} f(\chi \cdot \overline{\eta})\, \mu|_K(\eta)$$

ma nośnik zawarty w zbiorze zwartym $K \cdot L$ i powtarzając rozumowanie jak w twierdzeniu 1.14 wnioskujemy, że $\mu|_K = 0$. A skoro μ jest regularna, więc $\mu = 0$.

Używając powyższej uwagi, łatwo teraz sprawdzamy (dowód jest powtórzeniem argumentów dla przypadku $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$), że zachodzi lemat Wienera:

Jeśli $F \subset L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{V}_\sigma$-niezmienniczą, to $F = 1_X \cdot L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma)$ dla pewnego $X \in \mathcal{B}(\widehat{\mathbf{A}})$.

4.2 Twierdzenie spektralne dla reprezentacji unitarnych

Jeśli $\mathcal{U}$ jest dowolną reprezentacją grupy $\mathbf{A}$ (w ośrodkowej przestrzeni Hilberta H), to określamy pojęcie przestrzeni cyklicznej $\mathbf{A}(x)$ generowanej przez $x \in H$ kładąc

$$\mathbf{A}(x) = span\,\{U_a x;\ a \in \mathbf{A}\}.$$

Równie łatwo jak w przypadku $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ pokazujemy, że podreprezentacja $\mathcal{U}|_{\mathbf{A}(x)}$ jest równoważna reprezentacji $\mathcal{V}_{\sigma_x}$, przy czym izomorfizm I jest naturalnym rozszerzeniem przyporządkowania $x \mapsto 1_{\widehat{\mathbf{A}}}$, a więc

$$I(U_a x)(\chi) = \chi(a),\quad a \in \mathbf{A}.$$

W końcu zauważmy, ze naturalnym pojęciem wielomianu trygonometrycznego (wielomiany trygonometryczne dla $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ to funkcje postaci $P(z) = \sum_{i=-n}^{n} \alpha_a z^i$ określone na $\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{Z}}$) to wyrażenia postaci $p(\chi) = \sum_{a\in A} \alpha_a \chi(a)$, gdzie $A \subset \mathbf{A}$ jest skończonym podzbiorem, zaś $\alpha_a \in \mathbf{C}$. Stąd wynika, że $p(U) = \sum_{a\in A} \alpha_a U_a$.

Wszystkie argumenty, których użyliśmy dla dowodu twierdzenia spektralnego w przypadku $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$, łatwo przechodzą w przypadku ogólnym, zachodzi zatem następujące

Twierdzenie 4.7 (twierdzenie spektralne) *Dla dowolnej reprezentacji unitarnej $\mathcal{U} = (U_a)_{a\in\mathbf{A}}$ na ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje rozkład spektralny, tzn. istnieje rozkład postaci*

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}(x_n),\quad \sigma_{x_1} \gg \sigma_{x_2} \gg \ldots,$$

przy czym jeśli $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}(y_n)$ jest innym rozkładem spektralnym, to $\sigma_{x_i} \equiv \sigma_{y_i}$ dla dowolnego $i \geqslant 1$. □

Zatem, podobnie jak dla przypadku $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ każda reprezentacja unitarna grupy $\mathbf{A}$ jest wyznaczona przez dwa niezmienniki: $\sigma_{\mathcal{U}}$ – maksymalny typ spektralny i $M_{\mathcal{U}}$ – funkcję krotności spektralnej.

Ustalmy teraz $a \in \mathbf{A}$ oraz $x \in H$ i zobaczmy, jaki jest związek pomiędzy miarą spektralną elementu x dla działania $\mathcal{U}$ i miarą spektralną tego samego elementu dla działania operatora unitarnego U_a.

Lemat 4.8 *Dla dowolnego* $a \in \mathbf{A}$ *oraz* $x \in H$ *mamy* $\sigma_{x,U_a} = i(a)_*(\sigma_{x,\mathcal{U}})$.

Dowód.
Mamy $i(a) : \hat{\mathbf{A}} \to \mathbf{T}$ oraz

$$\int_{\mathbf{T}} z^n \, d\sigma_{x,U_a}(z) = \langle U_a^n x, x\rangle = \langle U_{na} x, x\rangle =$$

$$= \int_{\hat{\mathbf{A}}} \chi(na) \, d\sigma_{x,\mathcal{U}}(\chi) = \int_{\hat{\mathbf{A}}} \chi(a)^n \, d\sigma_{x,\mathcal{U}}(\chi) = \int_{\hat{\mathbf{A}}} (i(a)(\chi))^n \, d\sigma_{x,\mathcal{U}}(\chi) =$$

$$= \int_{\mathbf{T}} z^n \, d(i(a))_*(\sigma_{x,\mathcal{U}})(z),$$

a więc $\hat{\sigma}_{x,U_a}(n) = (i(a)_*(\sigma_{x,\mathcal{U}}))\hat{\ }(n)$ dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$, co kończy dowód.

□

Spróbujmy teraz coś powiedzieć o krotności operatora U_a zakładając, że znamy krotność reprezentacji $\mathcal{U}$. Rozpatrzmy więc najprostszy przypadek, gdy $H = L^2(\hat{\mathbf{A}}, \sigma)$, a działanie grupy A zadane jest wzorem $U_a(f)(\chi) = \chi(a)f(\chi)$, tzn. zakładamy, że $\mathcal{U}$ ma proste widmo. Ustalamy $a \in \mathbf{A}$. Zróbmy uwagę wstępną: Jeśli $C \subset \hat{\mathbf{A}}$ jest podzbiorem mierzalnym, to podprzestrzeń $L^2(\hat{\mathbf{A}}, \sigma) \cdot 1_C$ funkcji o nośniku zawartym w C jest podprzestrzenią cykliczną dla reprezentacji $\mathcal{U}$ i jest podprzestrzenią niezmienniczą dla operatora U_a (jak zobaczymy poniżej, niekoniecznie cykliczną) – pamiętamy też, że lemat Wienera mówi nam, iż podprzestrzenie niezmiennicze dla $\mathcal{U}$ są właśnie postaci $L^2(\hat{\mathbf{A}}, \sigma) \cdot 1_C$ (a ortogonalność tego typu przestrzeni sprowadza się do rozłączności nośników).

Niech $\nu := i(a)_*(\sigma)$ (wiemy już, że ν będzie więc maksymalnym typem spektralnym dla operatora U_a na H). Następnie weźmy dezintegrację miary σ nad miarą ν:

$$\sigma = \int_{\mathbf{T}} \delta_z \otimes \sigma_z \, d\nu(z).$$

Rozbijmy okrąg $\mathbf{T}$ na następujące (mierzalne) części:

$$X_c = \{z \in \mathbf{T};\ \sigma_z \text{ nie jest miarą dyskretną}\},$$

$$X_n = \{z \in \mathbf{T};\ \sigma_z \text{ ma dokładnie } n \text{ atomów}\},$$

$n = 1, 2, \ldots, \infty$. Zauważmy, że $i(a)_*(\sigma|_{i(a)^{-1}(X_c)})$ jest miarą spektralną (względem operatora U_a) dla elementu $1_{i(a)^{-1}(X_c)}$. Weźmy dowolny podzbiór mierzalny $C \subset i(a)^{-1}(X_c)$ ale taki, że $\sigma_z(C) > 0$ dla wszystkich $z \in X_c$ (innymi słowy we włóknach wybieramy podzbiór miary warunkowej dodatniej i sumujemy po wszystkich włóknach - oczywiście należy to robić w sposób mierzalny). Twierdzimy teraz, że miara spektralna elementu 1_C jest równoważna mierze spektralnej elementu $1_{i(a)^{-1}(X_c)}$ (która jest równa $\nu|_{X_c}$). Istotnie, miara spektralna elementu 1_C jest równa $i(a)_*(\sigma|_C)$. Niech $i(a)_*(\sigma|_C)(Y) = 0$. Zatem $\sigma(C \cap i(a)^{-1}(Y)) = 0$, a więc

$$\int_Y \sigma_z(C \cap i(a)^{-1}(Y))\, d\nu(z) = 0,$$

skąd $\nu(Y) = 0$, gdyż $\sigma_z(C \cap i(a)^{-1}(Y)) > 0$ dla $z \in X_c$. Jest rzeczą jasną, że zbiory C powyższej postaci możemy teraz wybierać w sposób rozłączny w nieograniczonej ilości - stąd funkcja krotności spektralnej operatora U_a na X_c jest równa $+\infty$. Podobny wynik otrzymamy na X_∞, natomiast na X_n krotność wynosi dokładnie n, $n \geqslant 1$ (wybierając po jednym atomie z każdego włókna nad X_n otrzymujemy przestrzeń cykliczną dla operatora U_a - działanie operatora U_a w tej przestrzeni jest izomorficzne z mnożeniem przez zmienną niezależną w $L^2(\mathbf{T}, \nu|_{X_n})$). Udowodniliśmy w ten sposób następujący lemat:

Lemat 4.9 *Dla dowolnej reprezentacji unitarnej $\mathcal{U} = (U_a)_{a\in\mathbf{A}}$ i ustalonego $a \in \mathbf{A}$ mamy: Dla ν-p.w. $z \in \mathbf{T}$*

$$M_{U_a}(z) = \begin{cases} +\infty, & \textit{gdy} \;\; \sigma_z \;\; \textit{nie jest miarą dyskretną}, \\ \sum_{\sigma_z(\chi)>0} M_{\mathcal{U}}(\chi), & \textit{gdy} \;\; \sigma_z \;\; \textit{jest miarą dyskretną}. \end{cases}$$

□

Ćwiczenie 4.10 Pokazać, że jeśli $\mathcal{U} = (U_t)_{t\in\mathbf{R}} \subset \mathcal{U}(H)$ jest podgrupą jednoparametrową, to następujące warunki są równoważne:
(i) $\mathcal{U}$ ma widmo ciągłe (absolutnie ciągłe, singularne);
(ii) dla każdego $t \neq 0$, U_t ma widmo ciągłe (absolutnie ciągłe, singularne);
(iii) istnieje $t_0 \neq 0$ takie, że U_{t_0} ma widmo ciągłe (absolutnie ciągłe, singularne).

Ćwiczenie 4.11 Załóżmy, że $\mathcal{U} = (U_t)_{t\in\mathbf{R}} \subset \mathcal{U}(H)$ jest podgrupą jednoparametrową z prostym widmem Lebesgue'a. Pokazać, że dla każdego $t \neq 0$ operator U_t ma widmo Lebesgue'a o nieskończonej krotności.

4.3 Symetrie grupowe i krotność jednorodna

Zauważmy, że z reprezentacją unitarną $\mathcal{U}$ grupy $\mathbf{A}$ mamy stowarzyszoną całą rodzinę reprezentacji danych przez „symetrie" samej grupy $\mathbf{A}$ – przez symetrię rozumiemy tutaj po prostu dowolny automorfizm grupowy[14] $L : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Zatem rozważmy reprezentację $\mathcal{U}^L$, gdzie

$$U^L(a) := U_{L(a)}, \quad a \in \mathbf{A}.$$

Oznaczmy przez σ (σ^L), M (M^L) maksymalny typ spektralny i funkcję krotności spektralnej reprezentacji $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}^L$). Niech $\widehat{L} : \widehat{\mathbf{A}} \to \widehat{\mathbf{A}}$ będzie automorfizmem dualnym. Zachodzi wówczas następujący:

Lemat 4.12 $\sigma^L = \widehat{L}_*(\sigma),\ M^L = M \circ \widehat{L}.$

Dowód.
Dla dowolnych $x \in H$, $a \in \mathbf{A}$ mamy

$$\int_{\widehat{\mathbf{A}}} \chi(a)\, d\sigma_{x,\mathcal{U}^L}(\chi) = \widehat{\sigma}_{x,\mathcal{U}^L}(a) = \langle U_{L(a)}x, x\rangle = \widehat{\sigma}_{x,\mathcal{U}}(L(a)) =$$

$$= \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \chi(L(a))\, d\sigma_{x,\mathcal{U}} = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \widehat{L}(\chi)(a)\, d\sigma_{x,\mathcal{U}}(\chi) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \chi(a)\, d\widehat{L}_*(\sigma_{x,\mathcal{U}})(\chi),$$

co natychmiast przekłada się na zależność pomiędzy typami spektralnymi. Ponadto, obie reprezentacje $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}^L$ mają dokładnie te same podprzestrzenie niezmiennicze i podprzestrzenie cykliczne, co daje wymaganą zależność pomiędzy funkcjami krotności spektralnej. □

Podamy teraz rezultat, który powie nam, jak mogą wyglądać wartości istotne operatora unitarnego, który jest zanurzony w reprezentację unitarną bardziej skomplikowanej grupy.

Niech A_1 będzie przeliczalną (dyskretną) grupą abelową i niech $\mathbf{A} = A_1 \oplus \mathbf{Z}$. Niech $L : A_1 \to A_1$ będzie automorfizmem grupowym takim, że $L^n = Id$, przy czym istnieje element $a_1 \in A_1 \setminus \{0\}$ taki, że elementy $a_1, La_1, \ldots, L^{n-1}a_1$ są różne. Niech $\widetilde{L} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ będzie naturalnym rozszerzeniem automorfizmu L: kładziemy $\widetilde{L}(0, k) = (0, k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

[14] Zauważmy, że dla $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ mamy jedynie jeden nietrywialny automorfizm $L(n) = -n$, przy czym automorfizm dualny $\widehat{L}$ działa według wzoru $\widehat{L}(z) = \overline{z}$.

Twierdzenie 4.13 *Niech $\mathbf{A} \ni a \mapsto U_a \in \mathcal{U}(H)$ będzie reprezentacją unitarną grupy $\mathbf{A}$ w ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że:*
(i) $0 \in H$ jest jedynym punktem stałym operatora $U_{(a_1 - L^r a_1, 0)}$ dla dowolnego $1 \leqslant r < n$;
(ii) reprezentacje unitarne $\mathbf{A} \ni a \mapsto U_a \in \mathcal{U}(H)$ oraz $\mathbf{A} \ni a \mapsto U_{\tilde{L}a} \in \mathcal{U}(H)$, są izomorficzne.

Wówczas wartości funkcji krotności spektralnej dla operatora $U = U_{(0,1)}$ należą do zbioru $\{n, 2n, 3n, \ldots\} \cup \{+\infty\}$.

