Projekt pn. „*Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych*”
realizowany w ramach Poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Analiza funkcjonalna

Wykłady

Mariusz Lemańczyk

Toruń 2011

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

WSTĘP

Niniejszy skrypt jest zapisem semestralnego wykładu z analizy funkcjonalnej prowadzonego przeze mnie na Wydziale Matematyki i Informatyki UMK dla studentów kierunku Matematyka. Skrypt jest podzielony na piętnaście części (wykładów) odpowiadających dwugodzinnym zajęciom, co nie zawsze odpowiada tematycznemu podziałowi na poszczególne zagadnienia. Na końcu dołączony został przykładowy test egzaminacyjny.

WYKŁAD I

Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (lub ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$). Jednocześnie niech X będzie przestrzenią metryczną z metryką d.

Definicja. Metrykę d nazywamy *przesuwalną*, jeżeli dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi warunek

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

Uwaga. Jeżeli d jest metryką przesuwalną, to odwzorowanie $T_x(y) = x + y$ jest homeomorfizmem.

Rzeczywiście, niech $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} d(T_x(y_n), T_x(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x+y_n, x+y) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0.$$

Ponadto odwzorowanie $(T_x)^{-1} = T_{-x}$ też jest ciągłe.

Uwaga. Jeżeli d jest metryką przesuwalną, to odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ określone wzorem $\|x\| = d(x, 0)$ ma dla dowolnych $x, y \in X$ następujące własności:

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\|x\| = \|-x\|$,

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Warunek (1) jest oczywisty. Warunek (2) wynika z równości

$$d(-x, 0) = d(-x+x, 0+x) = d(0, x) = d(x, 0).$$

Natomiast warunek (3) zachodzi, gdyż

$$d(x+y, 0) = d(x, -y) \leqslant d(x, 0) + d(0, -y) = d(x, 0) + d(y, 0).$$

Definicja. Każde odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ spełniające własności (1)–(3) nazywamy F-*normą*.

Uwaga. Jeśli odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ jest F-normą, to wzór

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

definiuje metrykę przesuwalną na X, która indukuje F-normę równą wyjściowej F-normie $\|\cdot\|$.

Rzeczywiście, z warunku (1) mamy

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Z kolei z (2) wynika, że

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(x - y)\| = d(y, x).$$

Natomiast (3) implikuje

$$d(x, y) = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

dla dowolnych $x, y, z \in X$.

Uwaga. Jeżeli d jest metryką przesuwalną na X, to działanie $+ : X \times X \to X$ jest ciągłe.

Rzeczywiście, jeżeli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, to ponieważ

$$d(x_n + y_n, x + y) \leqslant d(x_n + y_n, x_n + y) + d(x_n + y, x + y) = d(y_n, y) + d(x_n, x),$$

otrzymujemy $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Oczywiście narzuca się w tym momencie pytanie o ciągłość działania mnożenia przez skalar.

Przykład. Niech X będzie przestrzenią liniową z F-normą daną wzorem

$$\|x\| = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = 0, \\ 1, & \text{gdy } x \neq 0. \end{cases}$$

Powyższa F-norma wyznacza metrykę dyskretną. Zauważmy, że dla $x \neq 0$ mamy $\|\frac{1}{n}x\| = 1$. Stąd ciąg $\left(\frac{1}{n}x\right)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do 0. Zatem w tym przykładzie działanie mnożenia przez skalar nie jest ciągłe.

Definicja. Przestrzeń X nazywamy *liniowo-metryczną*, gdy odwzorowania

$$+ : X \times X \to X, \quad \cdot : \mathbb{C} \times X \to X \quad (\cdot : \mathbb{R} \times X \to X)$$

są ciągłe.

Uwaga. Jeżeli przestrzeń X jest liniowo-metryczna, to dla $s \neq 0$, $s \in \mathbb{C}$, odwzorowanie

$$M_s : X \to X, \quad M_s x = s \cdot x$$

jest homeomorfizmem.

Definicja. F-normę $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *normą*, gdy

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ i $x \in X$. Jeśli metryka d na X jest zadana przez normę, to przestrzeń X nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Uwaga. Każda przestrzeń unormowana jest przestrzenią liniowo-metryczną.

Sprawdźmy, że zachodzi ciągłość mnożenia przez skalar. Niech $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wówczas

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| \to 0.$$

Definicja. *Przestrzenią unitarną* (nad $\mathbb{C}$) nazywamy przestrzeń liniową X z zadanym na niej iloczynem skalarnym, tzn. odwzorowaniem $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ spełniającym dla dowolnych $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ warunki:

(a) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ oraz $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(b) $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$,

(c) $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\beta_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, y_2 \rangle$.

Uwaga. W przestrzeni unitarnej X dla dowolnych $x, y \in X$ mamy

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

Istotnie, niech $\langle x, y \rangle = a + ib$, $\langle y, x \rangle = a' + ib'$. Wówczas

$$0 \leqslant \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \in \mathbb{R}.$$

Stąd $a + ib + a' + ib' \in \mathbb{R}$, czyli $b = -b'$. Ponadto

$$0 \leqslant \langle x + iy, x + iy \rangle = \langle x, x \rangle - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle + \langle iy, iy \rangle \in \mathbb{R}.$$

Stąd $-i(a + ib) + i(a' + ib') = b - b' + i(-a + a') \in \mathbb{R}$, czyli $a = a'$.

Weźmy teraz $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$0 \leqslant \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Otrzymaliśmy wielomian zmiennej t o współczynnikach rzeczywistych, który przyjmuje jedynie wartości nieujemne, więc

$$\Delta = 4(\operatorname{Re}\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant 0.$$

Zatem dla dowolnych $x, y \in X$

$$(\mathrm{Re}\langle x, y\rangle)^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Załóżmy, że $\langle x, y\rangle \neq 0$. Jeśli w ostatniej nierówności podstawimy za y wektor $\frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}y$, to

$$\left(\mathrm{Re}\left\langle x, \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}y\right\rangle\right)^2 \leqslant \langle x, x\rangle \left\langle \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}y, \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}y \right\rangle.$$

Stąd

$$\left(\mathrm{Re}\,\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{|\langle x, y\rangle|}\langle x, y\rangle\right)^2 \leqslant \langle x, x\rangle \frac{\langle x, y\rangle}{|\langle x, y\rangle|}\frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{|\langle x, y\rangle|}\langle y, y\rangle.$$

W ten sposób udowodniliśmy nierówność Schwarza

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

dla dowolnych $x, y \in X$. Zdefiniujmy

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Mamy zatem

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Odwzorowanie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ jest normą. Sprawdźmy jedynie, czy zachodzi nierówność trójkąta

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Wniosek. *Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną. W szczególności jest ona przestrzenią liniowo-metryczną.*

Przypomnijmy, że jeśli X jest przestrzenią liniową, to podzbiór $K \subset X$ nazywamy wypukłym, gdy

$$(\forall\, x_1, x_2 \in K)\ \ (\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1)\ \ tx_1 + (1 - t)x_2 \in K.$$

Natomiast podzbiór $B \subset X$ nazywamy *symetrycznym*, gdy z warunku $x \in B$ wynika, że $-x \in B$.

Załóżmy, że X jest przestrzenią liniowo-metryczną.

Definicja. Podzbiór $A \subset X$ nazywamy *ograniczonym*, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z A i dowolnego ciągu $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb zespolonych (rzeczywistych) z warunku $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$.

Uwaga. Jeśli X jest przestrzenią unormowaną, to zbiór $A \subset X$ jest ograniczony (w sensie liniowo-metrycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\exists\, M \geqslant 0)\ \ (\forall\, x \in A)\ \ \|x\| \leqslant M.$$

Implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista. Z drugiej strony załóżmy, że istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów zbioru A taki, że $\|x_n\| \geqslant n^2$. Weźmy $\lambda_n = \frac{1}{n}$. Wtedy nie jest prawdą, że granica ciągu $(\lambda_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest równa zero.

Uwaga. Nich X będzie przestrzenią liniowo-metryczną, $x \in X$, $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Wówczas zbiór

$$A = \{t_n x;\ n \geqslant 1\}$$

nie jest ograniczony. W szczególności półproste nie są zbiorami ograniczonymi.

Istotnie, biorąc $\lambda_n = \frac{1}{t_n}$, mamy $\lambda_n(t_n x) = x \nrightarrow 0$.

Przykład. W przestrzeni unormowanej X kula jednostkowa $\{x \in X;\ \|x\| < 1\}$ jest zbiorem otwartym, wypukłym, symetrycznym i ograniczonym.

Definicja. Mówimy, że dwie metryki d, ρ na zbiorze X są równoważne, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z X, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ względem metryki d wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ względem metryki ρ.

Twierdzenie Kołmogorowa. *Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną nad $\mathbb{R}$ z metryką przesuwalną d. Załóżmy, że $U \ni 0$ jest zbiorem otwartym, wypukłym, symetrycznym i ograniczonym. Wówczas na X można określić normę $\|\cdot\|$ spełniającą*

(i) $U = \{x \in X;\ \|x\| < 1\}$,

(ii) *metryka ρ wyznaczona przez normę $\|\cdot\|$ jest równoważna metryce d.*

Dowód. Niech $\|\cdot\|$ będzie funkcjonałem Minkowskiego zbioru U, tzn.

$$\|x\| = \inf\left\{t > 0;\ \frac{x}{t} \in U\right\}.$$

Pokażemy, że mamy do czynienia z normą.

1° Sprawdźmy poprawność definicji. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot x = 0 \cdot x = 0 \in U,$$

więc wykorzystując otwartość zbioru U otrzymujemy $\{t > 0;\ \frac{x}{t} \in U\} \neq \emptyset$.

2° Jeżeli $x = 0$, to $\|x\| = 0$, bo $0 \in U$. Załóżmy, że $x \neq 0$ oraz $\|x\| = 0$. Wówczas istnieje ciąg liczb dodatnich $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżny do 0 i taki, że $\frac{x}{t_n} \in U$. Zatem dzięki wypukłości zbioru U, cała półprosta $\{tx;\ t \geqslant 0\}$ jest zawarta w zbiorze U. Stąd U nie jest zbiorem ograniczonym i otrzymujemy sprzeczność.