Dowód.
Napiszmy najpierw twierdzenie spektralne dla reprezentacji $\mathcal{U} = (U_a)_{a \in \mathbf{A}}$ tak, jak to zrobiliśmy w twierdzeniu 2.53. Bez straty ogólności możemy zatem zakładać, że $H = H_{\sigma,M}$, gdzie $\sigma \in M^+(\widehat{\mathbf{A}})$ jest maksymalnym typem spektralnym reprezentacji $\mathcal{U}$, $M : \widehat{\mathbf{A}} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ funkcją krotności spektralnej (określoną σ-p.w.). Mamy więc

$$H_{\sigma,M} \subset L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma; l^2),$$

$$H_{\sigma,M} = \{f \in L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma; l^2);\ f(\chi) = (f_1(\chi), f_2(\chi), \ldots, f_{M(\chi)}(\chi), 0, 0, \ldots)\}$$

oraz

$$(U_a f)(\chi) = (\chi(a) f_1(\chi), \chi(a) f_2(\chi), \ldots, \chi(a) f_{M(\chi)}(\chi), 0, 0, \ldots)$$

dla dowolnego $a \in \mathbf{A}$. Jeśli przez i oznaczymy naturalne zanurzenie grupy $\mathbf{Z}$ w grupę $\mathbf{A}$, a przez p odwzorowanie dualne, $p : \widehat{\mathbf{A}} \to \widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}$ (zauważmy, że $p = i(0,1)$ przy oznaczeniach lematów 4.8 i 4.9), to $\tilde{\sigma} := p_*(\sigma)$ jest maksymalnym typem spektralnym operatora $U = U_{(0,1)}$, a jego funkcja krotności spektralnej $\widetilde{M} : \mathbf{T} \to \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, na mocy lematu 4.9, dana jest wzorem

$$\widetilde{M}(z) = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } \ \sigma_z \ \text{ nie jest miarą dyskretną} \\ \sum_{\sigma_z(\chi) > 0} M(\chi), & \text{gdy } \ \sigma_z \ \text{ jest miarą dyskretną,} \end{cases}$$

gdzie $\sigma = \int_{\mathbf{T}} \sigma_z \otimes \delta_z \, d\tilde{\sigma}(z)$. Z założenia o izomorfizmie reprezentacji $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}^{\tilde{L}}$ i z lematu 4.12 wynika, że σ i $\hat{\tilde{L}}_*(\sigma)$ są równoważne. Ponieważ $(\hat{\tilde{L}})^n = Id$, więc możemy wybrać mierzalną dziedzinę fundamentalną dla automorfizmu $\hat{\tilde{L}}$. Stąd, bez straty ogólności możemy zakładać, że:

$$\sigma \text{ jest } \hat{\tilde{L}}\text{-niezmiennicza i } \ M \ \text{ jest } \hat{\tilde{L}}\text{-niezmiennicza.}$$

Ponieważ $\tilde{L}(0,1) = (0,1)$, więc $p \circ \hat{\tilde{L}} = p$ (istotnie, $p \circ \hat{\tilde{L}} = (\tilde{L} \circ i)\hat{}$ oraz $\tilde{L} \circ i = i$ z określenia automorfizmu $\tilde{L}$), więc $\hat{\tilde{L}}^{-1}(p^{-1}(z)) = p^{-1}(z)$. Wynika stąd, że

$$\hat{\tilde{L}}_*(\sigma_z) = \sigma_z \ \text{ dla } \tilde{\sigma}\text{-p.w. } \ z \in \mathbf{T}$$

(istotnie, $\hat{\tilde{L}}_*(\sigma) = \int_{\mathbf{T}} \delta_z \otimes \hat{\tilde{L}}_*(\sigma_z)\, d\tilde{\sigma}(z)$, przy czym miara $\hat{\tilde{L}}_*(\sigma_z)$ jest skupiona na $p^{-1}(z)$, a mamy już $\tilde{L}_*(\sigma) = \sigma$). Twierdzimy ponadto, że dla σ-p.k. $\chi \in \hat{\mathbf{A}}$ orbita poprzez $\hat{\tilde{L}}$ ma długość dokładnie n. Istotnie, przypuśćmy, że

$$\sigma\left(\{\chi \in \widehat{\mathbf{A}};\ \hat{\tilde{L}}^r\chi = \chi\}\right) > 0$$

gdzie $1 \leqslant r < n$ i $r|n$ (mamy $\hat{\tilde{L}}^n = Id$). Kładąc

$$Y_r = \{\chi \in \hat{A};\ \hat{\tilde{L}}^r\chi = \chi\} > 0$$

otrzymujemy podprzestrzeń $H_{\sigma,M} \cdot 1_{Y_r}$, która jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji $\mathcal{U}$. Połóżmy $b := a_1 - L^r a_1$, $b \neq 0$ z założenia. Zauważmy, że dla dowolnego $\chi \in Y_r$, $\chi(b) = \chi(a_1 - L^r(a_1)) = 0$. Zatem dla dowolnej funkcji $f \in H_{\sigma,M} \cdot 1_{Y_r}$ oraz $\chi \in Y_r$ mamy

$$U_b(f)(\chi) = (\chi(b)f_1(\chi), \chi(b)f_2(\chi), \ldots) = (f_1(\chi), f_2(\chi), \ldots) = f(\chi),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że U_b nie ma nietrywialnych wektorów niezmienniczych.

Teza wynika teraz natychmiast ze wzoru na $\widetilde{M}$ i niezmienniczości miar warunkowych na $\hat{\tilde{L}}$. □

Podamy teraz pewną metodę, która pozwala na wskazywanie reprezentacji z „symetriami”. Zasadniczym pomysłem jest przejście do reprezentacji unitarnych grup nieabelowych i wykorzystanie automorfizmów wewnętrznych takich grup.

Ustalmy $n \geqslant 1$. Połóżmy $A_1 = \mathbf{Z}^n$, przy czym niech $\overline{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$. Określamy ponadto automorfizm L grupy $\mathbf{Z}^n$ kładąc $L(\overline{e}_i) = \overline{e}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$ i niech $L(\overline{e}_n) = \overline{e}_1$. Za pomocą automorfizmu L definiujemy produkt półprosty $G := \mathbf{Z}^n \rtimes \mathbf{Z}$ określając mnożenie elementów wzorem

$$(u,k) \cdot (w,l) = (u + L^k w, k + l).$$

Kładziemy: $e_0 = (0,1)$, $e_i = (\overline{e}_i, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ (oraz $Le_i = (L\overline{e}_i, 0)$). Oznaczmy ponadto $e_{n+1} = e_0^n = (0, n)$. Zauważmy teraz, że

$$e_0 \cdot e_i = L(e_i) \cdot e_0,$$

tzn.

$$e_0 \cdot e_i \cdot e_0^{-1} = Le_i \tag{4.25}$$

dla $i = 1, \ldots, n$, przy czym (4.25) pozwala również rozpatrywać L i na e_{n+1} – jak widać $L(e_{n+1}) = e_{n+1}$. Grupa $\mathbf{A}$ generowana przez $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ jest wolną grupą abelową ($L^n = Id$), z dokładnością do izomorfizmu, $\mathbf{A} = A_1 \oplus \mathbf{Z}$. (Łatwo ponadto sprawdzić, że A jest podgrupą normalną grupy G, przy czym $G/\mathbf{A}$ jest grupą cykliczną rzędu n.)

Wniosek 4.14 *Dla dowolnej reprezentacji unitarnej $(U_g)_{g \in G}$ grupy G w ośrodkowej przestrzeni Hilberta H, dla której operator $U_{e_1 - L^r e_1}$ nie ma nietrywialnych punktów stałych dla $1 \leqslant r < n$, wartości funkcji krotności spektralnej operatora unitarnego $U_{e_{n+1}}$ są zawarte w zbiorze wielokrotności liczby n.*

Dowód.
Musimy sprawdzić, że spełnione są założenia twierdzenia 4.13. Tak naprawdę musimy jedynie sprawdzić, że $(U_a)_{a \in \mathbf{A}}$ i $(U_{La})_{a \in \mathbf{A}}$ są izomorficzne. Otóż wzór (4.25) oznacza w szczególności, że

$$U_{e_0} \circ U_{e_i} \circ U_{e_0}^{-1} = U_{L(e_i)}$$

dla $i = 1, \ldots, n+1$, a więc ten sam wzór będzie obowiązywał, gdy e_i zostanie zastąpione dowolnym elementem grupy $\mathbf{A}$. □

Oczywiście w powyższych rozważaniach $U_{e_{n+1}} = U_{e_0}^n$. Stąd natychmiast otrzymujemy następujący:

Wniosek 4.15 *Przy założeniach wniosku 4.14, jeśli dodatkowo operator unitarny U_{e_0} ma proste widmo, to operator $U_{e_{n+1}}$ ma jednorodne widmo krotności n.*

5 Twierdzenie Aleksiejewa

Zanim przejdziemy do sformułowania twierdzenia Aleksiejewa o realizacji maksymalnego typu spektralnego reprezentacji unitarnej przypomnijmy, że jeśli F jest przestrzenią Frécheta, to dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset F$ istnieje ciąg (a_n) liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} x_{n_l}$ jest zbieżny w F dla dowolnego ciągu $n_1 < n_2 < \ldots$. Istotnie, jeśli $\| \cdot \|$ oznacza odpowiednią F-normę przestrzeni F, to korzystając z ciągłości mnożenia przez skalary, dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $b_n > 0$ takie, że $\|a_n x_n\| < \frac{1}{2^n}$ dla dowolnych $0 < a_n < b_n$, $n \geqslant 1$. Ponieważ F jest zupełna, a każdy szereg liczbowy $\sum_{l=1}^{\infty} \|a_{n_l} x_{n_l}\|$ jest zbieżny, więc i szereg $\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} x_{n_l}$ jest zbieżny w F.

Załóżmy, że $\mathbf{A}$ jest grupą abelową lokalnie zwartą (spełniającą drugi aksjomat przeliczalności).

Twierdzenie 5.1 (twierdzenie Aleksiejewa) *Niech $\mathcal{U} = (U_a)_{a \in \mathbf{A}}$ będzie reprezentacją unitarną grupy $\mathbf{A}$ w ośrodkowej przestrzeni Hilberta H. Załóżmy, że $F \subset H$ jest gęstą podprzestrzenią liniową. Załóżmy ponadto, że wraz z pewną F-normą $\| \cdot \|$ – silniejszą od normy $\| \cdot \|$ danej przez iloczyn skalarny – przestrzeń F staje się przestrzenią Frécheta. Wówczas dla dowolnej miary spektralnej σ ($\ll \sigma_{\mathcal{U}}$) istnieje element $y \in F$ taki, że $\sigma_y \gg \sigma$. W szczególności, istnieje element $y \in F$ realizujący maksymalny typ spektralny.*

Dowód.

Niech więc $\sigma = \sigma_x$ będzie dowolną miarą spektralną. Na mocy twierdzenia spektralnego istnieje izomorfizm I pomiędzy $H = \mathbf{A}(x) \oplus G$ oraz $L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma) \oplus G'$, który ustala izomorfizm odpowiednich reprezentacji unitarnych, a ponadto $Ix = 1 = 1_{\widehat{\mathbf{A}}}$.

Weźmy $\delta > 0$. Wówczas istnieje element $z \in F$ taki, że $\|x - z\| < \delta$. Stąd $\|1 - Iz\| < \delta$, przy czym $Iz = f' + g'$, gdzie $f' \in L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma)$, a $g' \in G'$. Zauważmy, że $\|1 - Iz\|^2 = \|1 - f'\|^2 + \|g'\|^2$, a więc w szczególności $\|1 - f'\| < \delta$ oraz $\|g'\| < \delta$. Niech (ε_n) będzie dowolnym ciągiem liczb dodatnich malejącym do zera. Wówczas dobierając dostatecznie małe $\delta_n > 0$, możemy znaleźć ciąg $(z_n) \subset F$ (z rozkładem $Iz_n = f_n + g_n$) taki, że $\|x - z_n\| < \delta_n$ oraz

$$\sigma\left(\{\chi \in \widehat{\mathbf{A}};\ |1 - f_n(\chi)| < \varepsilon_n\}\right) \to \sigma(\widehat{\mathbf{A}}), \tag{5.1}$$

gdy $n \to \infty$.

Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich takim, że szereg $\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} z_{n_l}$ jest zbieżny w F dla dowolnego podciągu $n_1 < n_2 < \dots$ Zauważmy, że bez straty ogólności możemy zakładać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Twierdzimy, że podciąg (n_l) można wybrać w taki sposób, że

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} f_{n_l}(\chi) \neq 0 \ \text{ dla } \sigma\text{-p.w. } \chi \in \widehat{\mathbf{A}}. \tag{5.2}$$

Dowód (5.2) jest zawarty w lemacie 5.2. Kładziemy $f = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} f_{n_l}$, $g = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} g_{n_l}$ (oba szeregi są zbieżne w $L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma) \oplus G'$, gdyż ciąg $(\|f_n\|)$ jest ograniczony, a $\|g_n\| \to 0$, gdy $n \to \infty$). Ze względu na (5.2), miara spektralna funkcji f (dla reprezentacji $\mathcal{V}_\sigma$) jest równoważna mierze σ. Dla elementu $y = I^{-1}(f+g)$ mamy $\sigma_y = \sigma_f + \sigma_g$, a więc

$$\sigma_y \geqslant \sigma_f \equiv \sigma.$$

W końcu $I^{-1}(f+g) = y = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} z_{n_l} \in F$, gdyż szereg $\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} z_{n_l}$ jest zbieżny w F, a F-norma $\| \cdot \|$ jest silniejsza niż norma w H (więc suma obu szeregów jest tym samym elementem w H). □

Lemat 5.2 *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, ze (j_n) jest ciągiem mierzalnych funkcji rzeczywistych określonych Ω, przy czym $j_n \to 0$ według miary P. Niech dany będzie ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich zbieżny do zera i niech $0 < \varepsilon_n \to 0$. Załóżmy, że*

$$P\left(\{\omega \in \Omega;\ |j_n(\omega) - a_n| < \varepsilon_n a_n\}\right) \to 1, \tag{5.3}$$

gdy $n \to \infty$. Wówczas istnieje podciąg (n_k) taki, że

$$\sum_{k \geqslant 1} j_{n_k}(\omega) \neq 0 \ \ \textit{dla } P\textit{-p.w. } \omega \in \Omega.$$

Dowód.

Krok 1. Twierdzimy, że istnieje zbiór $B \in \mathcal{F}$ oraz ciąg rosnący liczb naturalnych $(n_k^{(1)})$ takie, że

$$P(B) > \frac{2}{3}, \tag{5.4}$$

(5.5) $\omega \in B \;\Rightarrow\; \sum_l j_{n_{k_l}}(\omega) \neq 0$ dla dowolnego podciągu (n_{k_l}) ciągu $(n_k^{(1)})$.

W tym celu wybierzmy najpierw $n_1^{(1)}$ tak, aby

$$P\left(\{|j_{n_1^{(1)}} - a_{n_1^{(1)}}| < \varepsilon_{n_1^{(1)}} a_{n_1^{(1)}}\}\right) > \frac{3}{4}.$$

Połóżmy $A_1^{(1)} = \{|j_{n_1^{(1)}} - a_{n_1^{(1)}}| < \varepsilon_{n_1^{(1)}} a_{n_1^{(1)}}\}$ i wybierzmy $n_2^{(1)} > n_1^{(1)}$ w taki sposób, aby

$$P\left(\{|j_{n_2^{(1)}} - a_{n_2^{(1)}}| < \varepsilon_{n_2^{(1)}} a_{n_2^{(1)}}\} \cap A_1^{(1)}\right) > (1-\delta_2)P(A_1^{(1)}),$$

gdzie δ_2 jest pewną małą liczbą dodatnią. Kładąc $A_2^{(1)} = \{|j_{n_2^{(1)}} - a_{n_2^{(1)}}| < \varepsilon_{n_2^{(1)}} a_{n_2^{(1)}}\} \cap A_1^{(1)}$ i mając zadaną kolejną małą liczbę dodatnią δ_3 wybieramy $n_3^{(1)} > n_2^{(1)}$ w taki sposób, aby

$$P\left(\{|j_{n_3^{(1)}} - a_{n_3^{(1)}}| < \varepsilon_{n_3^{(1)}} a_{n_3^{(1)}}\} \cap A_2^{(1)}\right) > (1-\delta_3)P(A_2^{(1)})$$

i kładziemy $A_3^{(1)} = \{|j_{n_3^{(1)}} - a_{n_3^{(1)}}| < \varepsilon_{n_3^{(1)}} a_{n_3^{(1)}}\} \cap A_2^{(1)}$. Kontynuując ten proces jest jasnym, że dla odpowiednio małego wyboru kolejnych liczb $\delta_k > 0$ i odpowiednich wyborów liczb $n_k^{(1)}$ wystarczy przyjąć $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)}$, aby i (5.4), i (5.5) były spełnione.

Połóżmy $B_1 = B^c$.

<u>Krok 2.</u> Twierdzimy, że istnieje podzbiór $\mathcal{F} \ni B_2 \subset B_1$ oraz podciąg $(n_k^{(2)})$ ciągu $(n_k^{(1)})$ $(n_1^{(2)} > n_1^{(1)})$ takie, że

(5.6) $$P(B_2) > \frac{2}{3}P(B_1),$$

(5.7)
$\omega \in B_2 \;\Rightarrow\; j_{n_1^{(1)}}(\omega) + \sum_l j_{n_{k_l}}(\omega) \neq 0$ dla dowolnego podciągu (n_{k_l}) ciągu $(n_k^{(2)})$.