3° Załóżmy, że $\lambda > 0$. Wówczas

$$\|\lambda x\| = \inf\left\{t > 0;\ \frac{\lambda x}{t} \in U\right\} = \lambda \cdot \inf\left\{\frac{t}{\lambda} > 0;\ \frac{\lambda x}{t} \in U\right\} = \lambda \cdot \inf\left\{\frac{t}{\lambda} > 0;\ \frac{x}{t/\lambda} \in U\right\} =$$
$$= \lambda \cdot \inf\left\{s > 0;\ \frac{x}{s} \in U\right\} = \lambda\|x\|.$$

Niech teraz $\lambda < 0$. Ponieważ U jest zbiorem symetrycznym, więc $\frac{\lambda x}{t} \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{-\lambda x}{t} \in U$. Stąd

$$\|\lambda x\| = \|-\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

4° Niech $x, y \neq 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Z określenia $\|\cdot\|$ wynika, że istnieje $0 \leqslant \delta < \varepsilon$ taka, że

$$\frac{x}{\|x\|/(1-\delta)} \in U.$$

Wówczas

$$(1-\varepsilon)\frac{x}{\|x\|} = \frac{1-\varepsilon}{1-\delta} \cdot \frac{x}{\|x\|/(1-\delta)} + \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\delta}\right) \cdot 0 \in U.$$

Podobnie $(1-\varepsilon)\frac{y}{\|y\|} \in U$. Zatem

$$(1-\varepsilon)\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|} = (1-\varepsilon)\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} + (1-\varepsilon)\frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \in U.$$

Stąd

$$\|x+y\| \leqslant \frac{\|x\|+\|y\|}{1-\varepsilon}$$

i wobec dowolności $\varepsilon > 0$ mamy

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Sprawdźmy, że warunki (i), (ii) są spełnione.

5° Załóżmy, że $\|x\| < 1$. Wówczas istnieje liczba $0 < t < 1$ taka, że $\frac{x}{t} \in U$. Zatem

$$x = t \cdot \frac{x}{t} + (1-t) \cdot 0 \in U.$$

Odwrotnie, niech $x \in U$. Ponieważ $\frac{x}{1} = x \in U$, więc $\|x\| \leqslant 1$. Z otwartości zbioru U i ciągłości mnożenia przez skalar wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $(1+\delta) \cdot x \in U$. Stąd $\|(1+\delta) \cdot x\| \leqslant 1$. Zatem

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{1+\delta} < 1.$$

W ten sposób udowodniliśmy, że zachodzi warunek (i).

6° Niech $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Mamy pokazać, że metryki ρ i d są równoważne. Skoro obie są przesuwalne, to wystarczy pokazać, że

$$\|x_n\| \to 0 \Leftrightarrow d(x_n, 0) \to 0$$

dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z X.

$\Rightarrow$: Jeśli $\|x_n\| \to 0$, to $2\|x_n\| \to 0$. Z warunku (i) wynika, że $\frac{x_n}{2\|x_n\|} \in U$. Zatem wykorzystując ograniczoność zbioru U (dla metryki przesuwalnej d),

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2\|x_n\| \cdot \frac{x_n}{2\|x_n\|} = 0$$

względem metryki d.

$\Leftarrow$: Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy zbiór εU jest otwarty w metryce d. Zatem jeśli $d(x_n, 0) \to 0$, to $x_n \in \varepsilon U$ dla dostatecznie dużych n, a więc $\|x_n\| < \varepsilon$ z określenia $\|\cdot\|$.

□

WYKŁAD II

Przejdziemy do przypadku zespolonego twierdzenia Kołmogorowa. Niech $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ będą normami na przestrzeni liniowej X.

Definicja. Normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ są *równoważne*, gdy metryki przez nie wyznaczone są równoważne.

Lemat. *Normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\exists\, A, B > 0) \ \ (\forall\, x \in X, x \neq 0) \ \ A \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant B.$$

Dowód. Implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista. Z drugiej strony załóżmy, że normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ są równoważne i

$$(\forall\, B > 0) \ \ (\exists\, x \in X, x \neq 0) \ \ \|x\| > B\|x\|'.$$

Stąd istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ niezerowych elementów przestrzeni X taki, że $\|x_n\| > n^2\|x_n\|'$ dla $n \geqslant 1$. Połóżmy

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot x_n \cdot \frac{1}{\|x_n\|'}.$$

Mamy $\lim_{n\to\infty} \|y_n\|' = 0$ oraz

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \cdot \|x_n\| \cdot \frac{1}{\|x_n\|'} > \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

Zatem otrzymujemy sprzeczność. □

Uwaga. Powyższy lemat zachodzi w obu przypadkach: rzeczywistym i zespolonym.

Załóżmy, że (X, d) spełnia założenia twierdzenia Kołmogorowa z tą różnicą, że X jest przestrzenią nad $\mathbb{C}$. Wówczas, rozpatrując X jako przestrzeń nad $\mathbb{R}$, d jest równoważna metryce wyznaczonej przez pewną normę „rzeczywistą” $\|\cdot\|'$. Zauważmy, że

$$\sup_{x\in X, x\neq 0} \ \sup_{|\lambda|=1} \frac{\|\lambda x\|'}{\|x\|'} < +\infty. \tag{1}$$

Istotnie, gdyby tak nie było, to istniałyby ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $|\lambda_n| = 1$ takie, że $\|\lambda_n x_n\|' > n\|x_n\|'$. Niech

$$y_n = \frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|'}$$

dla $n \geqslant 1$. W dowodzie części rzeczywistej twierdzenia Kołmogorowa pokazaliśmy, że $\frac{x_n}{2\|x_n\|'} \in U$. Ponieważ zbiór U jest ograniczony w metryce d oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda_n}{n} = 0$, więc $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ w metryce d, jak również w $\|\cdot\|'$. Z drugiej strony

$$\|y_n\|' = \left\|\frac{\lambda_n}{n} \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|'}\right\|' = \frac{1}{n\|x_n\|'} \cdot \|\lambda_n x_n\|' > 1$$

i otrzymujemy sprzeczność.

Połóżmy

$$\|x\| = \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda x\|'.$$

Z wcześniejszych rozważań $\|\cdot\|$ osiąga tylko skończone wartości. Sprawdźmy, że $\|\cdot\|$ jest normą na przestrzeni zespolonej X.

1° Jeżeli $\|x\| = 0$, to $\|1 \cdot x\|' = 0$, a więc $x = 0$.

2° Niech $\mu \in \mathbb{C}$. Mamy

$$\{|\mu|\lambda x;\ |\lambda| = 1\} = \{\lambda\mu x;\ |\lambda| = 1\}$$

(gdy $\mu \neq 0$, to $|\mu|\lambda x = \left(\frac{|\mu|}{\mu}\lambda\right)\mu x$ i $|\frac{|\mu|}{\mu}| = 1$). Zatem

$$\|\mu x\| = \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda\mu x\|' = \sup_{|\lambda|=1} \||\mu|\lambda x\|' = \sup_{|\lambda|=1} |\mu|\|\lambda x\|' = |\mu| \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda x\|' = |\mu|\|x\|.$$

3° Zauważmy, że

$$\|x+y\| = \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda(x+y)\|' \leqslant \sup_{|\lambda|=1} (\|\lambda x\|' + \|\lambda y\|') = \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda x\|' + \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda y\|' = \|x\| + \|y\|.$$

Normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ są równoważne jako normy rzeczywiste, gdyż bezpośrednio z definicji wynika, że $\|x\| \geqslant \|x\|'$ oraz z (1), istnieje $M > 0$ taka, że $\|x\| \leqslant M\|x\|'$ dla dowolnego $x \in X$.

Wniosek. *Twierdzenie Kołmogorowa jest prawdziwe w wersji zespolonej* (*bez własności* (i)).

Problem. Jak „poprawić” definicję zbioru U w twierdzeniu Kołmogorowa, aby otrzymać również (i)?

Definicja. Przestrzeń liniowo-metryczną z metryką przesuwalną nazywamy *przestrzenią Fréchet'a*, gdy jest ona zupełna.

Przykład. Niech $0 < q < 1$. Rozpatrzmy przestrzeń

$$l^q = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^q < +\infty\}$$

i odwzorowanie na niej dane wzorem

$$\|x\| = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^q.$$

Pokażemy, że $(l^q, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Fréchet'a.

Uwaga. Dla dowolnych $x, y \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$(x+y)^q \leqslant x^q + y^q.$$

Istotnie, przy ustalonym $y \geqslant 0$ rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = (x+y)^q - x^q - y^q.$$

Mamy

$$f'(x) = q(x+y)^{q-1} - qx^{q-1} < 0.$$

Zatem f jest malejąca i ponieważ $f(0) = 0$, więc $f(x) \leqslant 0$ dla dowolnego $x \geqslant 0$.

Powyższa uwaga dowodzi, że l^q jest przestrzenią liniową, a $\|\cdot\|$ definiuje F-normę na l^q. Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń liniowo-metryczną (ciągłość mnożenia wynika z równości $\|\lambda x\| = |\lambda|^q \|x\|$). Pokażemy, że jest ona zupełna.

Niech $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów z l^q, $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots\right)$. Załóżmy, że

$$(\forall\,\varepsilon > 0)\ \ (\exists\, N \in \mathbb{N})\ \ (\forall\, n, m > N)\ \ \left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(\forall\,\varepsilon > 0)\ \ (\exists\, N \in \mathbb{N})\ \ (\forall\, n, m > N)\ \ \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|^q < \varepsilon.$$

Zatem

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right| < \varepsilon^{\frac{1}{q}}$$

i stąd ciąg $\left(x_i^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny dla $i \geqslant 1$. Niech $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$ oraz $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$. Ponieważ

$$\sum_{i=1}^{k} \left|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}\right|^q < \varepsilon, \quad \text{więc} \quad \sum_{i=1}^{k} \left|x_i - x_i^{(n)}\right|^q \leqslant \varepsilon$$

dla dowolnego $k \geqslant 1$. Zatem również

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i - x_i^{(n)}\right|^q \leqslant \varepsilon.$$

Ponadto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i - x_i^{(n)}\right|^q + \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)}\right|^q,$$

gdzie oba szeregi po prawej stronie nierówności są zbieżne. Zatem pokazaliśmy, że $x^{(n)} \to x \in l^q$.

Na koniec pokażemy, że l^q nie przestrzenią normowalną. Załóżmy, że istnieje norma $\|\cdot\|'$, której metryka jest równoważna metryce d zadanej przez F-normę $\|\cdot\|$. Wówczas istnieje otwarty, wypukły, symetryczny i ograniczony w metryce d zbiór U zawierający 0 (U może być, na przykład, otwartą kulą jednostkową względem $\|\cdot\|'$). Ponieważ U jest zbiorem otwartym, więc istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że

$$B(0, \varepsilon) = \{x \in l^q;\ d(x, 0) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Niech

$$x^{(n)} = \Big(0, \dots, 0, \underbrace{\tfrac{\varepsilon^{1/q}}{2}}_{n}, 0, 0, \dots\Big).$$

Zauważmy, że

$$\left\|x^{(n)}\right\| = \frac{\varepsilon}{2^q} < \varepsilon.$$

Zatem $x^{(n)} \in B(0, \varepsilon)$ i z wypukłości zbioru U wynika, że

$$y^{(n)} = \frac{1}{n}\left(x^{(1)} + \dots + x^{(n)}\right) \in U.$$

Ale

$$\left\|y^{(n)}\right\| = \Big\|\Big(\underbrace{\tfrac{\varepsilon^{1/q}}{2n}, \dots, \tfrac{\varepsilon^{1/q}}{2n}}_{n}, 0, 0, \dots\Big)\Big\| = n\frac{\varepsilon}{(2n)^q} = \frac{\varepsilon}{2^q} n^{1-q} \to +\infty.$$

Stąd łatwo znajdziemy ciąg skalarów $a_n \to 0$ taki, aby

$$\left\|a_n y^{(n)}\right\| = |a_n|^q \left\|y^{(n)}\right\| \to +\infty$$

i otrzymamy sprzeczność z tym, że zbiór U jest ograniczony.

Zajmiemy się teraz przestrzeniami ilorazowymi. Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną z metryką przesuwalną d. Załóżmy, że $F \subset X$ jest podprzestrzenią domkniętą i niech X/F będzie przestrzenią ilorazową. Dla $x, y \in X$ definiujemy

$$d_F([x], [y]) = \inf\{d(x', y');\ x' \in [x], y' \in [y]\}.$$

Pokażemy, że d_F jest metryką przesuwalną na X/F.

1° Jeżeli $[x] = [y]$, to oczywiście $d_F([x],[y]) = 0$. Z drugiej strony niech $d_F([x],[y]) = 0$. Wówczas istnieją ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z $[x]$ i $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z $[y]$ takie, że $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Stąd $\lim_{n\to\infty} d(x_n - y_n, 0) = 0$. Ale $x_n - y_n$ należy do zbioru domkniętego $[x-y]$ dla $n \geqslant 1$, więc $0 \in [x-y]$. Zatem $0 = [x-y] = [x] - [y]$, czyli $[x] = [y]$.

2° Warunek symetrii jest oczywisty.

3° Zanim uzasadnimy, że zachodzi nierówność trójkąta, zajmijmy się warunkiem przesuwalności dla d_F. Dla dowolnego $z \in X$, wykorzystując przesuwalność metryki d, mamy

$$d_F([x+z],[y+z]) = \inf_{f,f'\in F} d(x+z+f, y+z+f') = \inf_{f,f'\in F} d(x+f, y+f') = d_F([x],[y]).$$

4° Z 3° wynika, że nierówność trójkąta dla d_F będzie zachodzić, jeżeli

$$d_F([x-y],0) \leqslant d_F([x-z],0) + d_F([z-y],0)$$

dla dowolnych $x, y, z \in X$. Ale powyższy warunek będzie prawdziwy, jeżeli

$$d_F([x]+[y],0) \leqslant d_F([x],0) + d_F([y],0)$$

dla dowolnych $x, y \in X$. Wybierzmy $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [x]$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset [y]$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = d_F([x],0) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, 0) = d_F([y],0).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} d_F([x]+[y],0) &\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} d(x_n+y_n,0) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} (d(x_n,0)+d(y_n,0)) \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} (d(x_n,0)+d(y_n,0)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n,0) + \lim_{n\to\infty} d(y_n,0) = d_F([x],0) + d_F([y],0). \end{aligned}$$

5° Skoro d_F jest metryką przesuwalną, to dodawanie w X/F jest funkcją ciągłą. Zauważmy, że również mnożenie przez skalary jest funkcją ciągłą. Niech $\lambda_n \to \lambda$ w przestrzeni skalarów i $[x_n] \to [x]$ względem d_F. Wówczas istnieją $f_n \in F$ dla $n \geqslant 1$ i $f \in F$ takie, że $x_n + f_n \to x + f$ w przestrzeni X. Stąd

$$\lambda_n(x_n + f_n) \to \lambda(x+f) \quad \text{i} \quad \lambda_n x_n + \lambda_n f_n \to \lambda x + \lambda f.$$

Zatem $[\lambda_n x_n] \to [\lambda x]$, gdyż $\lambda_n f_n, \lambda f \in F$ dla $n \geqslant 1$.

Udowodniliśmy, że $(X/F, d_F)$ jest przestrzenią liniowo-metryczną.

Uwaga. Jeśli dodatkowo (X,d) jest przestrzenią zupełną, to $(X/F, d_F)$ jest przestrzenią zupełną.

Istotnie, zauważmy najpierw, że jeśli

$$d(x,[y]) = \inf\{d(x,y');\ y' \in [y]\},$$

to $d(x,[y]) = d(x',[y])$ dla każdego $x' \in [x]$. Zatem

$$d_F([x],[y]) = d(x,[y]) \tag{2}$$

dla dowolnych $x, y \in X$. Niech teraz $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $(X/F, d_F)$. Wybierzmy podciąg $([x_{n_k}])_{k=1}^{\infty}$ tak, aby

$$d_F([x_{n_k}],[x_{n_{k+1}}]) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Wykorzystując (2) możemy indukcyjnie wybrać elementy $x'_{n_k} \in [x_{n_k}]$ tak, aby

$$d(x'_{n_k}, x'_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Zatem ciąg $(x'_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X, a więc istnieje $x \in X$ taki, że $x'_{n_k} \to x$ i stąd $[x_{n_k}] \to [x]$. Otrzymaliśmy, że ciąg Cauchy'ego zawiera podciąg zbieżny, czyli sam też musi być zbieżny.

Wniosek. *Przestrzeń ilorazowa przestrzeni Frécheta jest przestrzenią Frécheta.*

Ćwiczenie. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, F zaś podprzestrzenią domkniętą w X. Pokazać, że odwzorowanie zdefiniowane wzorem

$$\big\|[x]\big\|_F = \inf\{\|x'\|;\ x' \in [x]\}$$

jest normą na X/F.

WYKŁAD III

Przestrzenie skończenie wymiarowe.

Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną i niech $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Weźmy dowolną bazę liniową przestrzeni X: $e_1, \dots, e_n$. Zauważmy, że jeśli $\big(t_m^{(1)}\big)_{m=1}^{\infty}, \dots, \big(t_m^{(n)}\big)_{m=1}^{\infty}$ są ciągami skalarów oraz

$$\lim_{m\to\infty} t_m^{(i)} = t^{(i)}$$

dla $i = 1, \dots, n$, to z ciągłości działań dodawania i mnożenia przez skalary wynika

$$\lim_{m\to\infty} \left(t_m^{(1)} e_1 + \dots + t_m^{(n)} e_n\right) = t^{(1)} e_1 + \dots + t^{(n)} e_n.$$

Lemat. *Załóżmy, że*

$$\lim_{m\to\infty} \left(t_m^{(1)} e_1 + \dots + t_m^{(n)} e_n\right) = x$$

dla ciągów skalarów $\big(t_m^{(1)}\big)_{m=1}^{\infty}, \dots, \big(t_m^{(n)}\big)_{m=1}^{\infty}$. *Niech* $x = t^{(1)} e_1 + \dots + t^{(n)} e_n$. *Wówczas*

$$\lim_{m\to\infty} t_m^{(i)} = t^{(i)}$$

dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x = 0$ (zamieniając ciągi $\big(t_m^{(i)}\big)_{m=1}^{\infty}$ na ciągi $\big(t_m^{(i)} - t^{(i)}\big)_{m=1}^{\infty}$). Mamy więc pokazać, że $\lim_{m\to\infty} t_m^{(i)} = 0$ dla $i = 1, \dots, n$. Rozważmy dwa przypadki:

1° Niech wszystkie ciągi $\big(t_m^{(i)}\big)_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, n$ będą ograniczone. Załóżmy, że wśród nich istnieje taki, który nie zbiega do zera. Możemy zatem znaleźć podciąg $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ takie, że

$$\lim_{k\to\infty} t_{m_k}^{(i)} = s^{(i)}$$

dla $i = 1, \dots, n$ oraz $s^{(i_0)} \neq 0$ (korzystamy tutaj oczywiście z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wybierając najpierw podciąg, wzdłuż którego mamy zbieżność, ale nie do zera, następnie z niego wybieramy podciąg zbieżny dla $i = 1$ itd.). Wtedy, wykorzystując ciągłość działań, mamy

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left(t_{m_k}^{(1)} e_1 + \dots + t_{m_k}^{(i_0)} e_{i_0} + \dots + t_{m_k}^{(n)} e_n\right) = s^{(1)} e_1 + \dots + s^{(i_0)} e_{i_0} + \dots + s^{(n)} e_n \neq 0.$$

Zatem otrzymujemy sprzeczność.

2° Załóżmy, że nie wszystkie ciągi $\big(t_m^{(i)}\big)_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, n$ są ograniczone. Wówczas można znaleźć podciąg $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ takie, że

$$\lim_{k\to\infty} \left|t_{m_k}^{(i_0)}\right| = +\infty \quad \text{oraz} \quad \left|t_{m_k}^{(i_0)}\right| \geqslant \left|t_{m_k}^{(i)}\right|$$

dla dowolnych $k \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$ (znajdujemy najpierw i_0 tak, aby był spełniony warunek pierwszy i następnie testujemy warunek drugi, mając możliwość przechodzenia do podciągów, ewentualnie zmieniając i_0). Stąd

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_{m_k}^{(i_0)}} \left(t_{m_k}^{(1)} e_1 + \dots + t_{m_k}^{(i_0)} e_{i_0} + \dots + t_{m_k}^{(n)} e_n\right) = 0.$$

Zatem

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{t_{m_k}^{(1)}}{t_{m_k}^{(i_0)}} e_1 + \dots + 1 \cdot e_{i_0} + \dots + \frac{t_{m_k}^{(n)}}{t_{m_k}^{(i_0)}} e_n\right) = 0.$$

W ten sposób otrzymujemy sytuację z punktu 1°.

$\square$

Uwaga. Pokazaliśmy, że w przestrzeni skończenie wymiarowej, przy dowolnym wyborze bazy, zbieżność odbywa się „po współrzędnych".