Aby uzasadnić powyższe stwierdzenia rozpatrzmy funkcję $j_{n_1^{(1)}}$ na zbiorze B_1. Otóż istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$P\left(\{j_{n_1^{(1)}} = 0 \vee |j_{n_1^{(1)}}| > \delta\}\right) > \frac{4}{5}P(B_1)$$

i niech $A^{(2)} := \{j_{n_1^{(1)}} = 0 \vee |j_{n_1^{(1)}}| > \delta\} \cap B_1$. Wybierzmy $n_1^{(2)} > n_1^{(1)}$ tak, aby

$$P\left(\{|j_{n_1^{(2)}} - a_{n_1^{(2)}}| < \varepsilon_{n_1^{(2)}} a_{n_1^{(2)}}\}\right) > \frac{3}{4} P(A_0^{(2)}).$$

Połóżmy $A_1^{(2)} = \{|j_{n_1^{(2)}} - a_{n_1^{(2)}}| < \varepsilon_{n_1^{(2)}} a_{n_1^{(2)}}\}$ i wybierzmy $n_2^{(2)} > n_1^{(2)}$ w taki sposób, aby

$$P\left(\{|j_{n_2^{(2)}} - a_{n_2^{(2)}}| < \varepsilon_{n_2^{(2)}} a_{n_2^{(2)}}\} \cap A_1^{(2)}\right) > (1-\delta_2) P(A_1^{(2)}),$$

gdzie δ_2 jest pewną małą liczbą dodatnią. Kładąc $A_2^{(2)} = \{|j_{n_2^{(2)}} - a_{n_2^{(2)}}| < \varepsilon_{n_2^{(2)}} a_{n_2^{(2)}}\} \cap A_1^{(2)}$ i mając zadaną kolejną małą liczbę dodatnią δ_3 wybieramy $n_3^{(2)} > n_2^{(2)}$ w taki sposób, aby

$$P\left(\{|j_{n_3^{(2)}} - a_{n_3^{(2)}}| < \varepsilon_{n_3^{(2)}} a_{n_3^{(2)}}\} \cap A_2^{(2)}\right) > (1-\delta_3) P(A_2^{(2)})$$

i kładziemy $A_3^{(2)} = \{|j_{n_3^{(2)}} - a_{n_3^{(2)}}| < \varepsilon_{n_3^{(2)}} a_{n_3^{(2)}}\} \cap A_2^{(2)}$. Kontynuując ten proces jest jasnym, że dla odpowiednio małego wyboru kolejnych liczb $\delta_k > 0$ i odpowiednich wyborów liczb $n_k^{(2)}$ wystarczy przyjąć $B_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)}$, aby i (5.6), i (5.7) były spełnione.

Połóżmy $B_3 = (B \cup B_2)^c$.

<u>Krok 3.</u> Twierdzimy, że istnieje podzbiór $\mathcal{F} \ni B_4 \subset B_3$ oraz podciąg $(n_k^{(3)})$ ciągu $(n_k^{(2)})$ $(n_1^{(3)} > n_1^{(2)})$ takie, że

$$P(B_4) > \frac{2}{3} P(B_3), \tag{5.8}$$

(5.9)

$$\omega \in B_4 \;\Rightarrow\; j_{n_1^{(1)}}(\omega) + j_{n_1^{(2)}}(\omega) + \sum_l j_{n_{k_l}}(\omega) \neq 0 \text{ dla dowolnego podciągu } (n_{k_l}) \text{ ciągu } (n_k^{(3)}).$$

Aby uzasadnić powyższe stwierdzenia rozpatrzmy funkcję $j_{n_1^{(1)}} + j_{n_1^{(2)}}(\omega)$ na zbiorze B_3. Istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$P\left(\{j_{n_1^{(1)}} + j_{n_1^{(2)}} = 0 \vee |j_{n_1^{(1)}} + j_{n_1^{(2)}}| > \delta\}\right) > \frac{4}{5} P(B_3)$$

i niech $A_0^{(3)} := \{j_{n_1^{(1)}} + j_{n_1^{(2)}} = 0 \vee |j_{n_1^{(1)}} + j_{n_1^{(1)}}| > \delta\} \cap B_3$. Wybierzmy $n_1^{(3)} > n_1^{(2)}$ tak, aby

$$P\left(\{|j_{n_1^{(3)}} - a_{n_1^{(3)}}| < \varepsilon_{n_1^{(3)}} a_{n_1^{(3)}}\} \cap A_0^{(3)}\right) > \frac{3}{4} P(A_0^{(3)}).$$

Postępując jak powyżej wybierzemy w ten sposób zbiór miary pełnej (mianowicie zbiór $B \cup B_2 \cup B_4 \cup \ldots$, na którym dla ciągu $(n_1^{(k)})_{k \geqslant 1}$ spełniona jest teza lematu. $\square$

Z twierdzenia Aleksiejewa wynika, że jeśli H ma dodatkową strukturę, to można znajdować elementy realizujące maksymalny typ spektralny należące do specyficznej podprzestrzeni. Np. gdy $H = L^2(X, \mu)$, gdzie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą (skończoną lub nieskończoną), to znajdziemy zawsze funkcję $y \in L^\infty(X, \mu) \cap L^2(X, \mu)$ realizującą maksymalny typ spektralny operatora U. Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą, a $\mu \in M(X)$ jest miarą dodatnią, to maksymalny typ spektralny operatora U określonego na $L^2(X, \mu)$ jest realizowany przez pewną funkcję ciągłą. Podobne rozumowanie można przeprowadzić i na zwartych rozmaitościach różniczkowalnych (analitycznych). Szczegóły można znaleźć w artykule [5].

6 Teoria spektralna reprezentacji indukowanych

Niech $\mathbf{A}$ będzie grupą lokalnie zwartą abelową i niech $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ będzie podgrupą domkniętą. Zakładamy, że $\mathbf{B}$ jest kozwarta. Załóżmy ponadto, że dana jest (ciągła) reprezentacja $(U_b)_{b\in\mathbf{B}}$ grupy $\mathbf{B}$ w przestrzeni Hilberta F. Konstruujemy nową przestrzeń Hilberta $H = Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$ jako przestrzeń tych funkcji $f : \mathbf{A} \to F$, dla których[15]

$$\text{odwzorowanie } a \mapsto \langle f(a), v\rangle \text{ jest mierzalne} \atop \text{dla dowolnego elementu } v \in F, \tag{6.1}$$

$$f(a+b) = U_b(f(a)) \ \text{ dla dowolnych } a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B}, \tag{6.2}$$

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \|f(a)\|^2 \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) < +\infty \tag{6.3}$$

(zauważmy, że funkcja $a \mapsto \|f(a)\|$ jest stała na warstwach podgrupy $\mathbf{B}$). Nietrudno pokazać, że $Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \langle f_1(a), f_2(a)\rangle \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B})^{16}. \tag{6.4}$$

Definiujemy teraz *reprezentację indukowaną* $(U_a^{\mathbf{A},\mathbf{B}})_{a\in\mathbf{A}}$ (grupy $\mathbf{A}$) jako reprezentację regularną w $Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$, tzn.

$$U_a^{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f)(x) = f(x+a).$$

Ćwiczenie 6.1 Pokazać, że $(U_a^{\mathbf{A},\mathbf{A}})_{a\in\mathbf{A}}$ jest w sposób naturalny izomorficzna z reprezentacją $(U_a)_{a\in\mathbf{A}}$ (ze względu na wzór (6.2) funkcja f jest całkowicie wyznaczona przez swoją wartość $f(0)$).

---

[15] Przypomnijmy tutaj twierdzenie Pettisa: *Jeśli* (X, Σ) *jest przestrzenią mierzalną, B zaś jest ośrodkową przestrzenią Banacha oraz dane jest odwzorowanie $f : X \to B$, dla którego $x^* \circ f$ jest mierzalne dla dowolnego $x^* \in X^*$, to odwzorowanie f jest mierzalne.*

[16] Wzór ten jest poprawny ponieważ (ze względu na (6.2))

$$\langle f_1(a+b), f_2(a+b)\rangle = \langle U_b f_1(a), U_b f_2(a)\rangle = \langle f_1(a), f_2(a)\rangle.$$

Dla wykazania poprawności definicji iloczynu skalarnego (6.4) należy użyć nierówności Schwarza, Cauchy-Buniakowskiego oraz (6.3).

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ oraz $\mathbf{B} = \mathbf{Z}$. Załóżmy, że $V \in \mathcal{U}(F)$. Najpierw zauważmy, że przestrzeń Hilberta $Ind_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Z}}(F)$ jest w sposób naturalny izomorficzna z przestrzenią $L^2([0,1);F)$. Rzeczywiście, $Ind_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Z}}$ składa się z tych funkcji $f : \mathbf{R} \to F$ spełniających warunek mierzalności (6.1), dla których $f(x+1) = V(f(x))$ oraz $\int_0^1 \|f(x)\|^2\,dx < +\infty$. Zatem izomorfizm naturalny I z $Ind_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Z}}(F)$ na $L^2([0,1);F)$ otrzymamy kładąc $f \mapsto f|_{[0,1)}$ (mając zaś g na $[0,1)$, rozszerzamy ją do funkcji określonej na $\mathbf{R}$, stosując wzór $f(x+1) = V(f(x))$). Sprawdźmy teraz, jak w tych „nowych współrzędnych" wygląda reprezentacja indukowana.

Zauważmy najpierw, że dla $f \in Ind_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Z}}(F)$ mamy

$$I \circ U_r^{\mathbf{R},\mathbf{Z}}(f)(\cdot) = U_r^{\mathbf{R},\mathbf{Z}}(f)|_{[0,1)}(\cdot) = f(\cdot + r)|_{[0,1)} =$$

$$= f([\cdot + r] + \{\cdot + r\})|_{[0,1)} = V^{[\cdot + r]}(f(\{\cdot + r\}).$$

Zatem jeśli położymy dla $g \in L^2([0,1);F)$, $s \in [0,1)$ oraz $r \in \mathbf{R}$

$$\widetilde{U}_r(g)(s) = V^{[s+r]}(g(\{s+r\})),$$

to otrzymamy

$$\widetilde{U}_r(I(f))(s) = V^{[s+r]}(I(f)(\{s+r\})) = V^{[s+r]}(f(\{s+r\})) = IU_r^{\mathbf{R},\mathbf{Z}}(f)(s),$$

a więc $(\widetilde{U}_r)_{r\in\mathbf{R}}$ jest reprezentacją indukowaną.

Dla dowolnych $u, t \in \mathbf{R}$ mamy[17]

$$[u] + [\{u\} + t] = [u + t]. \tag{6.5}$$

Stąd

$$\{\{u\} + t\} = \{u + t\}. \tag{6.6}$$

Zatem dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ oraz $s \in [0,1)$ mamy (ze względu na (6.5) oraz (6.6))

$$\widetilde{U}_{t_2}\left(\widetilde{U}_{t_1}g\right)(s) = V^{[s+t_2]}\left(\widetilde{U}_{t_1}(g(\{s+t_2\}))\right)$$

[17]Rzeczywiście,

$$[u] + [\{u\} + t] = [u] + [\{u\} + \{t\} + [t]] = [u] + [t] + [\{u\} + \{t\}] =$$

$$= [[u] + [\{u\} + [t] + \{t\}] = [u + t].$$

$$= V^{[s+t_2]}\left(V^{[\{s+t_2\}+t_1]}(g(\{\{s+t_2\}+t_1\}))\right)$$
$$= V^{[s+t_1+t_2]}(g(\{s+t_1+t_2\})) = \widetilde{U}_{t_1+t_2}(g)(s).$$

W końcu, jeśli $g \in L^2([0,1);F)$ oraz $r_n \to r$ w $\mathbf{R}$, to

$$\int_0^1 \|V^{[s+r_n]}(g(s)) - V^{[s+r]}(g(s))\|^2\,ds \to 0$$

ponieważ dla $s \in [0,1)$ takiego, że $s+r \notin \mathbf{Z}$, $[s+r_n] = [s+r]$ dla n dostatecznie dużego[18]. W ten sposób (formalnie) pokazaliśmy, że reprezentacja indukowana jest ciągłą reprezentacją unitarną.

Teraz przeprowadzimy podobną „zamianę zmiennych” w przypadku ogólnym. Niech $s : \mathbf{A}/\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ będzie selektorem mierzalnym ($s(a+\mathbf{B}) \in a+\mathbf{B}$), patrz rozdział 7.3. Najpierw przeprowadzamy identyfikację przestrzeni $Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$ z $L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$ kładąc

$$If(a+\mathbf{B}) = f(s(a+\mathbf{B})). \tag{6.7}$$

Zauważmy, że jeśli $g \in L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$, to wzór[19]

$$f(a) = f(s(a+\mathbf{B}) + (a - s(a+\mathbf{B}))) = U_{a-s(a+\mathbf{B})}(g(a+\mathbf{B})) \tag{6.8}$$

[18]Dla $g \in L^2([0,1);F)$ oraz $t_n \to t$ w $\mathbf{R}$ mamy

$$\left\|\widetilde{U}_{t_n}(g) - \widetilde{U}_t(g)\right\| = \left(\int_0^1 \left\|\widetilde{U}_{t_n}(g)(s) - \widetilde{U}_t(g)(s)\right\|^2 ds\right)^{1/2} =$$
$$\left(\int_0^1 \left\|V^{[s+t_n]}(g(\{s+t_n\})) - V^{[s+t]}(g(\{s+t\}))\right\|^2 ds\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 \left\|V^{[s+t_n]}(g(\{s+t_n\})) - V^{[s+t]}(g(\{s+t_n\}))\right\|^2 ds\right)^{1/2} +$$
$$+ \left(\int_0^1 \left\|V^{[s+t]}(g(\{s+t_n\})) - V^{[s+t]}(g(\{s+t\}))\right\|^2 ds\right)^{1/2} =$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 \left\|V^{[s]}(g(\{s\})) - V^{[s+t-t_n]}(g(\{s\}))\right\|^2 ds\right)^{1/2} +$$
$$+ \left(\int_0^1 \left\|V^{[s+t]}(g(\{s+t_n\})) - V^{[s+t]}(g(\{s+t\}))\right\|^2 ds\right)^{1/2}.$$

[19]Mamy

$$f(a+b) = U_{a+b-(s(a+b+\mathbf{B})}(g(s(a+b+\mathbf{B})) =$$

definiuje element $f \in Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$[20]; zauważmy, że $a - s(a + \mathbf{B}) \in \mathbf{B}$. Następnie „zgadujemy” wzór na reprezentację indukowaną we współrzędnych $L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$

$$\widetilde{U}_a(g)(x + \mathbf{B}) = U_{s(x+\mathbf{B})+a-s(a+x+\mathbf{B})}(g(x + a + \mathbf{B})) \tag{6.9}$$

(zauważając, że $s(x + \mathbf{B}) + a - s(x + a + \mathbf{B}) \in \mathbf{B}$)[21]. Mamy wówczas (używając (6.7), (6.2) oraz (6.9))

$$I\left(U_a^{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f)\right)(x + \mathbf{B}) = U_a^{\mathbf{A},\mathbf{B}}(f)(s(x + \mathbf{B})) = f(s(x + \mathbf{B}) + a) =$$

$$= f(s(a + x + \mathbf{B}) + s(x + \mathbf{B}) + a - s(a + x + \mathbf{B})) =$$

$$= U_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})} f(s(x + a + \mathbf{B})) = \widetilde{U}_a(I(f))(x + \mathbf{B}).$$

Podobnie jak dla reprezentacji indukowanej w przypadku $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ sprawdzamy teraz łatwo, że $(\widetilde{U}_a)_{a\in\mathbf{A}}$ jest ciągłą reprezentacją unitarną grupy $\mathbf{A}$.

Uwaga 6.2 W ten sposób mamy pewien wybór: albo „łatwy” wzór na reprezentację indukowaną (reprezentacja regularna), ale „trudna” przestrzeń reprezentacyjna (przestrzeń $Ind_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}(F)$), albo „trudna” reprezentacja indukowana (reprezentacja $(\widetilde{U}_a)_{a\in\mathbf{A}}$), ale określona na „łatwej” przestrzeni $L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$.