Twierdzenie. *Jeśli* $\dim_{\mathbb{C}} X = n$*, to* X *jest homeomorficzna z* $\mathbb{C}^n$*.*

Dowód. Jeżeli $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą w X, $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ zaś bazą kanoniczną w $\mathbb{C}^n$, to z lematu wynika, że odwzorowanie

$$t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n \mapsto t_1 \bar{e}_1 + \cdots + t_n \bar{e}_n$$

jest homeomorfizmem. $\square$

Ćwiczenie. Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniowo-metryczną nad $\mathbb{R}$, $e_1, \ldots, e_n$ zaś dowolną bazą w X. Dla $M > 0$ rozważmy zbiór

$$A = \left\{ x \in X;\ x = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i,\ (\forall\, i = 1, \ldots, n)\ |t_i| < M \right\}.$$

Pokazać, że na X istnieje norma $\|\cdot\|$ taka, że

$$A = B(0,1) = \{x \in X;\ \|x\| < 1\}.$$

Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Kołmogorowa.

Uwaga. Niech Y, Z będą przestrzeniami liniowo-metrycznymi z metrykami przesuwalnymi d_Y, d_Z. Załóżmy, że $I : Y \to Z$ jest izomorfizmem liniowym, który jest jednocześnie homeomorfizmem. Wówczas jeśli (Z, d_Z) jest przestrzenią zupełną, to (Y, d_Y) jest również zupełna.

Istotnie, niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ będzie ciągiem Cauchy'ego, tzn.

$$\lim_{m,n\to\infty} d_Y(y_n, y_m) = 0.$$

Stąd

$$\lim_{m,n\to\infty} d_Y(y_n - y_m, 0) = 0.$$

Zatem wykorzystując ciągłość odwzorowania I w 0 mamy

$$\lim_{m,n\to\infty} d_Z\big(I(y_n - y_m), I(0)\big) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{m,n\to\infty} d_Z\big(I(y_n) - I(y_m), 0\big) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{m,n\to\infty} d_Z\big(I(y_n), I(y_m)\big) = 0.$$

To oznacza, że $(I(y_n))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w Z, a zatem jest zbieżny. Wykorzystując teraz ciągłość I^{-1}, otrzymamy zbieżność ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Powyższa uwaga nie jest prawdziwa, jeśli pominiemy założenie przesuwalności metryk.

Przykład. W przestrzeni $\mathbb{R}$ rozważmy dwie metryki: euklidesową d_e i metrykę d zadaną wzorem

$$d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|.$$

Są one równoważne, więc przestrzenie $(\mathbb{R}, d_e)$ i $(\mathbb{R}, d)$ są homeomorficzne. Jednak przestrzeń $(\mathbb{R}, d)$ nie jest zupełna (np. $(n)_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżnym ciągiem Cauchy'ego w d).

Twierdzenie. *Jeżeli* X *jest skończenie wymiarową przestrzenią liniowo-metryczną z metryką przesuwalną* d*, to* (X, d) *jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Dowód wynika z wcześniejszego twierdzenia i uwagi. Jeśli $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, to X jest homeomorficzna z $\mathbb{C}^n$, która jest zupełna z metryką euklidesową. $\square$

Wniosek. *Niech* Y *będzie przestrzenią liniowo-metryczną z metryką przesuwalną* d*. Załóżmy, że* $X \subset Y$ *jest podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru. Wówczas* X *jest podzbiorem domkniętym.*

Dowód. Przestrzeń X z metryką indukowaną spełnia założenia poprzedniego twierdzenia, a zatem jest zupełna. Stąd X jest podzbiorem domkniętym. $\square$

Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią liniowo-metryczną nad $\mathbb{C}$, $e_1, \ldots, e_n$ bazą w X, $f : X \to \mathbb{C}$ zaś funkcjonałem liniowym. Mamy

$$f(x) = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n \quad \text{dla} \quad x = t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n, \quad \text{gdzie} \quad a_1 = f(e_1), \ldots, a_n = f(e_n).$$

Zatem

$$f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n,$$

gdzie $f_i : X \to \mathbb{C}$ są funkcjonałami liniowymi takimi, że

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

Wniosek. *Przestrzeń funkcjonałów liniowych na X ma wymiar n.*

Dowód. Załóżmy, że $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$. Wtedy dla $j = 1, \ldots, n$ mamy

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right) (e_j) = \alpha_j f_j(e_j) = \alpha_j.$$

Zatem $f_1, \ldots, f_n$ tworzą bazę w przestrzeni funkcjonałów liniowych na X. □

Wniosek. *Każdy funkcjonał liniowy na X jest ciągły.*

Dowód. Niech

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} t_m^{(i)} e_i, \quad x = \sum_{i=1}^{n} t^{(i)} e_i, \quad \lim_{m \to \infty} x_m = x.$$

Wtedy $\lim_{m \to \infty} t_m^{(i)} = t^{(i)}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem

$$\lim_{m \to \infty} f(x_m) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} t_m^{(i)} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t^{(i)} f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} t^{(i)} e_i \right) = f(x).$$

□

Ćwiczenie. Pokazać, że w skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej kula jednostkowa jest zbiorem relatywnie zwartym (tzn. takim, którego domknięcie jest zbiorem zwartym).

Twierdzenie. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną nieskończonego wymiaru. Wówczas kule nie są zbiorami relatywnie zwartymi w X.*

Dowód. Weźmy dowolny element $e_0 \in X$ taki, że $\|e_0\| = 1$. Niech $F_1 = \operatorname{span}\{e_0\}$, tzn. F_1 jest przestrzenią liniową generowaną przez e_0. F_1 jako podprzestrzeń skończonego wymiaru jest zbiorem domkniętym. Rozpatrzmy X/F_1 z normą ilorazową

$$\big\|[x]\big\|_{F_1} = \inf\{\|x'\|;\ x' \in [x]\}.$$

Jest to nadal przestrzeń nieskończenie wymiarowa, a zatem istnieje

$$[x] \in X/F_1 \quad \text{taki, że} \quad \big\|[x]\big\|_{F_1} = \frac{1}{2}.$$

Stąd wynika, że $\|x + f_1\| \geqslant \frac{1}{2}$ dla każdego $f_1 \in F_1$. Ponieważ $f_1 - e_0 \in F_1$, więc $\|x + f_1 - e_0\| \geqslant \frac{1}{2}$. Ponadto f_1 możemy tak dobrać, aby $\|x + f_1\| \leqslant 1$. Zatem istnieje $x_1 \in [x]$ taki, że

$$\|x_1\| \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad \|x_1 - e_0\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Połóżmy $e_1 = x_1$. Następnie powtarzamy powyższe rozumowanie dla $F_2 = \operatorname{span}\{e_0, e_1\}$ i mamy

$$[x] \in X/F_2 \quad \text{taki, że} \quad \big\|[x]\big\|_{F_2} = \frac{1}{2},$$

a stąd $x_2 \in [x]$ taki, że

$$\|x_2\| \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad \|x_2 - e_0\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \|x_2 - e_1\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Kładziemy $e_2 = x_2$ i tak dalej – indukcyjnie definiujemy ciąg $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ elementów z X o normach nie większych niż 1, ale takich, że $\|e_i - e_j\| \geqslant \frac{1}{2}$ dla $i \neq j$. Z tego ciągu oczywiście nie można wybrać podciągu zbieżnego. □

Funkcjonały liniowe i ciągłe w przestrzeniach liniowo-metrycznych.

Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią liniową, $f : X \to \mathbb{C}$ niezerowym funkcjonałem liniowym. Połóżmy*

$$H_f = \{x \in X;\ f(x) = 1\}.$$

Wówczas H_f jest hiperpłaszczyzną (tzn. warstwą podprzestrzeni liniowej kowymiaru 1) oraz $0 \notin H_f$.

Jeżeli natomiast $H \subset X$ jest hiperpłaszczyzną taką, że $0 \notin H$, to istnieje dokładnie jeden funkcjonał liniowy $f : X \to \mathbb{C}$ spełniający $H = H_f$.

Dowód. Weźmy dowolny element $\tilde{x} \in H_f$ i niech $\tilde{H}_f = H_f - \tilde{x}$. Łatwo sprawdzić, że $\tilde{H}_f$ jest podprzestrzenią liniową, oczywiście $\tilde{H}_f = \ker f$. Ponieważ $f \neq 0$, więc

$$X/\ker f \simeq \operatorname{im} f = \mathbb{C}.$$

Zatem $X/\ker f$ ma wymiar 1, czyli $\ker f$ ma kowymiar 1. Oczywiście $0 \notin H_f$.

Z drugiej strony jeśli H jest hiperpłaszczyzną, to jest postaci $\tilde{H} + x_0$, gdzie $x_0 \in H$ oraz $\tilde{H}$ jest podprzestrzenią liniową taką, że $\dim X/\tilde{H} = 1$. Zatem każdy niezerowy element jest bazą w $X/\tilde{H}$. Weźmy $e = \tilde{H} + x_0 = H$. Ponieważ $0 \notin H$, więc $e \neq 0$. Kładziemy

$$f(te) = t$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{C}$. Zdefiniowany w ten sposób funkcjonał f możemy potraktować jako funkcjonał liniowy na X, który jest stały na warstwach podprzestrzeni $\tilde{H}$.

Pozostaje wykazać jedyność funkcjonału f. Załóżmy, że f, g są niezerowymi funkcjonałami na X takimi, że $H_f = H_g$. Z pierwszej części dowodu wynika, że $\ker f = \ker g$. Ustalmy $y_1 \notin \ker f$ i niech $\alpha = \frac{g(y_1)}{f(y_1)}$. Dla dowolnego $y \in X$, jeśli $t = \frac{f(y)}{f(y_1)}$, to $y - ty_1 \in \ker f = \ker g$. Stąd $g(y) = tg(y_1) = \alpha f(y)$. Zatem $g = \alpha f$, a ponieważ, jak widać, w tym przypadku funkcjonał jest wyznaczony przez niezerową wartość w jednym punkcie, więc $f = g$. □

Uwaga. Funkcjonał liniowy jest wyznaczony z dokładnością do przemnożenia przez stałą przez swoje jądro.

Niech X będzie przestrzenią liniowo-metryczną z metryką przesuwalna d.

Twierdzenie. *Niech $f : X \to \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem liniowym. Wówczas f jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w jednym punkcie.*

Dowód. Załóżmy, że funkcjonał f jest ciągły w $x_0 \in X$. Niech $x \in X$ i weźmy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z X zbieżny do x w metryce d. Wykorzystując przesuwalność metryki d, mamy

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0.$$

A zatem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n - x + x_0) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n) - f(x) + f(x_0)\big) = f(x_0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

□

Oznaczmy przez X^* przestrzeń (liniową) wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych na X.

Wniosek. *Niech $f : X \to \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem liniowym. Wówczas $f \in X^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy H_f jest zbiorem domkniętym (lub równoważnie, gdy* $\ker f$ *jest zbiorem domkniętym).*

Dowód.