Lemat 6.3 *Istnieje reprezentacja unitarna $(V_a)_{a\in\mathbf{A}}$ na F taka, że reprezentacja $(V_b)_{b\in\mathbf{B}}$ jest spektralnie równoważna z reprezentacją $(U_b)_{b\in\mathbf{B}}$ podgrupy* $\mathbf{B}$.

$$= U_{a+b-s(a+\mathbf{B})}(g(s(a + \mathbf{B})) = U_b f(a).$$

Ponadto

$$(If)(a + \mathbf{B}) = f(s(a + \mathbf{B})) = U_{s(a+\mathbf{B})-s(s(a+\mathbf{B})+\mathbf{B})} g(s(a + \mathbf{B}) + \mathbf{B}) = g(a + \mathbf{B}),$$

gdyż $s(a + \mathbf{B}) + \mathbf{B} = a + \mathbf{B}$.

[20]Zauważmy, że wracając do sytuacji $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, mamy $s(r + \mathbf{Z}) = \{r\}$ oraz $\{r + n\} = \{r\}$, $r - s(r + \mathbf{Z}) = [r]$.

[21]Zauważmy, że dla liczb rzeczywistych x, t mamy

$$\{x\} + t - \{x + t\} = [\{x\} + t],$$

gdyż $\{\{x\} + t\} = \{x + t\}$.

Dowód.
Reprezentacja $(U_b)_{b\in\mathbf{B}}$ jest równoważna sumie prostej reprezentacji

$$(V_b)_{b\in\mathbf{B}} = \bigoplus_{i=1}^{\infty}(V_{b,i})_{b\in\mathbf{B}}$$

określonych na przestrzeni $\bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbf{B}}, \rho_i)$, przy czym $\rho_1 \gg \rho_2 \gg \ldots$ oraz

$$V_{b,i}(f)(\chi) = \chi(b)f(\chi) \ \text{ dla } \ f \in L^2(\widehat{\mathbf{B}}, \rho_i).$$

Niech $Y \subset \widehat{\mathbf{A}}$ będzie mierzalnym selektorem homomorfizmu $p_{\mathbf{B}} : \widehat{\mathbf{A}} \to \widehat{\mathbf{B}}$. Wówczas Y jest obszarem fundamentalnym działania podgrupy $ann(\mathbf{B})$, która jest przeliczalna: $\widehat{\mathbf{A}} = \bigcup_{\eta\in ann(\mathbf{B})} \eta\cdot Y$. Określamy teraz przestrzeń Hilberta

$$G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \overline{\rho}_i),$$

gdzie $\overline{\rho}_i$ jest obrazem miary ρ_i poprzez odwzorowanie $p_{\mathbf{B}}^{-1} : \widehat{\mathbf{B}} \to Y$. Kładąc $(W_a)_{a\in\mathbf{A}} = \bigoplus_{i=1}^{\infty}(W_{a,i})_{a\in\mathbf{A}}$, gdzie

$$W_{a,i}(f)(\chi) = \chi(a)f(\chi) \ \text{ dla } \ f \in L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \overline{\rho}_i),$$

otrzymujemy (przechodząc na F) reprezentację grupy $\mathbf{A}$ o żądanych własnościach ($\overline{\rho}_1 \gg \overline{\rho}_2 \gg \ldots$). □

Niech $H = L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$. Dla danego $\eta \in ann(\mathbf{B})$ oraz $f \in F$ kładziemy

$$\tilde{f}_\eta(a+\mathbf{B}) = \eta(a+\mathbf{B})V_{s(a+\mathbf{B})}f. \tag{6.10}$$

Łatwo spostrzec, że $\tilde{f}_\eta \in H$. Niech

$$H_\eta = \{\tilde{f}_\eta;\ f \in F\}.$$

Zauważmy ponadto, że odwzorowanie $I : f \mapsto \tilde{f}_\eta$ ustala izometryczny izomorfizm przestrzeni Hilberta F i H_η. Ponadto

$$H_\eta \perp H_{\eta'} \ \text{ dla } \ \eta \neq \eta'. \tag{6.11}$$

Rzeczywiście, dla $f, g \in F$ mamy

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \langle \tilde{f}_\eta(a+\mathbf{B}), \tilde{g}_{\eta'}(a+\mathbf{B})\rangle \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) =$$

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \eta(a+\mathbf{B})\overline{\eta'(a+\mathbf{B})}\langle V_{s(a+\mathbf{B})}f, V_{s(a+\mathbf{B})}g\rangle \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) =$$

$$= \langle f, g\rangle \int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \eta(a+\mathbf{B})\overline{\eta'(a+B)} \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) = 0.$$

Niech $J \in H$ i przypuśćmy, że dla ustalonego $f \in F$ oraz dowolnego $\eta \in ann(\mathbf{B})$ mamy

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \langle \tilde{f}_\eta(a+\mathbf{B}), J(a+\mathbf{B})\rangle \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) = 0$$

Wówczas dla dowolnego $\eta \in ann(\mathbf{B}) = (\mathbf{A}/\mathbf{B})\hat{}$ mamy

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} \eta(a+\mathbf{B})\langle V_{s(a+\mathbf{B})}f, J(a+\mathbf{B})\rangle \, d\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}(a+\mathbf{B}) = 0,$$

a więc

$$\Big\langle V_{s(a+\mathbf{B})}f, J(a+\mathbf{B})\Big\rangle = 0 \;\; \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}} - \text{p.w.}$$

Wybierzmy teraz zbiór gęsty $\{f_k : k \geqslant 1\}$ w F. Wówczas dla $\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}$-p.w. $a+\mathbf{B} \in \mathbf{A}/\mathbf{B}$ mamy

$$\Big\langle V_{s(a+\mathbf{B})}f_k, J(a+\mathbf{B})\Big\rangle = 0 \;\text{ dla wszystkich }\; k \geqslant 1.$$

Równoważnie, dla $\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}$-p.w. $a+\mathbf{B} \in \mathbf{A}/\mathbf{B}$ mamy

$$\Big\langle f_k, V^{-1}_{s(a+\mathbf{B})}J(a+\mathbf{B})\Big\rangle = 0 \;\text{ dla wszystkich }\; k \geqslant 1.$$

Stąd $V^{-1}_{s(a+\mathbf{B})}J(a+\mathbf{B}) = 0$ oraz $J(a+\mathbf{B}) = 0$ dla $\lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}$-p.w. $a+\mathbf{B}$ i dlatego $J = 0$ w H. W ten sposób udowodniliśmy następujący fakt

$$H = \bigoplus_{\eta \in ann(\mathbf{B})} H_\eta. \tag{6.12}$$

Lemat 6.4 *Podprzestrzeń H_η jest $(\widetilde{U}_a)_{a\in\mathbf{A}}$-niezmiennicza, gdzie (cf. (6.9))*

$$\widetilde{U}_a(g)(x+\mathbf{B}) = V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}g(x+a+\mathbf{B})$$

dla $g \in H$.

Dowód.
Mamy

$$\widetilde{U}_a(\tilde{f}_\eta)(x+\mathbf{B}) = V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}\tilde{f}_\eta(x+a+\mathbf{B}) =$$

$$= V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}(\eta(x+a+\mathbf{B})V_{s(x+a+\mathbf{B})}f) =$$

$$= \eta(x+\mathbf{B})V_{s(x+\mathbf{B})}(\eta(a+\mathbf{B})V_a f) = \tilde{h}_\eta(x+\mathbf{B}),$$

gdzie $h = \eta(a)V_a f = \eta(a+\mathbf{B})V_a f \in F$. □

Zauważmy, że

$$\widetilde{U}_b(g)(x+\mathbf{B}) = V_{s(x+\mathbf{B})+b-s(x+b+\mathbf{B})}g(x+b+\mathbf{B}) =$$

$$= V_{s(x+\mathbf{B})+b-s(x+\mathbf{B})}g(x+\mathbf{B}) = V_b(g(x+\mathbf{B})).$$

Ponadto,

$$\widetilde{U}_b\left(\tilde{f}_\eta\right)(x+\mathbf{B}) = V_b\left(\tilde{f}_\eta(x+\mathbf{B})\right) =$$

$$= V_b\left(\eta(x+\mathbf{B})V_{s(x+\mathbf{B})}f\right) = (\widetilde{V_b f})_\eta(x+\mathbf{B}),$$

skąd

$$I^{-1}\circ \widetilde{U}_b(\tilde{f}_\eta) = I^{-1}((\widetilde{V_b f})_\eta) = V_b f = V_b \circ I^{-1}(\tilde{f}_\eta). \tag{6.13}$$

Innymi słowy reprezentacje $(\widetilde{U}_b|_{H_\eta})_{b\in\mathbf{B}}$ oraz $(V_b)_{b\in\mathbf{B}}$ (ta druga jest reprezentacją w przestrzeni Hilberta F) są spektralnie równoważne.

Na przestrzeni Hilberta $H = L^2(\mathbf{A}/\mathbf{B}, \lambda_{\mathbf{A}/\mathbf{B}}; F)$ rozpatrzmy teraz operator unitarny M_η ($\eta \in ann(\mathbf{B})$) zadany wzorem

$$M_\eta(g)(x+\mathbf{B}) = \eta(x+\mathbf{B})g(x+\mathbf{B}).$$

Wówczas

$$\widetilde{U}_a M_\eta(g)(x+\mathbf{B}) = \widetilde{U}_a(M_\eta(g))(x+\mathbf{B}) = V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}(M_\eta(g))(x+a+\mathbf{B}) =$$

$$= V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}(\eta(x+a+\mathbf{B})g(x+a+\mathbf{B})) =$$

$$= \eta(a+\mathbf{B})\eta(x+\mathbf{B})V_{s(x+\mathbf{B})+a-s(x+a+\mathbf{B})}(g(x+a+\mathbf{B})) = \eta(a+\mathbf{B})M_\eta(\widetilde{U}_a g)(x+\mathbf{B}).$$

Zatem

$$\widetilde{U}_a \circ M_\eta = \eta(a+\mathbf{B}) M_\eta \circ \widetilde{U}_a. \tag{6.14}$$

Ponieważ

$$M_\eta(\tilde{f}_1)(x+\mathbf{B}) = \eta(x+\mathbf{B})\tilde{f}_1(x+\mathbf{B}) =$$
$$= \eta(x+\mathbf{B}) \cdot 1(x+\mathbf{B}) V_{s(x+\mathbf{B})} f = \eta(x+\mathbf{B}) V_{s(x+\mathbf{B})} f = \tilde{f}_\eta(x+\mathbf{B}),$$

więc

$$M_\eta : H_1 \to H_\eta. \tag{6.15}$$

W końcu zauważmy, że $(M_\eta)_{\eta \in ann(\mathbf{B})}$ jest reprezentacją unitarną grupy $ann(\mathbf{B})$, tzn.

$$M_\eta \circ M_{\eta'} = M_{\eta \cdot \eta'}, \tag{6.16}$$

w szczególności (używając (6.15) i (6.16))

$$M_\eta(H_{\eta'}) = M_\eta(M_{\eta'} H_1) = M_{\eta\cdot\eta'}(H_1) = H_{\eta\cdot\eta'}.$$

Dla $\eta \in ann(\mathbf{B})$ połóżmy

$$G_\eta = \{g \in H;\ \sigma_{g,(\widetilde{U}_a)_{a\in\mathbf{A}}}((\eta \cdot Y)^c) = 0\}. \tag{6.17}$$

Zauważmy, że G_η jest podprzestrzenią spektralną przestrzeni H. Stąd dla dowolnego operatora liniowego i ciągłego Q, $Q \circ \widetilde{U}_a = \widetilde{U}_a \circ Q$ dla dowolnego $a \in \mathbf{A}$, mamy $Q(G_\eta) \subset G_\eta$ (patrz ćwiczenie 2.44). Ponadto

$$M_\eta : G_1 \to G_\eta, \tag{6.18}$$

gdyż (patrz (6.14))

$$\langle \widetilde{U}_a M_\eta g, M_\eta g\rangle = \eta(a+\mathbf{B})\langle \widetilde{U}_a g, g\rangle,$$

co oznacza, że miara spektralna funkcji $M_\eta g$ jest przesunięciem miary spektralnej funkcji g o element η[22].

[22]Rzeczywiście, rozpatrzmy miarę Diraca δ_η; mamy

$$\widehat{\delta}_\eta(a) = \int_{\widehat{\mathbf{A}}} \chi(a)\, d\delta_\eta(\chi) = \eta(a) = \eta(a+\mathbf{B});$$

po prawej stronie stoi zatem iloczyn transformat Fouriera, tzn. transformata Fouriera splotu.

Lemat 6.5 *Reprezentacja* $\left(\widetilde{U}_b|_{G_\eta}\right)_{b\in\mathbf{B}}$ *jest równoważna z* $(V_b)_{b\in\mathbf{B}}$.

Dowód.

Wystarczy pokazać (patrz (6.13)), że $\left(\widetilde{U}_b|_{G_\eta}\right)_{b\in\mathbf{B}}$ jest równoważna reprezentacji $\left(\widetilde{U}_b|_{H_\eta}\right)_{b\in\mathbf{B}}$.

Zauważmy najpierw, że skoro G_η jest podprzestrzenią spektralną[23], a $H_{\eta'}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla dowolnego $\eta' \in ann(\mathbf{B})$, więc

$$proj_{G_\eta} \circ proj_{H_{\eta'}} = proj_{H_{\eta'}} \circ proj_{G_\eta}$$

i stąd

$$G_\eta = \bigoplus_{\eta' \in ann(\mathbf{B})} G_\eta \cap H_{\eta'},\ H_\eta = \bigoplus_{\eta' \in ann(\mathbf{B})} G_{\eta^2\overline{\eta'}} \cap H_\eta$$

oraz

$$M_{\eta\cdot\overline{\eta'}}(G_\eta \cap H_{\eta'}) = G_{\eta^2\overline{\eta'}} \cap H_\eta,$$

co, ze względu na (6.14) (dla $b \in \mathbf{B}(!)$), pozwala nam zdefiniować ekwiwariantny operator unitarny pomiędzy G_η i H_η dla reprezentacji grupy $\mathbf{B}$. $\square$

Potrzebny nam jeszcze będzie następujący ogólny

Lemat 6.6 *Niech* $\mathcal{W} = (W_a)_{a\in\mathbf{A}}$ *będzie reprezentacją unitarną na przestrzeni Hilberta G. Niech* G_η *będzie zdefiniowane jak w (6.17). Wówczas*

$$\sigma_{(W_b)_{b\in\mathbf{B}}|_{G_\eta}} = (p_\mathbf{B})_* \left(\sigma_\mathcal{W}|_{\eta\cdot Y}\right) \text{ oraz } M_{(W_b)_{b\in\mathbf{B}}|_{G_\eta}} = M_\mathcal{W} \circ p_\mathbf{B}^{-1},$$

gdzie $p_B^{-1} : \widehat{\mathbf{B}} \to \eta \cdot Y$.

Dowód.

Z dokładnością do spektralnej równoważności mamy

$$G_\eta = L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma_1) \oplus L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma_2) \oplus \ldots,$$

gdzie $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \ldots$ oraz

$$\sigma_1 = \sigma_\mathcal{W}|_{\eta\cdot Y}.$$

[23] Jeśli G_η jest podprzestrzenią spektralną, to $G_\eta^\perp$ jest również podprzestrzenią spektralną i stąd przemienność projekcji.

Reprezentacja $\mathcal{W}$ jest sumą prostą reprezentacji $T_a^{(i)} f(\chi) = \chi(a) f(\chi)$ dla $f \in L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma_i)$. Rezultat wynika teraz bezpośrednio z faktu, że operator unitarny

$$S_j : L^2(\widehat{\mathbf{A}}, \sigma_j) \to L^2(\widehat{\mathbf{B}}, (p_{\mathbf{B}})_* (\sigma_j))$$

zadany wzorem ($\chi \in \widehat{\mathbf{B}}$)

$$S_j(f)(\chi) = f(p_{\mathbf{B}}^{-1}(\chi))$$

ustala spektralną równoważność reprezentacji $(W_b)_{b\in\mathbf{B}}|_{L^2(\widehat{\mathbf{A}},\sigma_j)}$ ze standardową reprezentacją grupy $\mathbf{B}$ na $L^2(\widehat{\mathbf{B}}, (p_{\mathbf{B}})_*\sigma_j)$ (gdyż obcięte odwzorowanie $p_{\mathbf{B}}$ jest 1-1; $\sigma_j \ll \sigma_{\mathcal{W}}|_{\eta\cdot Y}$). □

W ten sposób udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 6.7 *Maksymalny typ spektralny reprezentacji indukowanej* $(U_a^{\mathbf{A},\mathbf{B}})_{a\in\mathbf{A}}$ *reprezentacji* $(U_b)_{b\in\mathbf{B}}$ *jest równy* $\sum_{\eta\in ann(\mathbf{B})} (p_{\mathbf{B},n}^{-1})_* \sigma_{(U_b)_{b\in\mathbf{B}}}$*, zaś funkcja krotności spektralnej jest równa* $M_{(U_b)_{b\in\mathbf{B}}} \circ p_{\mathbf{B}}$ *na* $\eta \cdot Y$.