$\Rightarrow$: Zauważmy, że $H_f = f^{-1}(\{1\})$, a zbiór $\{1\}$ jest domknięty.

$\Leftarrow$: Załóżmy, że f nie jest funkcjonałem ciągłym. Wówczas nie jest on ciągły w zerze, tzn. istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z X zbieżny do zera taki, że $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ dla $n \geqslant 1$. Wówczas ciąg $\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony. Wybierzmy podciąg zbieżny:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{f(x_{n_k})} = c \in \mathbb{C}.$$

Mamy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{f(x_{n_k})} x_{n_k} = c \cdot 0 = 0.$$

Natomiast

$$f\left(\frac{1}{f(x_{n_k})} x_{n_k}\right) = 1, \quad \text{tzn.} \quad \frac{1}{f(x_{n_k})} x_{n_k} \in H_f.$$

Zatem ponieważ H_f jest domknięty, to $0 \in H_f$ i otrzymujemy sprzeczność.

□

WYKŁAD IV

Przestrzenie Banacha. Przykłady.

Zacznijmy od prostego lematu.

Lemat. *Jeśli $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in [0,1]$, to*

$$\alpha^{1-\lambda}\beta^{\lambda} \leqslant (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta.$$

Dowód. Niech $a = \ln\alpha$, $b = \ln\beta$. Ponieważ funkcja wykładnicza jest wypukła, więc

$$\alpha^{1-\lambda}\beta^{\lambda} = (e^a)^{1-\lambda}(e^b)^{\lambda} = e^{(1-\lambda)a+\lambda b} \leqslant (1-\lambda)e^a + \lambda e^b = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta.$$

□

Rozpatrzmy odcinek $[0,1]$ z miarą Lebesgue'a λ.

Twierdzenie (nierówność Höldera). *Niech $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas dla dowolnych funkcji mierzalnych $f, g : [0,1] \to \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność*

$$\int_0^1 |fg|\, d\lambda \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g|^q\, d\lambda\right)^{1/q}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$A = \left(\int_0^1 |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p}, \quad B = \left(\int_0^1 |g|^q\, d\lambda\right)^{1/q}.$$

Rozpatrzmy przypadki:

- $A \cdot B = 0$. Wówczas przynajmniej jedna z funkcji f, g jest prawie wszędzie równa zero i w związku z tym lewa strona nierówności jest równa zero.
- $A \cdot B = +\infty$. Wówczas nierówność jest prawdziwa w oczywisty sposób.

- $0 < A < +\infty$, $0 < B < +\infty$. Ustalmy $x \in [0,1]$ i połóżmy
$$\alpha = \left(\frac{1}{A}|f(x)|\right)^p, \quad \beta = \left(\frac{1}{B}|g(x)|\right)^q.$$
Z lematu mamy
$$\alpha^{\frac{1}{p}}\beta^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta,$$
to znaczy
$$\frac{1}{AB}|f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{1}{pA^p}|f(x)|^p + \frac{1}{qB^q}|g(x)|^q.$$
Ponieważ nierówność powyższa zachodzi dla dowolnego $x \in [0,1]$, więc
$$\frac{1}{AB}\int_0^1 |fg|\, d\lambda \leqslant \frac{1}{pA^p}\int_0^1 |f|^p\, d\lambda + \frac{1}{qB^q}\int_0^1 |g|^q\, d\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
co kończy dowód.

□

Twierdzenie (nierówność Minkowskiego). *Jeśli $p \geqslant 1$ oraz $f, g : [0,1] \to \mathbb{C}$ są funkcjami mierzalnymi, to*
$$\left(\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g|^p\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Dowód. Dla $p = 1$ nierówność jest oczywista. Możemy zatem założyć, że $p > 1$. Jeśli jedna z całek po prawej stronie nierówności jest nieskończona, to nierówność jest prawdziwa. Załóżmy więc, że obie całki są skończone. Ponieważ
$$\max\{|f|, |g|\} \leqslant |f| + |g| \leqslant 2\max\{|f|, |g|\},$$
więc
$$|f+g|^p \leqslant (2\max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).$$
Całkując otrzymujemy
$$\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda \leqslant 2^p \int_0^1 |f|^p\, d\lambda + 2^p \int_0^1 |g|^p\, d\lambda,$$
więc
$$\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda < +\infty.$$
Ponieważ $p > 1$, więc możemy znaleźć liczbę q taką, że
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$
Stosując nierówność Höldera, otrzymujemy
$$\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda = \int_0^1 |f+g| \cdot |f+g|^{p-1}\, d\lambda \leqslant \int_0^1 |f| \cdot |f+g|^{p-1}\, d\lambda + \int_0^1 |g| \cdot |f+g|^{p-1}\, d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f+g|^{q(p-1)}\, d\lambda\right)^{1/q} + \left(\int_0^1 |g|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |f+g|^{q(p-1)}\, d\lambda\right)^{1/q}.$$
Z (1) wynika, że $p + q = pq$, a stąd $q(p-1) = p$. Zatem
$$\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda \leqslant \left[\left(\int_0^1 |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g|^p\, d\lambda\right)^{1/p}\right] \left(\int_0^1 |f+g|^p\, d\lambda\right)^{1/q}.$$
Ponieważ $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, więc po wykonaniu obustronnie dzielenia mamy dokładnie nierówność Minkowskiego (zakładamy, że funkcja $f + g$ jest prawie wszędzie różna od zera, w przeciwnym przypadku nierówność jest oczywista). □

Uwaga. Zapiszmy wersje skończoną i dyskretną nierówności Minkowskiego:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^p\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p},$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie. Kiedy w powyższych nierównościach zachodzą równości?

Definicja. Przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią Banacha*, gdy przestrzeń metryczna (X, ρ), $\rho(x, y) = \|x - y\|$ jest zupełna.

Uwaga. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ tworzy szereg *bezwzględnie zbieżny* (szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest *bezwzględnie zbieżny*), gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < +\infty.$$

Twierdzenie. *Przestrzeń unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny w tej przestrzeni.*

Dowód.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest zupełna. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla pewnego naturalnego N mamy

$$\sum_{n=N}^{\infty}\|x_n\| < \varepsilon.$$

Niech $k, m \geqslant N$, $k < m$. Wówczas

$$\|x_k + x_{k+1} + \cdots + x_m\| \leqslant \|x_k\| + \|x_{k+1}\| + \cdots + \|x_m\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty}\|x_n\| < \varepsilon.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego, a stąd jest zbieżny

$\Leftarrow$: Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$$

dla $k \geqslant 1$. Połóżmy $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Wówczas

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Zatem, z założenia, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ jest zbieżny. Niech $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = y$. Oznaczmy $s_m = \sum_{k=1}^{m} y_k$. Wtedy $s_m = x_{n_m} - x_{n_1}$ dla $m \geqslant 2$. Zatem

$$\lim_{m\to\infty}(x_{n_m} - x_{n_1}) = y, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{m\to\infty} x_{n_m} = y + x_{n_1}.$$

To oznacza, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zawiera podciąg zbieżny, więc sam jest zbieżny.

$\square$

Podamy teraz kilka przykładów przestrzeni Banacha.

1°

$$l^p = \left\{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C};\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, \quad \left\| \underline{x} \right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Dla $p \geqslant 1$ z nierówności Minkowskiego wynika, że przestrzeń $(l^p, \|\cdot\|_p)$ jest unormowana. Pokażemy, że jest również zupełna.

Weźmy ciąg Cauchy'ego $\left(\underline{x}^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} \subset l^p$. Wtedy $\left(x_k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{C}$, więc istnieje $\underline{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$$

dla każdego $k \geqslant 1$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$(\exists\, M > 0)\ \ (\forall\, n, m \geqslant M)\ \ \left\| \underline{x}^{(n)} - \underline{x}^{(m)} \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem dla dowolnego $N \geqslant 1$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^p \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Przechodząc do granicy z $m \to \infty$ mamy

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

a z dowolności N (ciągle dla $n \geqslant M$)

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Zatem $\left(\underline{x}^{(n)} - \underline{x}\right) \in l^p$, skąd $\underline{x} \in l^p$ oraz $\lim_{n\to\infty} \underline{x}^{(n)} = \underline{x}$.

2°

$$l^{\infty} = \left\{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C};\ \sup_{n\geqslant 1} |x_n| < +\infty \right\}, \quad \left\| \underline{x} \right\|_{\infty} = \sup_{n\geqslant 1} |x_n|.$$

Postępując według schematu z 1°, można pokazać, że $(l^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ jest przestrzenią Banacha.

3°

$$c_0 = \left\{ \underline{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\} \subset l^{\infty}, \quad \left\| \underline{x} \right\|_{c_0} = \left\| \underline{x} \right\|_{\infty}.$$

Załóżmy, że $\left(\underline{x}^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ i $\lim_{n\to\infty} \underline{x}^{(n)} = \underline{x}$ w l^{∞}. Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas

$$(\exists\, N > 0)\ \ (\forall\, n \geqslant N)\ \ \left\| \underline{x}^{(n)} - \underline{x} \right\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ustalmy $n \geqslant N$. Wtedy

$$(\exists\, K > 0)\ \ (\forall\, k \geqslant K)\ \ \left| x_k^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a więc dla każdego $k \geqslant K$ mamy

$$|x_k| \leqslant \left| x_k - x_k^{(n)} \right| + \left| x_k^{(n)} \right| \leqslant \left\| \underline{x} - \underline{x}^{(n)} \right\|_{\infty} + \left| x_k^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stąd $\underline{x} \in c_0$. Zatem c_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni l^{∞}, a więc $(c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ jest przestrzenią Banacha.

4°
$$L^p[0,1] = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C};\ \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < +\infty \right\}, \quad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \, d\lambda \right)^{1/p}.$$

Dla $p \geqslant 1$ z nierówności Minkowskiego wynika, że przestrzeń $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$ jest unormowana. Pokażemy, że jest również zupełna.

Niech $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^p[0,1]$. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p < +\infty$. Musimy pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest zbieżny w $L^p[0,1]$. Niech
$$s_N(x) = \sum_{n=1}^N |f_n(x)|, \quad g(x) = \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|.$$

Wówczas
$$s_N(x) \nearrow g(x), \quad \text{więc} \quad (s_N(x))^p \nearrow (g(x))^p.$$

Stąd wykorzystując twierdzenie Lebesgue'a o całkowaniu ciągu monotonicznego mamy
$$\int_0^1 |g|^p \, d\lambda = \int_0^1 \sup_{N\geqslant 1} \left(\sum_{n=1}^N |f_n| \right)^p d\lambda = \sup_{N\geqslant 1} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N |f_n| \right)^p d\lambda = \sup_{N\geqslant 1} \left\| \sum_{n=1}^N |f_n| \right\|_p^p =$$
$$= \left(\sup_{N\geqslant 1} \left\| \sum_{n=1}^N |f_n| \right\|_p \right)^p \leqslant \left(\sup_{N\geqslant 1} \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p \right)^p = \left(\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \right)^p < +\infty.$$

Wynika stąd, że $g \in L^p[0,1]$ i w szczególności funkcja ta jest prawie wszędzie skończona. To oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|$ jest prawie wszędzie zbieżny, a stąd szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ jest prawie wszędzie zbieżny. Połóżmy
$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty f_n(x), & \text{gdy szereg } \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \text{ jest zbieżny}, \\ 0, & \text{gdy szereg } \sum_{n=1}^\infty f_n(x) \text{ nie jest zbieżny}. \end{cases}$$

Mamy
$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)| = g(x)$$

dla prawie wszystkich $x \in [0,1]$, więc
$$\int_0^1 |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_0^1 |g|^p \, d\lambda < +\infty.$$

W końcu
$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^\infty f_n \right\|_p \leqslant \sum_{n=N+1}^\infty \|f_n\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

5°
$$L^\infty[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{C};\ (\exists\, A \subset [0,1], \lambda(A) = 0)\ (\exists\, c > 0)\ (\forall\, x \in [0,1] \setminus A)\ |f(x)| \leqslant c \},$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f := \inf_{A\subset[0,1],\lambda(A)=0} \ \sup_{x\in[0,1]\setminus A} |f(x)|.$$

6°
$$C(X) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{C};\ f - \text{ciągła} \}, \quad \|f\|_{C(X)} = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

gdzie X jest przestrzenią metryczną zwartą.

Zauważmy, że zbieżność względem powyższej normy jest dokładnie zbieżnością jednostajną. Natomiast jednostajny warunek Cauchy'ego implikuje jednostajną zbieżność i ponadto granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.

Ćwiczenie. Udowodnić, że $(L^\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

WYKŁAD V

Podstawowe informacje o przestrzeniach Hilberta.

Niech $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną i niech $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Wypiszemy pewne własności iloczynu skalarnego.

- Ciągłość. Jeśli $x_n \to x$, $y_n \to y$ w przestrzeni H, to wykorzystując nierówność Schwarza mamy

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0.\end{aligned}$$

- Tożsamość równoległoboku:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

- Wzór polaryzacyjny:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{4}\Big(\big(\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2\big) + i\big(\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, iy\rangle + \|y\|^2\big) - \\ &\quad - \big(\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, -y\rangle + \|y\|^2\big) - i\big(\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, -iy\rangle + \|y\|^2\big)\Big) = \\ &= \frac{1}{4}\big(4\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + i\cdot 4\operatorname{Re}(-i\langle x, y\rangle)\big) = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + i\operatorname{Im}\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Ćwiczenie. Uzasadnić tożsamość równoległoboku.

Definicja. Przestrzeń unitarną $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy *przestrzenią Hilberta*, gdy $(H, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.

Przykłady.

1°

$$L^2[0,1], \quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f\bar{g}\, d\lambda.$$

Zauważmy, że powyższy iloczyn skalarny daje nam normę $\|\cdot\|_2$ oraz że nierówność Schwarza, to nierówność Höldera dla $p = q = 2$.

2°

$$l^2, \quad \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Pokażemy, że w przestrzeni Hilberta odległość elementu od podprzestrzeni domkniętej jest realizowana i to w dokładnie jeden sposób.

Lemat. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $M \subset H$ zaś podprzestrzenią domkniętą. Wówczas*

$$(\forall\, x \in H)\ \ (\exists!\, z \in M)\ \ (\forall\, y \in M)\ \ \|x - z\| \leqslant \|x - y\|.$$

Dowód. Niech $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, tzn. d jest odległością punktu x od zbioru M. Wtedy istnieje ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$. Wykorzystując tożsamość równoległoboku mamy

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi, gdyż $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$ (wystarczy, że M jest zbiorem wypukłym). Zatem $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego, a więc $\lim_{n\to\infty} y_n = z \in M$. Stąd $\|x - z\| = d$. Gdyby $\|x - z'\| = d$ dla $z' \in M$, to podobnie jak wyżej

$$\|z - z'\|^2 = 2\|z - x\|^2 + 2\|z' - x\|^2 - 4\left\|x - \tfrac{1}{2}(z + z')\right\|^2 \leqslant 2\|z - x\|^2 + 2\|z' - x\|^2 - 4d^2 = 0.$$

Stąd $z = z'$. □

Możemy zatem zdefiniować operator

$$P_M : H \to M, \quad P_M x = z.$$

Mówimy, że elementy $x, y \in H$ są *ortogonalne* (*prostopadłe*), gdy $\langle x, y\rangle = 0$. Piszemy wówczas $x \perp y$.

Ćwiczenie. Pokazać, że

$$M^{\perp} = \{x \in H;\ x \perp y \text{ dla każdego } y \in M\}$$

jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

Twierdzenie o projekcji ortogonalnej. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, M zaś jej domkniętą podprzestrzenią. Wówczas każdy element $x \in H$ można jednoznacznie zapisać w postaci*

$$x = z + w, \quad \textit{gdzie} \quad z \in M,\ w \in M^{\perp}.$$

Dowód. Połóżmy $z = P_M x$ oraz $w = x - z$. Mamy pokazać, że $w \in M^{\perp}$. Niech $y \in M$, $t \in \mathbb{R}$, $d = \|x - z\|$. Wówczas

$$d^2 \leqslant \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = \|w\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle w, y\rangle + t^2\|y\|^2 = d^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle w, y\rangle + t^2\|y\|^2.$$

Stąd

$$-2t\,\mathrm{Re}\langle w, y\rangle + t^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Zatem wyróżnik wielomianu po lewej stronie nierówności musi być niedodatni, czyli

$$\Delta = 4\left(\mathrm{Re}\langle w, y\rangle\right)^2 \leqslant 0.$$

To oznacza, że $\mathrm{Re}\langle w, y\rangle = 0$. Podobnie, biorąc zamiast t liczbę it pokazuje się, że $\mathrm{Im}\langle w, y\rangle = 0$. Stąd $\langle w, y\rangle = 0$.

Gdyby istniały natomiast dwa rozkłady $x = z + w = z' + w'$, to $M \ni z - z' = w' - w \in M^{\perp}$. Zatem $z = z'$, $w = w'$. □

Uwaga. Powyższe twierdzenie zapisujemy jako $H = M \oplus M^{\perp}$.

Ćwiczenie. Dany jest ciąg przestrzeni Hilberta $H_1, H_2, \ldots$. Definiujemy

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in H_1 \times H_2 \times \ldots;\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty \right\}$$

(norma elementu x_n jest normą pochodzącą od iloczynu skalarnego w H_n) oraz

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle.$$

Pokazać poprawność powyższej definicji oraz wykazać, że H z tak zdefiniowanym iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta (zwaną sumą prostą przestrzeni Hilberta).

Definicja. Podzbiór $S \subseteq H$ przestrzeni Hilberta nazywamy *ortonormalnym*, gdy

- $\|x\| = 1$ dla każdego $x \in S$,
- $x \perp y$ dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$.

Gdy zachodzi tylko drugi warunek, to mówimy o zbiorze *ortogonalnym*. Maksymalny podzbiór ortonormalny nazywamy *bazą ortonormalną* (lub *bazą hilbertowską*, lub *podzbiorem ortonormalnym zupełnym*).

Uwaga. W każdej przestrzeni Hilberta istnieje baza ortonormalna.

Istotnie, niech $\mathcal{R}$ będzie rodzina wszystkich podzbiorów ortonormalnych z relacją częściowego porządku zadaną przez inkluzję zbiorów. Rodzina $\mathcal{R}$ jest niepusta, bo zawiera, na przykład, jednoelementowy podzbiór ortonormalny $\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$. Jeśli $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{R}$ jest łańcuchem, to $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ jest też podzbiorem ortonormalnym. Zatem z lematu Kuratowskiego–Zorna otrzymujemy tezę.

Uwaga. Jeśli H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, to każda baza ortonormalna w H jest przeliczalna.

Istotnie, jeśli $x, y \in H$ spełniają $x \perp y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, to

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2.$$

Czyli $\|x-y\| = \sqrt{2}$. Stąd, jeśli $S = \{s_i\}_{i\in I}$ jest zbiorem ortonormalnym, to $\|s_i-s_j\| = \sqrt{2}$ dla $i \neq j$. Zatem rodzina kul o środkach w punktach ze zbioru S i promieniach równych $\frac{\sqrt{2}}{3}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych. Gdyby tych kul było nieprzeliczalnie wiele, to otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem ośrodkowości.

Uwaga (twierdzenie Pitagorasa). Jeśli zbiór $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest ortogonalny, to

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Twierdzenie. *Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, $S = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ zaś bazą ortonormalną w H. Wówczas dla dowolnego $y \in H$ mamy*

(1) $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n\rangle x_n$,

(2) $\|y\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n\rangle|^2$.

Dowód. Niech $y \in H$. Mamy

$$y = \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n + \left(y - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n\right).$$

Twierdzimy, że w ten sposób rozłożyliśmy y na sumę dwóch wektorów prostopadłych:

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n, y - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n \right\rangle &= \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle \langle x_n, y\rangle - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} \langle y, x_n\rangle \overline{\langle y, x_m\rangle} \langle x_n, x_m\rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle \overline{\langle y, x_n\rangle} - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle \overline{\langle y, x_n\rangle} \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$\|y\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n\right\|^2 + \left\|y - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle y, x_n\rangle|^2 + \left\|y - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n\right\|^2,$$

a więc otrzymaliśmy

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle y, x_n\rangle|^2 + \left\|y - \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle x_n\right\|^2. \tag{3}$$

Zauważmy, że w szczególności (wykorzystując tylko założenie ortonormalności) mamy

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle y, x_n \rangle|^2 \leqslant \|y\|^2, \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2 \leqslant \|y\|^2. \tag{4'}$$

Kładziemy teraz

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle x_k.$$

Dla $n < m$ mamy

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle x_k - \sum_{k=1}^{m} \langle y, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle y, x_k \rangle x_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle y, x_k \rangle|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

gdyż z (4′) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2$ jest zbieżny. Zatem ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w H. Niech $\lim_{n\to\infty} y_n = y'$. Wykorzystując ciągłość iloczynu skalarnego, dla dowolnego $p \geqslant 1$, mamy

$$\langle y - y', x_p \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y - y_n, x_p \rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle y - \sum_{k=1}^{n} \langle y, x_k \rangle x_k, x_p \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \big(\langle y, x_p \rangle - \langle y, x_p \rangle \big) = 0,$$

a więc z zupełności zbioru S wynika, że $y' = y$. Pokazaliśmy w ten sposób (1). Ponadto z (3) i (1) mamy (2). □

Uwaga.