7 Uzupełnienia

7.1 O miarach warunkowych

Standardową przestrzenią mierzalną nazywamy parę $(X, \mathcal{B})$, gdzie X jest przestrzenią metryczną ośrodkową i zupełną, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ oznacza zaś σ-algebrę podzbiorów borelowskich przestrzeni X. Przypomnijmy, że $M_1^+(X)$ oznacza zbiór wszystkich probabilistycznych miar borelowskich na X. Jeśli $\mu \in M_1^+(X)$, to trójkę $(X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywamy *standardową przestrzenią probabilistyczną*.

Twierdzenie 7.1 (Kuratowskiego) *Jeśli* $(X, \mathcal{B})$, $(X', \mathcal{B}')$ *są standardowymi przestrzeniami mierzalnymi oraz* $card\, X = card\, X'$*, to istnieje bijekcja* $S : X \to X'$ *taka, że* S *oraz* S^{-1} *są odwzorowaniami borelowskimi.* □

Ćwiczenie 7.2 Załóżmy, że $A \subset \mathbf{T}$ jest nieprzeliczalnym podzbiorem borelowskim. Pokazać, że istnieje borelowska miara ciągła $\mu \in M_1^+(\mathbf{T})$ taka, że $\mu(A) = 1$.

Będziemy teraz zakładać, że X jest zwartą przestrzenią metryczną.

Na zbiorze $M_1^+(X)$ rozpatrujemy *słabą topologię*. Przypomnijmy, że bazą otoczeń punktu $\kappa \in M_1^+(X)$ w tej topologii są zbiory postaci

$$U^{\varepsilon}_{f_1,\ldots,f_k}(\kappa) = \{\rho \in M_1^+(X);\ |\int_X f_i\,d\kappa - \int_X f_i\,d\rho| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

gdzie $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_k \in C(X)$.

Uwaga 7.3 Załóżmy, że chcemy teraz sprawdzić, że pewne odwzorowanie o wartościach w $(M_1^+(X), \mathcal{B}(M_1^+(X)))$ jest mierzalne. Ponieważ zbiory postaci $U^{\varepsilon}_f(\kappa)$ tworzą podbazę otoczeń punktu $\kappa \in M_1^+(X)$, więc wystarczy tylko sprawdzać, że przeciwobrazy takich właśnie zbiorów są mierzalne.

Okazuje się ponadto, że słaba topologia jest metryzowalna i otrzymujemy w ten sposób przestrzeń metryczną zwartą, przy czym

$$\kappa_n \to \kappa \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \int_X f\,d\kappa_n \to \int_X f\,d\kappa$$

dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$.

Zauważmy, że każdy element $\kappa \in M_1^+(X)$ wyznacza funkcjonał $\mathcal{J}_\kappa \in C(X)^*$ (tzn. funkcjonał liniowy i ciągły na $C(X)$) zadany wzorem

$$\mathcal{J}_\kappa(f) = \int_X f\,d\kappa$$

dla dowolnej funkcji ciągłej f na X. Funkcjonał $\mathcal{J}_\kappa$ ma dwie dodatkowe własności:

(a) $\mathcal{J}_\kappa(1) = 1$,

(b) $\mathcal{J}_\kappa(f) \geqslant 0$ dla dowolnej funkcji ciągłej $f \geqslant 0$.

Z twierdzenia Riesza wynika, że jeśli $\mathcal{J} \in C(X)^*$ spełnia warunki (a) oraz (b), to istnieje dokładnie jedna miara $\kappa \in M_1^+(X)$ taka, że $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\kappa$.

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie standardową, probabilistyczną przestrzenią borelowską. Zakładamy zatem, że X jest przestrzenią metryczną zwartą, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ zaś oznacza σ-algebrę zbiorów borelowskich oraz $\mu \in M_1^+(X)$. Niech $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie teraz dowolną przestrzenią probabilistyczną i niech

$$S : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{C}, \nu)$$

będzie homomorfizmem przestrzeni probabilistycznych (tzn. $S : X \to Y$ jest mierzalne oraz obraz miary μ poprzez S jest równy mierze ν). Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, przez $E(f|Y)$ oznaczamy jedyną (choć wyznaczoną tylko ν-p.w.) funkcję w $L^1(Y, \mathcal{C}, \nu)$, dla której zachodzi równość

$$\int_Y E(f|Y) \cdot h \, d\nu = \int_X f \cdot (h \circ S) \, d\mu$$

dla dowolnej funkcji $h \in L^1(Y, \mathcal{C}, \nu)$.

Twierdzenie 7.4 *Istnieje odwzorowanie mierzalne*

$$Y \ni y \mapsto \mu_y \in M_1^+(X)$$

z $(Y, \mathcal{C})$ *do* $(M_1^+(X), \mathcal{B}(M_1^+(X)))$*, które spełnia następujące warunki:*
(i) Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$*, dla* ν*-p.w.* $y \in Y$ *mamy* $f \in L^1(X, \mu_y)$ *oraz*

$$E(f|Y)(y) = \int_X f \, d\mu_y.$$

(ii) Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$*,*

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y \left(\int_X f \, d\mu_y \right) d\nu(y).$$

Dowód.

Niech $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ $(f_0 = 1)$ będzie podzbiorem gęstym w przestrzeni Banacha $C(X)$. Następnie niech $M \subset C(X)$ będzie podprzestrzenią nad liczbami wymiernymi (tzn. nad $\mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$) generowaną przez $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$. Zatem M jest ciągle podzbiorem przeliczalnym.

Załóżmy, że $L : M \to \mathbf{C}$ jest funkcjonałem spełniającym następujące warunki:
(1) $L(ag + bh) = aL(g) + bL(h)$ dla dow. $g, h \in M$, $a, b \in \mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$;
(2) $|L(g)| \leqslant \|g\|_{C(X)}$ dla dow. $g \in M$;
(3) $L(g) \geqslant 0$ dla dow. $g \in M$, $g \geqslant 0$;
(4) $L(1) = 1$.

Pokażemy teraz, że jeśli $L : M \to \mathbf{C}$ spełnia warunki (1)-(4), to istnieje dokładnie jedno rozszerzenie funkcjonału L do funkcjonału $L \in C(X)^*$ spełniającego warunek (b). Istotnie własności (1) oraz (2) implikują, że funkcjonał L jest jednostajnie ciągły na przestrzeni M, a zatem na podzbiorze gęstym w $C(X)$. Istnieje zatem dokładnie jedno rozszerzenie funkcji L do funkcji L ciągłej na $C(X)$. Rozszerzenie to będzie spełniało warunek liniowości nad liczbami wymiernymi, a stąd i nad $\mathbf{C}$ (bo wiemy już, że funkcja rozszerzona L jest ciągła). Niech $g \in C(X)$, $g \geqslant 0$. Weźmy $g_n \in M$ tak, aby

$$\|g_n - (g + \frac{1}{n})\|_{C(X)} < \frac{1}{n}.$$

Stąd $g_n \geqslant 0$ oraz $g_n \to g$ jednostajnie, tzn. w przestrzeni $C(X)$. Ponieważ $L(g_n) \geqslant 0$, więc $L(g) \geqslant 0$. Pokazaliśmy w ten sposób (korzystając z twierdzenia Riesza), że aby zadać miarę probabilistyczną na $(X, \mathcal{B})$ wystarczy podać funkcjonał L na zbiorze M, przy czym funkcjonał ten musi spełniać warunki (1)-(4).

Dla dowolnej funkcji $f \in M$ wybierzmy jakąkolwiek wersję średniej warunkowej $E(f|Y)$ zdefiniowaną dla wszystkich $y \in Y$. Następnie, dla dowolnego $y \in Y$, kładziemy

$$L_y(f) = E(f|Y)(y).$$

Zauważmy teraz, że dla dowolnych $f, g \in M$, $a, b \in \mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$ zbiór

$$Y_{f,g,a,b} = \{y \in Y;\ E(af + bg|Y)(y) = aE(f|Y)(y) + bE(g|Y)(y)\}$$

jest zbiorem o pełnej mierze. Podobnie, $\nu(Y'_g) = 1$, gdzie

$$Y'_g = \{y \in Y;\ |E(g|Y)(y)| \leqslant E(|g||Y)(y)\}$$

$(g \in M)$. Jeśli teraz położymy

$$Y_0 = \bigcap_{f,g,g' \in M} \bigcap_{a,b \in \mathbf{Q}+i\mathbf{Q}} Y_{f,g,a,b} \cap Y'_{g'},$$

$\nu(Y_0) = 1$ oraz dla dowolnego $y \in Y_0$ funkcjonał L_y spełnia własności (1)-(4). Zatem dla $y \in Y_0$ mamy określone miary $\mu_y \in M_1^+(X)$ wyznaczone przez funkcjonały L_y.

Ustalmy teraz $\kappa \in M_1^+(X)$, $f \in M$ oraz $\varepsilon > 0$. Mamy

$$\{y \in Y;\ |\int_X f\, d\mu_y - \int_X f\, d\kappa| < \varepsilon\} = \{y \in Y;\ |E(f|Y)(y) - a| < \varepsilon\},$$

gdzie $a = \int_X f\, d\kappa$, a zatem otrzymujemy mierzalny podzbiór zbioru Y. Wynika stąd, że odwzorowanie $y \to \mu_y$ jest mierzalne.

Równość w warunku (i) zachodzi dla dowolnej funkcji $f \in M$, a stąd i dla dowolnej funkcji $f \in C(X)$. Ponadto jest jasne z własności średniej warunkowej, że jeśli (i) jest prawdziwe dla funkcji $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, to dla tej funkcji spełniona też jest równość w warunku (ii).

Weźmy teraz dowolną funkcję $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ponieważ zbiór $C(X)$ jest gęstym podzbiorem w $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ (w topologii L^1), więc istnieje ciąg funkcji ciągłych $(g_n)_{n \geqslant 1}$ taki, że

$$f = \sum_{n \geqslant 1} g_n \quad \mu - \text{p.w. oraz} \quad \sum_{n \geqslant 1} \|g_n\|_{L^1} < +\infty.$$

Stąd $\sum_{n \geqslant 1} \|E(|g_n||Y)\|_{L^1} < +\infty$ oraz (korzystając z twierdzenia Lebesgue'a)

$$\int_X \sum_{n \geqslant 1} E(|g_n||Y)\, d\nu = \sum_{n \geqslant 1} \int_Y E(|g_n||Y)\, d\nu$$

i w szczególności szereg $\sum_{n \geqslant 1} E(|g_n||Y)$ jest zbieżny ν-p.w. W każdym punkcie $y \in Y$, w którym ten szereg jest zbieżny, mamy

$$\sum_{n \geqslant 1} |g_n| \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu_y)$$

oraz

$$\int_X (\sum_{n \geqslant 1} g_n)\, d\mu_y = \sum_{n \geqslant 1} \int_X g_n\, d\mu_y.$$

Ponadto, dla ν-p.w. $y \in Y$ mamy $\int_X g_n\, d\mu_y = E(g_n|Y)(y)$, a więc

$$\int_X (\sum_{n \geqslant 1} g_n)\, d\mu_y = \sum_{n \geqslant 1} E(g_n|Y)(y)$$

dla ν-p.w. $y \in Y$. Ale średnia warunkowa jest operatorem ciągłym w L^1, więc

$$E(\sum_{n \geqslant 1} g_n|Y) = \sum_{n \geqslant 1} E(g_n|Y)$$

(równość w $L^1(Y, \mathcal{C}, \nu)$). Pokazaliśmy, że ciąg występujący po prawej stronie w powyższej równości jest zbieżny w L^1, a wcześniej, że jest on p.w. zbieżny. Stąd

$$\int_X (\sum_{n \geqslant 1} g_n)\, d\mu_y = E(\sum_{n \geqslant 1} g_n|Y)$$

p.w. dla miary ν. Dla zakończenia dowodu własności (i) musimy jeszcze pokazać, że dla p.w. $y \in Y$,

$$f = \sum_{n \geqslant 1} g_n \quad \text{względem miary} \quad \mu_y.$$

Wykażemy, że jeśli $\mu(A) = 0$, to $\mu_y(A) = 0$ dla ν-p.w. $y \in Y$ (następnie przyjmiemy $A = \{x \in X;\ f(x) \neq \sum_{n\geqslant 1} g_n\}$). Korzystając z regularności miary μ, niech $U_n \subset X$ będą zbiorami otwartymi takimi, że

$$A \subset U_n, \quad \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0.$$

Niech $h_n \in C(X)$ spełnia

$$h_n = 0 \text{ na } X \setminus U_n \text{ oraz } 0 < h_n \leqslant 1 \text{ na } U_n.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, funkcja $(h_n)^\varepsilon$ jest ciągła oraz

$$\int_Y \left(\int_X (h_n)^\varepsilon \, d\mu_y\right) d\nu(y) = \int_X (h_n^\varepsilon)\, d\mu \leqslant \mu(U_n).$$

Niech teraz $\varepsilon \to 0$. Otrzymujemy

$$\int \mu_y(U_n)\, d\nu(y) \leqslant \mu(U_n),$$

a więc $\int \mu_y(A)\, d\nu(y) \leqslant \mu(U_n) \to 0$. □

Ustalmy teraz funkcję $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ i niech $C \in \mathcal{C}$. Z własności średniej warunkowej mamy

$$\int_C E(f|Y)\, d\nu = \int_{S^{-1}(C)} f\, d\mu,$$

a więc

$$\int_C \left(\int f\, d\mu_y\right) d\nu = \int_{S^{-1}(C)} f\, d\mu. \tag{7.1}$$

Wniosek 7.5 *Dla dowolnego $C \in \mathcal{C}$, $\mu_y(S^{-1}(C)) = 1$ dla ν-p.w. $y \in C$.*

Dowód.
Podstawiając $f = \chi_{S^{-1}(C)}$ z (7.1) otrzymujemy

$$\int_C \mu_y(S^{-1}(C))\, d\nu = \mu(S^{-1}(C)) = \nu(C).$$

Ponieważ $\mu_y(S^{-1}(C)) \leqslant 1$, więc powyższa równość może zachodzić jedynie, gdy $\mu_y(S^{-1}(C)) = 1$ dla ν-p.w. $y \in C$. □

Wniosek 7.6 *Jeśli w twierdzeniu 7.4, przestrzeń $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ jest również standardowa, to dla ν-p.w. $y \in Y$, miara μ_y jest skupiona na zbiorze $S^{-1}(y)$.*

Dowód.

Ponieważ $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ jest standardowa, więc istnieje przeliczalna rodzina $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ podzbiorów miary dodatniej oraz $Y_1 \subset Y$ o mierze 1 takie, że dla dowolnego $y \in Y_1$ istnieje ciąg $(n_k = n_k(y))_{k \geqslant 1}$ taki, że

$$\{y\} = \bigcap_{k \geqslant 1} A_{n_k}.$$

Korzystając z wniosku 7.5, istnieje zbiór $Y_2 \subset Y$, $\nu(Y_2) = 1$ taki, że dla $y \in Y_2$

$$\mu_y(S^{-1}A_n) = 1 \text{ dla dowolnego } n \geqslant 1, \text{ gdy } y \in A_n.$$

Niech $y \in Y_1 \cap Y_2$. Mamy

$$\mu_y(S^{-1}(\{y\})) = \mu_y(S^{-1}(\bigcap_{k \geqslant 1} A_{n_k(y)})) = \mu_y(\bigcap_{k \geqslant 1} S^{-1}(A_{n_k(y)})) = 1.$$

□

7.2 Lematy o równościach p.w., homomorfizmy mierzalne

Zakładamy, że $\mathbf{A}$ jest grupą lokalnie zwartą[24] spełniającą drugi aksjomat przeliczalności (przypomnijmy, że grupy takie są metryzowalne). Oznaczmy przez $\lambda_{\mathbf{A}}$ prawostronną miarę Haara na $\mathbf{A}$ (miara taka jest i miarą Radona, tzn. przyjmuje wartości skończone na wszystkich zbiorach zwartych).