(i) Szereg w (1) nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu y (względem układu ortonormalnego zupełnego $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).

(ii) Nierówność (4) nosi nazwę *nierówności Bessela* (i jest prawdziwa dla dowolnego układu ortonormalnego, niekoniecznie zupełnego).

Ćwiczenie. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta H. Weźmy ciąg liczb zespolonych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny w H.

Ćwiczenie. Pokazać, że każda nieskończenie wymiarowa, ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izomorficzna z l^2 (tutaj przez izomorfizm rozumiemy liniowy izomorfizm zachowujący iloczyn skalarny).

Niech H będzie przestrzenią Hilberta, M zaś jej domkniętą podprzestrzenią.

Twierdzenie. *Dla dowolnych $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ projekcja ortogonalna P_M ma następujące własności:*

(i) $\langle P_M x, y \rangle = \langle P_M x, P_M y \rangle = \langle x, P_M y \rangle$,

(ii) $\langle P_M(P_M x), y \rangle = \langle P_M x, y \rangle$,

(iii) $\langle P_M x, x \rangle = \|P_M x\|^2$,

(iv) $\|P_M x\| \leqslant \|x\|$,

(v) $\|x\|^2 = \|x - P_M x\|^2 + \|P_M x\|^2$,

(vi) $M = \{x \in H;\ P_M x = x\} = \{x \in H;\ \|P_M x\|^2 = \|x\|^2\}$,

(vii) $P_M x = 0 \Leftrightarrow x \perp M$,

(viii) $P_M(\alpha x + \beta y) = \alpha P_M x + \beta P_M y$,

(ix) $P_M H = M$.

Dowód.

(i) $\langle P_M x, y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle + \langle P_M x, y - P_M y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle$,
$\langle x, P_M y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle + \langle x - P_M x, P_M y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle$.

(ii) $\langle P_M(P_M x), y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle = \langle P_M x, y\rangle$.

(iii) $\langle P_M x, x\rangle = \langle P_M x, P_M x\rangle = \|P_M x\|^2$.

(iv) Wykorzystując nierówność Schwarza, mamy

$$\|P_M x\|^2 = \langle P_M x, P_M x\rangle = \langle P_M x, x\rangle \leqslant \|P_M x\| \cdot \|x\|$$

i dzieląc przez $\|P_M x\|$, otrzymujemy szukaną nierówność.

(v) Wynika z twierdzenia Pitagorasa.

(vi) Mamy

$$M \subset \{x \in H;\ P_M x = x\} \subset \{x \in H;\ \|P_M x\|^2 = \|x\|^2\}.$$

Natomiast, jeśli $\|P_M x\|^2 = \|x\|^2$, to z (v) otrzymujemy $x = P_M x \in M$.

$\square$

Ćwiczenie. Uzupełnić dowód powyższego twierdzenia.

Uwaga. Niech $H = L^2[0,1]$. Rozważmy funkcje

$$f_n(t) = e^{2\pi int} \quad \text{dla} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Wówczas $\|f_n\| = 1$ dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz dla $n \neq m$

$$\langle f_n, f_m\rangle = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)t}\, dt = \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{2\pi i(n-m)t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi i(n-m)}(1-1) = 0.$$

Mamy więc układ ortonormalny przeliczalny. Pokażemy później (gdy przejdziemy do klasycznej teorii szeregów Fouriera), że układ ten jest zupełny.

WYKŁAD VI

Operatory liniowe i ograniczone w przestrzeniach unormowanych.

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi, $A : X \to Y$ zaś operatorem liniowym. Oczywiście ze względu na równość $\|A(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|Ax\|$ nie możemy oczekiwać, że A, jako funkcja, będzie odwzorowaniem ograniczonym. Okazuje się, że istotna jest ograniczoność A, jako funkcji, na kulach.

Definicja. Mówimy, że operator liniowy $A : X \to Y$ jest *ograniczony*, gdy

$$(\exists\, M > 0)\ \ (\forall\, x \in X)\ \ \|Ax\| \leqslant M\|x\|.$$

Uwaga.

- Jeżeli A jest operatorem ograniczonym, to dla $x \neq 0$

$$M\|x\| \geqslant \|Ax\| = \left\|A\left(\tfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \|x\| \Leftrightarrow \left\|A\left(\tfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M \quad \text{i oczywiście} \quad \left\|\tfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1.$$

Zatem ograniczoność operatora A oznacza, że jest on ograniczony, jako funkcja, na sferach.

- Jeżeli A jest operatorem ograniczonym, to
$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$
Oczywiście
$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$
Natomiast, jeśli $0 < \|x\| \leqslant 1$, to
$$\|Ax\| = \left\|A\left(\tfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \|x\| \leqslant \left\|A\left(\tfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|.$$

Załóżmy, że $A : X \to Y$ jest operatorem liniowym i ograniczonym. Definiujemy
$$\|A\| = \inf\{M > 0;\ (\forall\, x \in X)\ \ \|Ax\| \leqslant M\|x\|\}.$$

Uwaga.

- $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$ dla dowolnego $x \in X$.
- $\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$.

Istotnie, jeśli $\|x\| \leqslant 1$, to $\|Ax\| \leqslant \|A\|$ i stąd $\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|$. Z drugiej strony dla każdego $x \neq 0$
$$\|Ax\| = \left\|A\left(\tfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \|x\| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|Ay\| \cdot \|x\|,$$
więc $\|A\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$.

Twierdzenie. *Niech $A : X \to Y$ będzie operatorem liniowym. Wówczas A jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Dowód.

$\Leftarrow$: W oczywisty sposób A jest ciągły w zerze.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \infty$, to znaczy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów z X o normach równych 1 taki, że $\|Ax_n\| \geqslant n$ dla $n \geqslant 1$. Mamy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0, \quad \text{natomiast} \quad \left\|A\left(\tfrac{x_n}{n}\right)\right\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| \geqslant 1,$$
co przeczy ciągłości A w zerze.

□

Oznaczmy przez $B(X,Y)$ przestrzeń operatorów liniowych i ograniczonych z X do Y. Zauważmy, że ponieważ
$$\|(A+B)x\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\|$$
dla każdego $x \in X$, więc

- $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

Ponadto

- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$.

Zatem $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie. *Jeśli Y jest przestrzenią Banacha, to $B(X,Y)$ też jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X,Y)$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$(\exists\, N \geqslant 1)\ \ (\forall\, n,m \geqslant N)\ \ \|A_n - A_m\| < \varepsilon.$$

Jeśli ustalimy $x \in X$, to dla $n,m \geqslant N$

$$\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|,$$

więc $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y. Zatem jest on zbieżny i oznaczmy jego granicę przez $Ax \in Y$. W ten sposób otrzymujemy operator A, który jako granica punktowa operatorów liniowych też jest liniowy. Pokażemy, że A jest ograniczony. Dla $\|x\| \leqslant 1$ i $m \geqslant N$ mamy

$$\|A_m x - A_N x\| \leqslant \|A_m - A_N\| < \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy z $m \to \infty$ otrzymujemy $\|Ax - A_N x\| \leqslant \varepsilon$ i stąd

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax - A_N x\| + \|A_N x\| \leqslant \varepsilon + \|A_N\|,$$

więc A jest ograniczony. Ponadto nierówność $\|Ax - A_N x\| \leqslant \varepsilon$, a w zasadzie

$$\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$$

dla $n \geqslant N$ i dowolnego $\|x\| \leqslant 1$ oznacza, że $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ w $B(X,Y)$. $\square$

Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Przypomnijmy, że przez X^* oznaczyliśmy przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych na X. Na przestrzeni X^* mamy normę

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

Wniosek. $(X^*, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią Banacha.*

Przestrzeń X^* nazywamy *przestrzenią sprzężoną* do przestrzeni X.

Rozszerzenia funkcjonałów.

Niech X będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Odwzorowanie $p : X \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcjonałem Banacha*, gdy

- $(\forall\, x,y \in X)\ \ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,
- $(\forall\, x \in X)\ \ (\forall\, t \geqslant 0)\ \ p(tx) = tp(x)$.

Uwaga. Każdy funkcjonał liniowy jest oczywiście funkcjonałem Banacha.

Lemat. *Niech X_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni X kowymiaru 1. Załóżmy, że na X_0 określony jest funkcjonał liniowy $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ spełniający dla dowolnego $x \in X_0$ nierówność*

$$f_0(x) \leqslant p(x).$$

Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $F : X \to \mathbb{R}$ taki, że

$$F|_{X_0} = f_0 \quad \textit{oraz} \quad F(x) \leqslant p(x)$$

dla dowolnego $x \in X$.

Dowód. Ustalmy $y \notin X_0$. Wówczas

$$X = \{x_0 + ty;\ x_0 \in X_0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Niech $x_1, x_2 \in X_0$. Mamy

$$f_0(x_1) + f_0(x_2) = f_0(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1 + x_2) = p\big((x_1 + y) + (x_2 - y)\big) \leqslant p(x_1 + y) + p(x_2 - y).$$

Zatem
$$f_0(x_2) - p(x_2 - y) \leqslant -f_0(x_1) + p(x_1 + y).$$
Stąd
$$A := \sup_{x_2 \in X_0} \big(f_0(x_2) - p(x_2 - y)\big) \leqslant \inf_{x_1 \in X_0} \big(-f_0(x_1) + p(x_1 + y)\big) =: B.$$
Weźmy $A \leqslant C \leqslant B$ i połóżmy
$$F(x_0 + ty) = f_0(x_0) + tC.$$
Niech $t > 0$, $x = x_0 + ty$. Mamy
$$\begin{aligned} F(x) &= tC + f_0(x_0) \leqslant tB + f_0(x_0) \leqslant t\left(-f_0\left(\tfrac{x_0}{t}\right) + p\left(\tfrac{x_0}{t} + y\right)\right) + f_0(x_0) = \\ &= -f_0(x_0) + p(x_0 + ty) + f_0(x_0) = p(x). \end{aligned}$$
Natomiast, gdy $t < 0$, to
$$\begin{aligned} F(x) &= tC + f_0(x_0) \leqslant tA + f_0(x_0) \leqslant t\left(f_0\left(\tfrac{x_0}{-t}\right) - p\left(\tfrac{x_0}{-t} - y\right)\right) + f_0(x_0) = \\ &= -f_0(x_0) + p(x_0 + ty) + f_0(x_0) = p(x). \end{aligned}$$
□

Zinterpretujemy geometrycznie powyższy lemat. Jeśli $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, to
$$p(x) = \|x\|$$
jest funkcjonałem Banacha. Zauważmy, że dla funkcjonału liniowego $F : X \to \mathbb{R}$ zachodzi
$$F \leqslant p \Leftrightarrow \|F\| \leqslant 1.$$
Istotnie, jeśli $F(x) \leqslant \|x\|$ dla każdego $x \in X$, to
$$-F(x) = F(-x) \leqslant \|-x\| = \|x\|.$$
Stąd
$$-\|x\| \leqslant F(x) \leqslant \|x\|, \quad \text{czyli} \quad |F(x)| \leqslant \|x\|.$$
Zatem $\|F\| \leqslant 1$. Odwrotnie, jeśli $\|F\| \leqslant 1$, to
$$F(x) \leqslant |F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\|$$
dla każdego $x \in X$.