Lemat 7.7 (Steinhausa) *Niech $K \subset \mathbf{A}$ będzie zbiorem zwartym, $\lambda_{\mathbf{A}}(K) > 0$. Wówczas zbiór $K^{-1} \cdot K$ zawiera otwarte otoczenie jedynki.*

Dowód.

Zauważmy, że jeśli $Ka \cap K \neq \emptyset$, to $a \in K^{-1} \cdot K$, a więc wystarczy pokazać, że $\{a \in \mathbf{A};\ Ka \cap K \neq \emptyset\}$ zawiera otoczenie jedynki. Z regularnosci miary $\lambda_{\mathbf{A}}$ wynika, że istnieje zbiór otwarty $U \supset K$ taki, że

$$\lambda_{\mathbf{A}}(U) < 2\lambda_{\mathbf{A}}(K). \tag{7.2}$$

[24] Nie zakładamy, że $\mathbf{A}$ jest grupa abelową.

Zauważmy, że możemy znaleźć symetryczne otoczenie jedynki $W \subset \mathbf{A}$ takie, że $Ka \subset U$ dla dowolnego $a \in W$ (istotnie, dla dowolnego $b \in K$ można znaleźć $\delta_b > 0$ takie, że $bB(e, 2\delta_b) \subset U$, wybieramy następnie $b_1, \ldots, b_N$ tak, aby $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} b_i B(e, \delta_{b_i})$ i sprawdzamy, że $KB(e,\delta) \subset U$, gdzie $\delta > 0$ dobieramy tak, aby $B(e, \delta_{b_i})B(e,\delta) \subset B(e, 2\delta_{b_i})$, dla $i = 1, \ldots, N$). Ponieważ Ka oraz K mają tę samą miarę i są zawarte w U dla $a \in W$, więc zbiory te nie mogą być rozłączne ze względu na (7.2). $\square$

Ćwiczenie 7.8 Załóżmy, że $\mathbf{A}$ jest dodatkowo spójna. Pokazać, że jeśli $G \subset \mathbf{A}$ jest podgrupą borelowską, to albo $G = \mathbf{A}$, albo $\lambda_{\mathbf{A}}(G) = 0$.

Załóżmy, że grupa $\mathbf{A}$ działa (w sposób mierzalny) na standardowej probabilistycznej przestrzeni borelowskiej $(X, \mathcal{B}, \mu)$, mamy więc $\mathcal{T} = (T_a)_{a \in \mathbf{A}} \subset Aut(X, \mathcal{B}, \mu)$. Niech Y będzie standardową przestrzenią borelowską i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją borelowską. Zauważmy, że zbiór

$$I_f = \{(x, a) \in X \times \mathbf{A} : \ f(T_a x) = f(x)\} \tag{7.3}$$

jest podzbiorem borelowskim zbioru $X \times \mathbf{A}$. Niech m będzie miarą probabilistyczną równoważną mierze Haara $\lambda_{\mathbf{A}}$.

Lemat 7.9 *Jeśli dla każdego $a \in \mathbf{A}$, $f(T_a x) = f(x)$ dla μ-p.w. $x \in X$, to istnieje funkcja borelowska $g : X \to Y$ taka, że $f = g$ μ-p.w. oraz g jest funkcją T_a-niezmienniczą dla dowolnego $a \in \mathbf{A}$.*

Dowód.

Możemy oczywiście zakładać, że Y jest podzbiorem borelowskim odcinka $[0,1]$. Dla dowolnego $x \in X$ połóżmy $c(x) = \int_{\mathbf{A}} f(T_a x)\, dm(a)$. Zauważmy, że funkcja $c(\cdot)$ jest borelowska. Zauważmy ponadto, że funkcja

$$d : X \ni x \mapsto \int_{\mathbf{A}} |f(T_a x) - c(x)|\, dm(a)$$

jest funkcją borelowską.

Ponieważ zbiór I_f jest borelowski, a więc mierzalny dla miary $\mu \otimes m$ oraz dla wszystkich $a \in \mathbf{A}$ cięcia tego zbioru mają pełną μ-miarę, więc z twierdzenia Fubiniego wynika, że $\mu \otimes m(I_f) = 1$. Ponownie stosując twierdzenie Fubiniego wnioskujemy, że zbiór

$$X_0 = \{x \in X;\ a \mapsto f(T_a x) \text{ jest } m\text{-p.w. stała}\}$$

jest zbiorem pełnej μ-miary. Niech $x \in X_0$ oraz $b \in \mathbf{A}$. Wówczas $a \mapsto f(T_{ab}x)$ jest m-p.w. stała, gdyż m jest quasi-niezmiennicza na przesunięcia, a więc $c(T_b x) = c(x)$. Wynika stąd, że zbiór X_0 jest zbiorem niezmienniczym na T_b dla dowolnego $b \in \mathbf{A}$. Ponieważ $X_0 = d^{-1}(\{0\})$, więc X_0 jest podzbiorem borelowskim. Wystarczy teraz położyć $g(x) = c(x)$ dla $x \in X_0$ oraz przyjąć stałą wartość funkcji g na dopełnieniu zbioru X_0. $\square$

Twierdzenie 7.10 (Mackeya) *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie grupą lokalnie zwartą, spełniającą drugi aksjomat przeliczalności. Niech* $\mathbf{B}$ *będzie ośrodkową grupą metryczną. Załóżmy, że* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *jest homomorfizmem grupowym, który jest jednocześnie odwzorowaniem borelowskim. Wówczas* h *jest ciągły.*

Dowód.

Oczywiście możemy zakładać, że h jest surjekcją. Weźmy dowolne otoczenie V jedynki w $\mathbf{B}$. Mamy pokazać, że $h^{-1}(V)$ zawiera otwarte otoczenie jedynki w $\mathbf{A}$. Niech V_1 będzie symetrycznym otoczeniem jedynki takim, że $V_1 V_1 \subset V$. Ustalmy też podzbiór gęsty $\{b_i;\ i \geqslant 1\}$ w $\mathbf{B}$. Wówczas $\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_1 b_i$. Ponadto

$$\mathbf{A} = h^{-1}(\mathbf{B}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h^{-1}(V_1 b_i).$$

Wybierzmy $a_i \in \mathbf{A}$ tak, aby $h(a_i) = b_i$. Łatwo sprawdzamy, że $h^{-1}(V_1 b_i) = h^{-1}(V_1)a_i$, $i \geqslant 1$. Zatem $\mathbf{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} h^{-1}(V_1)a_i$, a więc dla pewnego $j \geqslant 1$, $\lambda_{\mathbf{A}}(h^{-1}(V_1)a_i) > 0$. Zatem $\lambda_{\mathbf{A}}(h^{-1}(V_1)) > 0$. Ponadto

$$h^{-1}(V_1)h^{-1}(V_1) \subset h^{-1}(V_1 V_1) \subset h^{-1}(V). \tag{7.4}$$

Ponieważ V_1 jest podzbiorem symetrycznym, więc i zbiór $h^{-1}(V_1)$ jest symetryczny. Możemy teraz wybrać podzbiór zwarty K o mierze dodatniej taki, że $K \subset h^{-1}(V_1)$, przy czym

$$K^{-1}K \subset h^{-1}(V_1)h^{-1}(V_1) \subset h^{-1}(V)$$

i teza wynika z lematu 7.7. $\square$

7.3 Selektory borelowskie

Załóżmy, że $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{C})$ są standardowymi przestrzeniami borelowskimi. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem borelowskim. Wówczas, dla $A \in \mathcal{B}$ zbiór $f(A)$ na ogół nie jest borelowski. Obraz zbioru borelowskiego poprzez odwzorowanie borelowskie nosi nazwę zbioru *analitycznego.* Zbiory analityczne są ciągle „porządne” z punktu widzenia teorii miary. Istotnie, mają one tzw. własność uniwersalnej mierzalności, tzn. jeśli $\nu \in M(Y)$, to $f(A)$ jest zbiorem ν-mierzalnym (tzn. leży w ν-uzupełnieniu σ-algebry $\mathcal{C}$. Często nas jednak interesuje sytuacja, w której musimy wiedzieć, że $f(A)$ jest zbiorem borelowskim[25].

Twierdzenie 7.11 (Kunugui) *Przy założeniach j.w. niech $A \in \mathcal{B}$. Załóżmy dodatkowo, że dla dowolnego $y \in Y$ przeciwobraz $f^{-1}(\{y\})$ jest zbiorem σ-zwartym w X. Wówczas $f(A) \in \mathcal{C}$ oraz dodatkowo istnieje odwzorowanie borelowskie $g : f(A) \to X$ takie, że $f \circ g = id$ (tzn. $f(g(y)) = y$ dla dowolnego $y \in f(A)$.*

Odwzorowanie g, które pojawia się w powyższym twierdzeniu jest tzw. *selektorem borelowskim* (odwzorowania $f|_A$).

Wniosek 7.12 *Jeśli* **A** *jest grupą lokalnie zwartą, spełniającą drugi aksjomat przeliczalności,* **B** *zaś jej podgrupą domkniętą, to istnieje selektor borelowski odwzorowania ilorazowego.*

Dowód.
Przeciwobrazy punktów odwzorowania ilorazowego są warstwami podgrupy **B**, a więc są przestrzeniami lokalnie zwartymi stąd σ-zwartymi (patrz twierdzenie 1.13 (ii)). □

Wniosek 7.13 (twierdzenie Suslina) *Przy założeniach twierdzenia 7.11, jeśli f jest dodatkowo różnowartościowe, to obrazy zbiorów borelowskich poprzez f są zbiorami borelowskimi.*

[25]Znane twierdzenie orzeka, że zbiór analityczny C jest borelowski wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem analitycznym.

7.4 Widmo Gelfanda elementów algebr Banacha

Niech B będzie przestrzenią Banacha. Jeśli w B określone dodatkowo mnożenie wektorów (łączne i rozdzielne względem dodawania), a przy tym

$$\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{7.5}$$

to B nazywamy *algebrą Banacha*. Standardowym przykładem algebry Banacha jest algebra $B(H)$ operatorów liniowych i ograniczonych na ustalonej przestrzeni Hilberta (mnożenie definiujemy jako składanie operatorów). Jeśli dodatkowo mnożenie jest przemienne, to algebrę Banacha nazywamy *przemienną algebrą Banacha*. Standardowymi przykładami przemiennych algebr Banacha są $L^\infty(X,\mu)$ oraz $C(X)$ ze zwykłym mnożeniem funkcji (zakładamy, że X jest zwartą przestrzenią metryczną oraz $\mu \in M^+(X)$). Obie te algebry posiadają jedynkę. Przykład algebry $L^1(\mathbf{T})$, gdzie mnożenie określa się poprzez splot pokazuje, że na ogół przemienna algebra Banacha nie posiada jedynki.

Będziemy teraz zakładać, że B jest algebrą Banacha z jedynką e ($\|e\| = 1$). Ze względu na (7.5) mnożenie jest odwzorowaniem ciągłym. Elementy odwracalne w B nazywamy *regularnymi*, nieodwracalne zaś *osobliwymi*. Oczywiście e jest elementem odwracalnym. Ponadto

$$\|x - e\| < 1 \;\Rightarrow\; x \text{ jest regularny.} \tag{7.6}$$

Istotnie, łatwo pokazujemy, że $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$ (szereg po prawej stronie jest bezwzględnie zbieżny i dla jego sumy s mamy $sx = xs = s - (e-x)s$), a ponadto zauważmy, że

$$\|x^{-1} - e\| = \|\sum_{n=1}^{\infty}(e-x)^n\| \leqslant \frac{\|e-x\|}{1-\|e-x\|}. \tag{7.7}$$

Ćwiczenie 7.14 Pokazać, że grupa multyplikatywna algebry B jest otwarta, a odwzorowanie $x \mapsto x^{-1}$ jest homeomorfizmem tej grupy.

Zbiór $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \lambda \cdot e - x \text{ jest osobliwy}\}$ nazywamy *widmem* elementu $x \in B$. *Zbiorem rezolwenty* $\rho(x)$ elementu x nazywamy dopełnienie jego widma: $\rho(x) = \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$. *Rezolwentą liczby* $\lambda \in \rho(x)$ nazywamy element $R(\lambda, x) := (\lambda \cdot e - x)^{-1}$. *Promień spektralny* elementu $x \in B$ definiujemy jako

$$\|x\|_\infty := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Ponieważ wiemy już, że elementy odwracalne stanowią podgrupę w B, która jest zbiorem otwartym, więc łatwo też pokazać, że zbiór rezolwenty jest zawsze podzbiorem otwartym w $\mathbf{C}$.

Twierdzenie 7.15 *Dla dowolnego $x \in B$ rezolwenta $R(\cdot, x) : \rho(x) \to B$ jest funkcją holomorficzną w $\rho(x)$. Ponadto $\lim_{\lambda\to\infty} \|R(\lambda, x)\| = 0$ oraz spełnione jest równanie rezolwenty:*

$$R(x, \lambda) - R(x, \mu) = (\mu - \lambda) R(x, \lambda) \circ R(x, \mu). \tag{7.8}$$

Dowód.
Równanie rezolwenty sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem (korzystając z faktu, że $R(x, \lambda)R(x, \mu) = R(x, \mu)R(x, \lambda)$). Niech $f \in B^*$. Z (7.8) mamy

$$\frac{f(R(x, \mu)) - f(R(x, \lambda))}{\mu - \lambda} = -f(R(x, \lambda)R(x, \mu)),$$

skąd natychmiast wynika różniczkowalność (więc holomorficzność), bo granica, gdy $\mu \to \lambda$, po prawej stronie powyższej równości istnieje.

Ponadto, gdy $|\lambda| > \|x\|$, to $\|e - (e - \frac{x}{\lambda})\| < 1$, więc

$$\{\lambda \in \mathbf{C};\ |\lambda| > \|x\|\} \subset \rho(x), \tag{7.9}$$

a więc jeśli $\lambda \to \infty$, to $e - \frac{x}{\lambda} \to e$ i stąd $\|R(x, \lambda)\| \to \infty$. □

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest następujący fakt:

$$\sigma(x) \neq \emptyset \text{ dla dowolnego } x \in B.$$

Rzeczywiście, gdyby $\rho(x) = \mathbf{C}$, to funkcja $\lambda \mapsto f(R(x, \lambda))$ byłaby funkcją całkowitą znikającą w nieskończoności, a zatem z twierdzenia Liouville'a funkcja ta byłaby zerowa (dla dowolnego $f \in B^*$). Zauważmy ponadto, że widmo $\sigma(x)$ jest ograniczonym podzbiorem płaszczyzny zespolonej, a dokładniej (patrz (7.9))

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|.$$

Zasadniczym faktem prowadzącym do twierdzeń klasyfikacyjnych jest następujące twierdzenie Gelfanda-Mazura:

Twierdzenie 7.16 *Jeśli algebra Banacha B z jedynką jest ciałem, to jest ona izometrycznie izomorficzna z* $\mathbf{C}$.

Dowód.

Gdyby dla pewnego $x \in B$, $x \neq \lambda e$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbf{C}$, to $\lambda e - x \neq 0$ dla wszystkich $\lambda \in C$ i z założenia mielibyśmy $\rho(x) = \mathbf{C}$, co jest niemożliwe. □

Przypomnijmy teraz następujący elementarny lemat będący podstawą kilku wzorów również w teorii układów dynamicznych.

Lemat 7.17 *Jeśli $(a_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich oraz $a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m$ dla dowolnych $n, m \geqslant 1$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ istnieje.*

Dowód.

Kładziemy $b_n = \log a_n$. Wtedy $b_{n+m} \leqslant b_n + b_m$. Niech $b = \inf\{\frac{b_n}{n}; n \geqslant 1\}$ $(-\infty \leqslant b < +\infty)$. Weźmy $c > b$. Wówczas dla pewnego $N \geqslant 1$, $\frac{b_N}{N} < c$. Połóżmy $M = \sup\{|b_1|, \ldots, |b_N|\}$. Jeśli $m > N$, to $m = kN + q$, gdzie $0 \leqslant q < N$. Mamy

$$\frac{b_m}{m} = \frac{b_{kN+q}}{kN+q} \leqslant \frac{kb_N}{kN+q} + \frac{b_q}{kN+q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b_n}{N} + \frac{M}{m} < c + \frac{M}{m}$$

i stąd $\limsup_{m\to\infty} \frac{b_m}{m} \leqslant \frac{b_N}{N} < c$. Zatem $\lim_{m\to\infty} \frac{b_m}{m} = b$. □

Bezpośrednio z tego lematu wynika, że istnieje granica $s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Wynika stąd, że

$$\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Istotnie, jeśli $|\lambda| > s$, to $\lambda \in \rho(x)$, a nawet

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

(istotnie, po prostu sprawdzamy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$ jest bezwzględnie zbieżny: istnieje $\delta > 0$ taka, że $\|x^n\| < (\|x\|_\infty + \delta)^n$ dla $n \geqslant n_0$, a ponadto

$$(\lambda e - x) \circ \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = e - \frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \to e.)$$

Wynika stąd, że $\{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| > \|x\|_\infty\} \subset \rho(x)$ i dlatego $\|x\|_\infty \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Dowód przeciwnej nierówności zostawiamy jako ćwiczenie (zauważyć, że w każdym punkcie $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda > \|x\|_\infty$ funkcja $R(x, \lambda)$ jest holomorficzna; zauważyć ponadto, że ∞ jest punktem pozornie osobliwym i rozwinąć funkcję w szereg potęgowy w nieskończoności; skorzystać ze wzoru Hadamarda).

Właściwą podprzestrzeń $H \subset B$ nazywamy *ideałem*, gdy $HB = BH \subset H$. Zauważmy, że żaden element odwracalny nie należy do ideału. Łatwo pokazujemy, że domknięcie ideału jest ideałem (trzeba pokazać, że $e \notin \overline{H}$, jednakże element zbyt bliski jedynce e jest odwracalny) oraz, że jeśli podzielimy algebrę Banacha przez ideał domknięty, to otrzymamy (ilorazową) algebrę Banacha. Standardowo, używając lematu Kuratowskiego-Zorna, pokazujemy też, że każdy ideał zawiera się w ideale maksymalnym. Zauważmy, że jeśli element $x \in B$ jest osobliwy, to zbiór $H = xB = Bx$ jest ideałem, który jest oczywiście zawarty w pewnym ideale maksymalnym. Stąd natychmiast wynika następujący fakt:
$(*)$ *Element x przemiennej algebry Banacha z jedynka jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy on do żadnego ideału maksymalnego.*

Twierdzenie 7.18 *Jeśli M jest ideałem maksymalnym przemiennej algebry Banacha z jedynką, to algebra ilorazowa B/M jest izometrycznie izomorficzna z $\mathbf{C}$.*

Dowód.
Na mocy twierdzenia Gelfanda-Mazura oraz $(*)$ wystarczy pokazać, że $\{0\}$ jest jedynym ideałem maksymalnym w B/M. Niech $H = \bigcup \mathcal{H} \subset B$, gdzie branie sumy mnogościowej odbywa się po wszystkich ideałach $\mathcal{H} \subset B/M$ traktowanych jako podzbiory zbioru B. Łatwo pokazujemy, że $\mathcal{H}$ jest ideałem w B. Ponadto $M \subset H$ (M odpowiada ideałowi zerowemu w B/M), a więc z maksymalności ideału M mamy $M = H$, co oznacza dokładnie, że ideał zerowy jest jedynym ideałem w B/M. □

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika, że (przy założeniu maksymalności ideału M) dla dowolnego $x \in B$ istnieje dokładnie jedna liczba $\lambda = \hat{x}(M) \in \mathbf{C}$ taka, że $x - \lambda e \in M$. Zauważmy, że skoro $x - \hat{x}(M)e \in M$, więc

$$\hat{x}(M) \in \sigma(x).$$

W szczególności $|\hat{x}(M)| \leqslant \|x\|$. Łatwo sprawdzamy, że funkcjonał $B \ni x \mapsto \hat{x}(M) \in \mathbf{C}$ jest liniowy, a ponadto jest on multyplikatywny: $(xy)\hat{}(M) = \hat{x}(M)\hat{y}(M)$, a ponadto $\hat{e}(M) = 1$. Mamy również $\sigma(x) = \{x(M);\ m \in \mathcal{M}\}$ (jeśli $\lambda \in \sigma(x)$, to $x - \lambda e$ nie jest regularny, a zatem element ten należy do pewnego ideału maksymalnego M i wtedy $\lambda = x(M)$).

Z drugiej strony jeśli $x^* \in B^*$ jest funkcjonałem multyplikatywnym, to jego jądro jest ideałem maksymalnym (gdyż kowymiar jądra jest równy 1). Ponadto $x^*(\cdot) = (\cdot)\hat{}(ker\, x^*)$. Innymi słowy jedynymi homomorfizmami multyplikatywnymi są homomorfizmy postaci $(\cdot)\hat{}(M)$. Funkcjonały te są ciągłe, gdyż ich jądra są zbiorami domkniętymi. Zauważmy ponadto, że norma dowolnego funkcjonału multyplikatywnego x^* wynosi 1 ($x^*(e) = e$). Zatem zbiór wszystkich funkcjonałów multyplikatywnych jest podzbiorem kuli jednostkowej w B^*. Ponieważ $*$-słaba topologia odpowiada zbieżności punktowej, więc testując w punktach $x, y, xy \in B$ otrzymujemy natychmiast, że zbiór wszystkich funkcjonałów multyplikatywnych jest podzbiorem domkniętym (a więc zwartym z twierdzenia Banacha-Alaoglu) w $*$-słabej topologii.

Niech $\mathcal{M}$:=zbiór ideałów maksymalnych, przestrzeń tę nazywamy *przestrzenią reprezentacyjną* algebry B. Topologię (zwartą) w tej przestrzeni wprowadza się przenosząc $*$-słabą topologię ze zbioru wszystkich funkcjonałów multyplikatywnych: bazowe otoczenia ideału M_0 są więc postaci

$$V^{x_1,\dots,x_k}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k}(M_0) = \{M \in \mathcal{M};\ |\hat{x_i}(M) - \hat{x_i}(M_0)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1,\dots,k\}.$$

Homomorfizmem Gelfanda algebry Banacha B nazywamy odwzorowanie $G : B \to \mathbf{C}^{\mathcal{M}}$, gdzie

$$G(x)(M) = \hat{x}(M)$$

dla dowolnego $M \in \mathcal{M}$. Zauważmy jednak, że funkcja $G(x) : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ jest ciągła; istotnie na $V^x_\varepsilon(M_0)$ wartości funkcji $G(x)(\cdot)$ są odległe od $G(x)(M_0)$ nie więcej niż ε. Zatem

$$G : B \to C(\mathcal{M}),$$

przy czym oczywiście $C(\mathcal{M})$ jest przemienną algebrą Banacha. Łatwo pokazuje się, że G jest homomorfizmem.

Ponadto, skoro

$$\|G(x)\| = \sup\{|\hat{x}(M)|;\ M \in \mathcal{M}\} = \|x\|_\infty \leqslant \|x\|,$$

więc homomorfizm Gelfanda jest też ciągły. Zauważmy ponadto, że

$$x(M) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \cdot e \in M \Leftrightarrow x \in M,$$

a więc element $y \in B$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $y(M) \neq 0$ dla dowolnego ideału maksymalnego $M \in \mathcal{M}$.

Algebra Banacha nazywa się *półprosta*, gdy jej radykał $R(B)$ (tzn. przekrój wszystkich ideałów maksymalnych) jest ideałem zerowym. Zauważmy przy tym, że

$$R(B) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \{x \in B;\ \hat{x}(M) = 0\} = \{x \in B;\ \|x\|_\infty = 0\}$$

(istotnie, mamy $M = \{x \in B; \hat{x}(M) = 0\}$ oraz $\|x\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(M); M \in \mathcal{M}\}$ – funkcja $\|\cdot\|_\infty$ jest pseudonormą). Zatem B jest algebrą półprostą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\|\cdot\|_\infty$ jest normą na B (tzn. $\|x\|_\infty = 0$ implikuje, że $x = 0$.) Innymi słowy:
Homomorfizm Gelfanda jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy B jest półprosta.

Lemat 7.19 *Homomorfizm Gelfanda jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x^2\| = \|x\|^2$ dla dowolnego $x \in B$.*

Dowód.
Jeśli $\|x\|^2 = \|x^2\|$, to

$$\|x\| = \|x^2\|^{1/2} = \ldots = \|x^{2^n}\|^{1/2^n},$$

a więc $\|x\| = \|x\|_\infty = \|G(x)\|_{C(\mathcal{M})}$.

W drugą stronę dowód jest oczywisty, gdyż

$$\|G(x^2)\|_{C(\mathcal{M})} = \|G(x)^2\|_{C(\mathcal{M})} = \|G(x)\|^2_{C(\mathcal{M})}.$$

□

Klasą algebr Banacha, dla których homomorfizm Gelfanda jest surjektywną izometrią, jest klasa algebr Banacha z inwolucją. Są to algebry, dla których mamy dodatkowe odwzorowanie $\natural : B \to B$ spełniające następujące warunki: $(x+y)^\natural = x^\natural + y^\natural$, $(\lambda x)^\natural = \overline{\lambda} x^\natural$, $(xy)^\natural = y^\natural x^\natural$, $x^{\natural\natural} = x$, $\|x^\natural \cdot x\| = \|x\|^2$. Oczywistym przykładem takiej algebry jest algebra $C(X)$ funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej X.

Ćwiczenie 7.20 Pokazać, że algebra $B(H)$ z $\natural$-homomorfizmem $A \mapsto A^*$ jest algebrą Banacha z inwolucją.

Okazuje się, że algebry postaci $C(X)$ wyczerpują całą klasę przemiennych algebr Banacha. Mówi o tym poniższe twierdzenie Gelfanda-Najmarka.

Twierdzenie 7.21 *Jeśli B jest przemienną algebrą Banacha z inwolucją, to homomorfizm Gelfanda jest $\natural$-izometrią algebry B na $C(\mathcal{M})$.*

Dowód.
Dla dowolnego $x \in B$ mamy

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^\natural x^2\| = \|(x^\natural)^2 x^2\| =$$

$$= \|(xx^\natural)^\natural (xx^\natural)\| = \|xx^\natural\|^2 = \|x\|^4.$$

Z lematu 7.19 wynika więc, że homomorfizm Gelfanda jest izometrią. Zauważmy, że jeśli $M_1 \neq M_2$ należą do przestrzeni reprezentacyjnej algebry B, to istnieje $x \in B$ (np. $x \in M_1 \triangle M_2$) taki, że $\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$), a więc obraz homomorfizmu Gelfanda jest rodziną funkcji ciągłych rozdzielających punkty. Ponieważ jedynka algebry B przechodzi na funkcję stałą równą 1, podalgebra $G(B) \subset C(\mathcal{M})$ zawiera wszystkie funkcje stałe.

Pokażemy, że

$$(x^\natural)\hat{\ }(M) = \overline{\hat{x}(M)}. \tag{7.10}$$

Załóżmy najpierw, że $x = x^\natural$ i przypuśćmy, że dla pewnego $M \in \mathcal{M}$, $\hat{x}(M) = \alpha + i\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Dla dowolnej liczby rzeczywistej r mamy

$$\alpha^2 + (r+\beta)^2 = |(x + ir \cdot e)\hat{\ }(M)|^2 \leqslant \|x + ir \cdot e\|^2 = \|(x + ir \cdot e)^\natural (x + ir \cdot e)\| =$$

$$= \|(x - ir \cdot e)(x + ir \cdot e)\| = \|x^2 + r^2 \cdot e\| \leqslant \|x^2\| + r^2 \leqslant \alpha^2 + r^2,$$

co, ze względu na dowolność liczby r, implikuje, że $\beta = 0$.

Weźmy $x \in B$ i połóżmy $u = x + x^\natural$, $v = i(x - x^\natural)$. Mamy $x = \frac{1}{2}(u + iv$, przy czym $u = u^\natural$, $v = v^\natural$ i łatwo pokazujemy prawdziwość (7.10).

Ponieważ $\overline{G(B)} = G(B)$ (G jest izometrią), więc z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa wynika, że $G(B) = C(\mathcal{M})$, co kończy dowód twierdzenia Gelfanda-Najmarka. $\square$

Niech $\mathbf{A}$ będzie lokalnie zwartą grupą abelową z miarą Haara $\lambda_{\mathbf{A}}$. Rozpatrzmy teraz algebrę Banacha $B = L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$. Niech $h : L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}}) \to \mathbf{C}$ będzie niezerowym homomorfizmem multyplikatywnym o normie 1. Ponieważ $(L^1)^*$ ma naturalną identyfikację z L^∞, więc istnieje $\varphi \in L^\infty(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$ taka, że $\|\varphi\|_{L^\infty} = 1$ oraz

$$h(f) = \int_{\mathbf{A}} f\varphi \, d\lambda_{\mathbf{A}}. \tag{7.11}$$

Dla dowolnych $f, g \in L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$ mamy

$$\int_{\mathbf{A}} (h(f)\varphi(a))g(a)\, da = h(f)h(g) = h(f * g) = \int_{\mathbf{A}} (f * g)\varphi \, d\lambda_{\mathbf{A}} =$$

$$= \int_{\mathbf{A}} g(b) \left(\int_{\mathbf{A}} f(a-b)\varphi(a)\, da \right) db.$$

Wynika stąd, że

$$h(f)\varphi(b) = \int_{\mathbf{A}} f(a-b)\varphi(a)\, da = h(f_b) \tag{7.12}$$

dla $\lambda_{\mathbf{A}}$-p.w. $b \in \mathbf{A}$. Możemy oczywiście zakładać, że $h(f) \neq 0$. Ponieważ funkcja $b \mapsto f_b$ jest ciągła, więc prawa strona równości w (7.12) jest ciągła, a więc bez straty ogólności możemy zakładać, że funkcja φ jest ciągła i wówczas równość w (7.12) zachodzi dla wszystkich $b \in \mathbf{A}$. W szczególności, $\varphi(0) = 1$. Mamy

$$h(f)\varphi(a+b) = h(f_{a+b}) = h((f_a)_b) = h(f_a)\varphi(b) = h(f)\varphi(a)\varphi(b),$$

a więc dla dowolnych $a, b \in \mathbf{A}$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Ponadto $\varphi(a)^{-1} = \varphi(-a)$, więc $|\varphi(a)| = 1$ (bo $|\varphi(c)| \leqslant 1$ dla wszystkich $c \in \mathbf{A}$). Pokazaliśmy zatem następujący fakt:
Jedynymi homomorfizmami multyplikatywnymi algebry $L^1(\mathbf{A}, \lambda_{\mathbf{A}})$ są homomorfizmy postaci: $f \mapsto \widehat{f}(\gamma)$ dla pewnego charakteru $\gamma \in \widehat{\mathbf{A}}$.

Wydaje się zatem, że przestrzeń reprezentacyjna może być w sposób naturalny identyfikowana z $\widehat{\mathbf{A}}$. Jednakże, ze względu na topologię (która musi odpowiadać $*$-słabej topologii), a także brak jedynki w algebrze $L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$, $\widehat{\mathbf{A}}$ rozpatrujemy jako podzbiór funkcji mierzalnych określonych na $\mathbf{A}$ o wartościach w dysku jednostkowym, a rozpatrywana topologia jest „słabą” topologią : $f_n \to f$, gdy dla dowolnej funkcji $F \in L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$ mamy

$$\int_{\mathbf{A}} f_n F\,d\lambda_{\mathbf{A}} \to \int_{\mathbf{A}} fF\,d\lambda_{\mathbf{A}},$$

tzn. obcinamy L^1-topologię na $(L^\infty)^*$ do podzbioru funkcji o wartościach w dysku jednostkowym (innymi słowy jest to obcięcie $*$-słabej topologii do tego podzbioru). Ze względu na brak jedynki w algebrze $L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$ musimy teraz dorzucić do charakterów również funkcję stałą równą zeru (otrzymując podzbiór domknięty) we wprowadzonej przed chwilą topologii i dopiero ten podzbiór jest przestrzenią reprezentacyjną dla $L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$. Innymi słowy grupa (lokalnie zwarta) $\widehat{\mathbf{A}}$ została uzwarcona jednym punktem i przestrzeń funkcji ciągłych na przestrzeni reprezentacyjnej może być identyfikowana z $C_0(\widehat{\mathbf{A}})$. Przy tej identyfikacji homomorfizm Gelfanda jest po prostu odwzorowaniem Fouriera: $G : L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}}) \to C_0(\widehat{\mathbf{A}})$, $G(f)(\gamma) = \widehat{f}(\gamma)$. Wynika stąd w szczególności, że dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbf{A},\lambda_{\mathbf{A}})$ możemy obliczyć jej promień spektralny $\|f\|_\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^{*n}\|_{L^1}} = \|f\|_\infty = \|\widehat{f}\|_{C_0(\widehat{\mathbf{A}})}. \tag{7.13}$$

7.5 Operatory liniowe i ciągłe na przestrzeni Hilberta

Załóżmy teraz, że H jest przestrzenią Hilberta. Wówczas każda ciągła forma półtoraliniowa $\phi : H \times H \to \mathbf{C}$ jest postaci

$$\phi(x,y) = \langle Ux, y\rangle = \langle x, Vy\rangle$$

dla pewnych operatorów $U, V \in B(H)$. Ponadto, $\|\phi\| = \|U\| = \|V\|$. Istotnie, ustalmy $y \in H$. Wówczas ze względu na twierdzenie Riesza-Frechéta istnieje jedyny element $Vy \in H$ taki, że

$$\phi(x,y) = \langle x, Vy\rangle \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in H,$$

a ponadto $\|\phi(\cdot,y)\| = \|\langle\cdot, Vy\rangle\| = \|Vy\|$. Ale

$$\|Vy\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, Vy\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\phi(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\phi\|\,\|x\|\,\|y\| = \|\phi\|\,\|y\|,$$

więc $\|V\| \leqslant \|\phi\|$. Mamy

$$\|\phi\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} |\phi(x,y)| = \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} |\langle x, Vy\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \|x\|\,\|Vy\| = \|V\|.$$

Jeśli $U \in B(H)$, to kładąc $\phi(x,y) = \langle Ux, y\rangle$, otrzymujemy ciągłą formę półtoraliniową, więc musi istnieć $U^* \in B(H)$ taki, że $\|U\| = \|U^*\|$ oraz $\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^*y\rangle$ dla dowolnych $x, y \in H$. Operator U^* nazywamy operatorem *sprzężonym* do operatora U. Łatwo sprawdzamy, że

- $U^{**} = U$.
- $(U_1 \circ U_2)^* = U_2^* \circ U_1^*$.
- U jest *samosprzężony*, tzn. $U^* = U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Ux, x\rangle \in \mathbf{R}$ dla dowolnego $x \in H$. (W dowodzie należy użyć wzoru polaryzacyjnego

  $$4\phi(x,y) = \phi(x+y) - \phi(x-y) + i\phi(x+iy) - i\phi(x-iy),$$

  gdzie $\phi(z) = \phi(z,z)$.)
- U jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy $U^* = U^{-1}$.

Operator $V \in B(H)$ nazywamy *normalnym*, gdy $VV^* = V^*V$. Każdy operator samosprzężony, czy unitarny jest oczywiście operatorem normalnym. Dla operatorów normalnych zachodzą następujące elementarne własności:

- V jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy

  (7.14) $$\|Vx\| = \|V^*x\| \text{ dla dowolnego } x \in H.$$

  Rzeczywiście, zauważmy, że $\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle$, podczas gdy $\|V^*x\|^2 = \langle VV^*x, x\rangle$, a ponadto $\langle (V^*V - VV^*)x, x\rangle = 0$ dla dowolnego $x \in H$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V^*V - VV^* = 0$ ze względu na wzór polaryzacyjny.

- Jeśli V jest normalny oraz $Vx = \alpha x$, to $V^* x = \overline{\alpha} x$.

  Istotnie, sprawdzamy, że $(V - \alpha Id)^* = V^* - \overline{\alpha} Id$. A więc $V - \alpha Id$ jest też operatorem normalnym. (Z (7.14) wynika, że jeśli W jest normalny oraz $Wy = 0$, to i $W^* y = 0$, co stosujemy do $W = V - \alpha Id$ oraz wektora własnego x.)

- Jeśli V jest normalny oraz α, β są dwoma różnymi wartościami własnymi operatora V, to wektory własne im odpowiadające są prostopadłe.

  Istotnie, jeśli $Vx = \alpha x$, $Vy = \beta y$, to

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle Vx, y\rangle = \langle x, V^* y\rangle = \langle x, \overline{\beta} y\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

- Jeśli V jest normalny, to $\|V\| = \sup\{|\lambda| \in \sigma(V)\} = \|V\|_\infty$.

  Istotnie, wystarczy pokazać, że dla operatora normalnego V mamy

$$\|V^n\| = \|V\|^n. \tag{7.15}$$

  Dla udowodnienia (7.15) wystarczy pokazać, że $\|V^n x\| \geqslant \|Vx\|^n$ dla dowolnego elementu x o normie 1 (rzeczywiście, wówczas $\sup_{\|x\|=1} \|V^n x\| \geqslant \sup_{\|x\|=1} \|Vx\|^n$ i to drugie supremum jest równe $(\sup_{\|x\|=1} \|Vx\|)^n = \|V\|^n$, skąd wynika, że $\|V^n\| \geqslant \|V\|^n$). Załóżmy, że $Vx \neq 0$. Ponieważ

$$\|V^2 x\|^2 = \langle V^*(V^2 x), Vx\rangle = \langle VV^*Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, V^*Vx\rangle = \|V^*Vx\|^2,$$

  wiec $\|V^2 x\| = \|V^*Vx\| \geqslant \langle V^*Vx, x\rangle = \|Vx\|^2$, więc z założenia indukcyjnego

$$\|V^{k+1}x\| = \|Vx\| \,\|\|V^k(\frac{Vx}{\|Vx\|})\| \geqslant \|Vx\| \,\|V(\frac{Vx}{\|Vx\|})\|^k =$$

$$= \|Vx\|^{1-k}\|V^2 x\|\|^k \geqslant \|Vx\|^{1-k}(\|Vx\|^2)^k = \|Vx\|^{k+1}.$$

- Jeśli V jest normalny oraz $p = p(t)$ jest wielomianem trygonometrycznym, to

$$\|p(V)\| = \{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(p(V))\}.$$

  Istotnie, $p(V)$ jest operatorem normalnym.

Niech $U \in B(H)$. Oznaczmy

$$\Pi(U) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \|x\| = 1) \quad \|Ux - \lambda x\| < \varepsilon\}.$$

Zbiór $\Pi(U)$ nazywamy zbiorem *aproksymatywnych wartości własnych* operatora U. Wówczas:

- $\Pi(U) \subset \sigma(U)$.

  Istotnie, jeśli $\lambda \notin \sigma(U)$, to $U - \lambda Id$ jest odwracalny oraz

  $$\|x\| = \|(U - \lambda Id)^{-1}(U - \lambda Id)x\| \leqslant \|(U - \lambda Id)^{-1}\| \, \|Ux - \lambda x\|$$

  dla dowolnego $x \in H$. Stąd dla dowolnego $x \in H$ mamy $\|Ux - \lambda x\| \geqslant \varepsilon_0 \|x\|$, gdzie $\varepsilon_0 = \frac{1}{\|(U - \lambda Id)^{-1}\|}$ i dlatego $x \notin \Pi(U)$.

- Jeśli U jest normalny, to $\sigma(U) = \Pi(U)$.

  Istotnie, przypuśćmy, że $\lambda \notin \Pi(U)$, więc istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

  $$(*) \qquad \|Uy - \lambda y\| \geqslant \varepsilon \|y\|$$

  dla wszystkich $y \in H$. Ale $U - \lambda Id$ jest normalny, więc (również z (7.14))

  $$\|U^* y - \overline{\lambda} y\| = \|Uy - \lambda y\| \geqslant \varepsilon \|y\|$$

  dla wszystkich $y \in H$. W szczególności oznacza to, że $U^* - \overline{\lambda} Id$ jest operatorem różnowartościowym. Stąd natychmiast wynika, że obraz jego sprzężonego jest gęsty (jeśli $\langle Wy, z\rangle = 0$ dla dowolnego $y \in H$, to $\langle y, W^* z\rangle = 0$ dla dowolnego $y \in H$, a więc $W^* z = 0$). To oznacza, że obraz operatora $U - \lambda Id$ jest podprzestrzenią gęstą, gdy tymczasem nierówność $(*)$ implikuje, że obraz jest domknięty (jeśli ciąg $(Uy_n - \lambda y_n)$ jest Cauchy'ego, to również ciąg (y_n) jest ciągiem Cauchy'ego). Ponieważ na mocy $(*)$ operator $U - \lambda Id$ jest również różnowartościowy, więc $U - \lambda Id$ jest odwracalny i dlatego $\lambda \notin \sigma(U)$.

Uwaga 7.22 Jeśli B jest przestrzenią Banacha oraz $U \in Iso(B)$ jest izometrią odwracalną, to

$$\sigma(U) \subset \mathbf{T}.$$

Istotnie, jeśli $|\lambda| < 1$, to szereg $V = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^{-(n+1)}$ jest dobrze zdefiniowany ($\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$). Ponadto,

$$(U - \lambda Id) \circ V = UV - \lambda V = Id.$$

Stąd, $\{\lambda \in \mathbf{C};\ |\lambda| < 1\} \subset \rho(U)$ i ponieważ $\|U\| = 1$, więc teza została udowodniona.

Uwagi bibliograficzne Rozdział wstępny 1 podaje najważniejsze informacje dotyczące miar. Skorzystano tu ze znanych opracowań: podrozdział 1.1 [25], w podrozdziale 1.2 skorzystano z [23] i [26] (dowód twierdzenia 1.11 pochodzi z [26]), podrozdział 1.3 również podaje standardowe informacje (patrz [3], [10], [13], rozwiązanie ćwiczenia 1.17 pochodzi z [27]).

Rozdział 2 został napisany w duchu prezentacji w [21] (w szczególności dowody twierdzeń 2.3 oraz 2.6 pochodzą z [21]), niemniej sam dowód twierdzenia spektralnego 2.30 pochodzi z oryginalnego artykułu Plesnera-Rochlina z 1946 r. [22]. Patrz również [19] (pewne informacje w podrozdziale 2.2). W podrozdziale 2.4 wykorzystałem częściowo artykuł [8]. Lemat 2.72 pochodzi od A.M. Stepina. Twierdzenie 2.75 udowodnił D. Newton [18]. Podrozdział 2.6 pochodzi w całości z pracy [6].

Informacje o produktach tensorowych przestrzeni Hilberta rozdziale 3 są standardowe (patrz [17], [3]); przedstawienie krotności spektralnej produktu tensorowego jako mocy zbiorów atomów miar warunkowych, patrz [13] oraz [3]. Twierdzenie 3.22 patrz [3]. Podrozdziały 3.4 oraz 3.5 zostały napisane w oparciu o niedawny artykuł Kułagi-Parreau [14], z tym, że twierdzenie 3.30 pochodzi niedawnego artykułu [20]. Uogólnienie twierdzenia 3.30 można znaleźć w [14]:

Twierdzenie 7.23 *Załóżmy, że $\sigma \in M^+(\mathbf{T})$ jest ciągła. Jeśli $V_\sigma^{\odot mk}$ ma proste widmo, to $\sigma^{*k} \perp \sigma_1 * \ldots * \sigma_n$ dla wszystkich $n \geqslant 1$ takich, że $(m!)^n > \frac{(mk)!}{(k!)^n}$ i dowolnych miar ciągłych $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.*

Wniosek 7.24 *Jeśli $F_{sym}(V_\sigma)$ ma proste widmo, to $\sigma^{*k} \perp \sigma_1 * \ldots * \sigma_n$ dla dowolnego $n > k$ oraz dowolnych miar ciągłych $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.*

Klasyczne twierdzenie 3.35 patrz [3].

Wiadomości dotyczące grup charakterów w rozdziale 4 można znaleźć np. w [23]. Dowód twierdzenia 4.5 również pochodzi z [23]. Idea symetrii grupowych dla realizacji krotności spektralnych z rozdziału 4.3 pochodzi z artykułu [1]. Niemniej podrozdział 4.3 został napisany na podstawie [4].

Twierdzenie 5.1 pochodzi z [2] (patrz również [5]). Zaprezentowany dowód pochodzi z preprintu [16].

Pewne idee w opisie spektralnym reprezentacji indukowanych zawarte w rozdziale 6 pochodzą z artykułu [9].

Dowód twierdzenia 7.4 pochodzi z [7]. Podrozdział 7.2 patrz np. [28]. Twierdzenie 7.11 pochodzi z [15]. Podrozdział 7.4 patrz np. [24] i [23]. Wiadomości zawarte w podrozdziale 7.5 są standardowe.

Literatura

[1] O.N. Ageev, *The homogeneous spectrum problem in ergodic theory*, Invent. Math. **160** (2005), 417–446.

[2] V.M. Alexeyev, *Existence of bounded function of the maximal spectral type*, Vestnik Mosc. Univ. **5** (1958), 13-15 and Erg. Th. Dyn. Syst. **2** (1982), 259-261.

[3] I.P. Cornfeld, S.W. Fomin, Ya.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag 1982.

[4] A. Danilenko, *Explicit solution of Rokhlin's problem on homogeneous spectrum and applications*, Ergodic Theory Dynam. Systems **26** (2006), 1467–1490.

[5] K. Frączek, *On a function that realizes the maximal spectral type*, Studia Math. **124** (1997), 1–7.

[6] K. Frączek, *Cyclic space isomorphism of unitary operators*, Studia Math. **124** (1997), 259-267.

[7] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.

[8] M. Guenais, *Une majoration de la multiplicité spectrale d'opérateurs associés à des cocycles réguliers*, Israel J. Math. **105** (1998), 263-284.

[9] J. Hawkins, E.A. Robinson, *Approximately transitive(2) flows and transformations have simple spectrum*, Lecture Notes in Math. **1342** (1988), 261-280.

[10] H. Helson, *Harmonic Analysis*, 2nd edition, Hindustan Book Agency and Helson Publishing Co., 1995.

[11] A.B. Katok, *Constructions in Ergodic Theory*, unpublished lecture notes.

[12] A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Spectral Properties and Combinatorial Constructions in Ergodic Theory*, Handbook of dynamical systems. Vol. 1B, 649–743, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[13] Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Dover Publications, INC. New York, 1976.

[14] J. Kułaga, F. Parreau, in preparation.

[15] K. Kunugui, *Sur un problème de M.E. Szpilrajn*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **16** (1940), 70-108.

[16] M. Lemańczyk, M. Wasieczko, *A new proof of Alexeyev's Theorem*, preprint (2007); http://www-users.mat.umk.pl/ mlem.

[17] J. Neveu, *Processus Aléatoires Gaussiens*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[18] D. Newton, *Coalescence and spectrum of automorphisms of a Lebesgue space*, Z. Wahr. verw. Geb. **19** (1971), 117-122.

[19] M. Quéffelec, *Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math. **1294**, Springer-Verlag 1988.

[20] F. Parreau, E. Roy, *Poissson suspensions with a minimal set od self-joinings*, preprint 2007.

[21] W. Parry, *Topics in Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1981.

[22] A.I. Plesner, W.A. Rokhlin, *Spectral theory of linear operators*, Usp. Mat. Nauk I (1946), 41-191 (in Russian).

[23] W. Rudin, *Forier Analysis on Groups*, Wiley Classics Library, 1962.

[24] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[25] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN 1986.

[26] S.M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Graduate Texts in Mathematics **180**, Springer, 1998.

[27] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag 1982.

[28] R.J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Birkhauser, 1984.