Załóżmy, że $X_0 \subset X$ ma kowymiar 1 i niech $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $\|f_0\| = 1$ (stąd $f_0 \leqslant p|_{X_0}$). Niech
$$H = \{x \in X_0;\ f_0(x) = 1\}.$$
Jak wykazaliśmy w jednym z poprzednich wykładów jest to hiperpłaszczyzna w X_0 (w X podprzestrzeń $\ker f_0$ ma kowymiar 2). Niech
$$K = \{x \in X;\ \|x\| < 1\}.$$
Zauważmy, że
$$H \cap K = \emptyset.$$
Rzeczywiście,
$$H \cap K = \emptyset \Leftrightarrow \|f_0\| \leqslant 1,$$
gdyż jeśli $x \in H \cap K$, to
$$1 = |f_0(x)| \leqslant \|f_0\| \cdot \|x\| < \|f_0\|.$$
Z drugiej strony jeśli
$$\|f_0\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_0(x)| > 1,$$
to istnieje $x \in X_0$ taki, że $\|x\| \leqslant 1$ i $|f_0(x)| > 1$. Wówczas
$$\frac{x}{f_0(x)} \in H \cap K.$$

Zatem powyższy lemat interpretujemy następująco: *istnieje hiperpłaszczyzna H_1 domknięta w X zawierająca H i nie mająca punktów wspólnych z K.*

Istotnie, jeśli mamy H_1, to istnieje $F \in X^*$ (ciągłość F wynika z domkniętości H_1) taki, że

$$H_1 = \{x \in X;\ F(x) = 1\}.$$

Stąd $F|_{X_0} = f_0$, gdyż $H \subset H_1$ i ponieważ $H_1 \cap K = \emptyset$, więc $\|F\| \leqslant 1$. Jeśli natomiast lemat jest spełniony, to definiujemy

$$H_1 := \{x \in X;\ F(x) = 1\}$$

i wówczas $H_1 \cap K = \emptyset$, gdyż $\|F\| \leqslant 1$.

Twierdzenie Hahna–Banacha (wersja rzeczywista). *Niech X_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej X, $p : X \to \mathbb{R}$ zaś funkcjonałem Banacha. Załóżmy, że na X_0 określony jest funkcjonał liniowy $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ spełniający dla dowolnego $x \in X_0$ nierówność*

$$f_0(x) \leqslant p(x).$$

Wówczas istnieje funkcjonał liniowy $F : X \to \mathbb{R}$ taki, że

$$F|_{X_0} = f_0 \quad \textit{oraz} \quad F(x) \leqslant p(x)$$

dla dowolnego $x \in X$.

Dowód. Rozważmy rodzinę

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{(X_1, f_1);\ & X_1 \subset X \text{ – podprzestrzeń liniowa},\ X_0 \subset X_1,\\ & f_1 : X_1 \to \mathbb{R} \text{ – funkcjonał liniowy},\ f_1|_{X_0} = f_0,\ (\forall\, x \in X_1)\ \ f_1(x) \leqslant p(x)\}\end{aligned}$$

z częściowym porządkiem

$$(X_1, f_1) \prec (X_2, f_2), \quad \text{gdy} \quad X_1 \subset X_2,\ f_2|_{X_1} = f_1.$$

Mamy $(X_0, f_0) \in \mathcal{P}$. Niech $\big((X_\lambda, f_\lambda)\big)_{\lambda \in \Lambda}$ będzie łańcuchem w $(\mathcal{P}, \prec)$. Wówczas

$$\tilde{X} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

jest przestrzenią liniową, natomiast odwzorowanie

$$\tilde{f} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda, \quad \text{tzn.} \quad \tilde{f}(x_\lambda) = f_\lambda(x_\lambda) \quad \text{dla} \quad x_\lambda \in X_\lambda,$$

jest dobrze określonym funkcjonałem liniowym. Mamy $(\tilde{X}, \tilde{f}) \in \mathcal{P}$. Zatem korzystając z lematu Kuratowskiego–Zorna, istnieje element maksymalny $(\bar{X}, \bar{f})$. Gdyby $\bar{X} \subsetneq X$, to istniałby element $y \in X \setminus \bar{X}$. Biorąc

$$\hat{X} = \{\bar{x} + ty;\ \bar{x} \in \bar{X},\ t \in \mathbb{R}\},$$

z lematu, rozszerzylibyśmy $\bar{f}$ do przestrzeni $\hat{X}$, a to oznaczałoby sprzeczność. □

Uwaga. Jeśli $F(x) \leqslant p(x)$, to $-F(x) = F(-x) \leqslant p(-x)$. Zatem

$$-p(-x) \leqslant F(x) \leqslant p(x). \tag{1}$$

Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $A > 0$. Określmy

$$p(x) = A\|x\|$$

dla $x \in X$. Odwzorowanie p jest funkcjonałem Banacha i $p(-x) = p(x)$. Zatem jeśli F jest rozszerzeniem z twierdzenia Hahna–Banacha, to z (1) mamy $|F(x)| \leqslant p(x) = A\|x\|$ dla dowolnego $x \in X$. Stąd

$$\|F\| \leqslant A.$$

Twierdzenie Hahna–Banacha (w przestrzeniach unormowanych, wersja rzeczywista). *Niech X_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X i $f \in X_0^*$. Wówczas istnieje $F \in X^*$ taki, że*

$$F|_{X_0} = f \quad \textit{oraz} \quad \|F\| = \|f\|.$$

Dowód. Niech $A = \|f\|$ i $p(x) = A\|x\|$ dla $x \in X$. Oczywiście

$$f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| = p(x)$$

dla $x \in X_0$. Zatem z poprzedniego twierdzenia znajdujemy rozszerzenie F funkcjonału f do X, które jak widzieliśmy powyżej, spełnia $\|F\| \leqslant A = \|f\|$. Nierówność w drugą stronę jest oczywista, gdyż F jest rozszerzeniem f. $\square$

WYKŁAD VII

Kontynuujemy temat rozszerzania funkcjonałów. Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{C}$, $f : X \to \mathbb{C}$ zaś funkcjonałem liniowym i ciągłym. Wtedy $f = g + ih$, tzn. $f(x) = g(x) + ih(x)$, gdzie $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $h(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Piszemy $g = \operatorname{Re} f$, $h = \operatorname{Im} f$. Łatwo sprawdzić, że g i h są funkcjonałami liniowymi nad $\mathbb{R}$. Ponadto

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x)) = -h(x) + ig(x).$$

Stąd $g(ix) = -h(x)$, $h(ix) = g(x)$. Otrzymaliśmy wzory

$$\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x), \quad \operatorname{Im} f(ix) = \operatorname{Re} f(x).$$

Zatem

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix).$$

Niech teraz $g : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym (nad $\mathbb{R}$) i ciągłym. Definiujemy

$$f(x) = g(x) - ig(ix).$$

Twierdzimy, że $f \in X^*$ (nad $\mathbb{C}$) oraz $\|f\| = \|g\|$. Istotnie, oczywiście

- f jest odwzorowaniem addytywnym,
- f jest odwzorowaniem jednorodnym przy mnożeniu przez liczby rzeczywiste.

Zauważmy, że

- f jest odwzorowaniem jednorodnym przy mnożeniu przez liczby zespolone.

Mamy

$$\begin{aligned} f\big((\lambda + i\mu)x\big) &= g\big((\lambda + i\mu)x\big) - ig\big(i(\lambda + i\mu)x\big) = \lambda g(x) + \mu g(ix) - i\big(-\mu g(x) + \lambda g(ix)\big) = \\ &= \lambda\big(g(x) - ig(ix)\big) + i\mu\big(g(x) - ig(ix)\big) = (\lambda + i\mu)f(x). \end{aligned}$$

Ponadto

- $\|f\| = \|g\|$.

Istotnie, ponieważ

$$(\forall\, x \in X) \;\; (\exists\, |\beta| = 1) \;\; |f(x)| = \operatorname{Re} f(\beta x),$$

więc

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \operatorname{Re} f(x) = \|\operatorname{Re} f\| = \|g\|.$$

Twierdzenie Hahna–Banacha (wersja zespolona, twierdzenie Bohnenblusta–Sobczyka). *Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{C}$, $X_0 \subset X$ podprzestrzenią liniową i $f \in X_0^*$. Wówczas istnieje $F \in X^*$ taki, że*

$$F|_{X_0} = f \quad \textit{oraz} \quad \|F\| = \|f\|.$$

Dowód. Korzystając z wersji rzeczywistej twierdzenia Hahna–Banacha, funkcjonał rzeczywisty $\operatorname{Re} f$ możemy rozszerzyć z zachowaniem normy do $G \in X^*$. Kładziemy

$$F(x) = G(x) - iG(ix).$$

Z wcześniejszych rozważań mamy

$$\|F\| = \|G\| = \|\operatorname{Re} f\| = \|f\|.$$

Ponadto dla $x \in X_0$

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = f(x).$$

□

Wniosek. *Niech X będzie przestrzenią unormowana, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Wówczas istnieje $F \in X^*$ taki, że*

$$\|F\| = 1 \quad \textit{oraz} \quad F(x_0) = \|x_0\|.$$

Dowód. Niech $X_0 = \operatorname{span}\{x_0\}$ $(= \mathbb{C}x_0)$. Określmy $f : X_0 \to \mathbb{C}$ wzorem $f(x) = \alpha\|x_0\|$, gdzie $x = \alpha x_0$. Ponieważ

$$|f(x)| = |\alpha| \cdot \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$$

dla każdego $x \in X_0$, więc $\|f\| = 1$. Z twierdzenia Hahna–Banacha istnieje $F \in X^*$ taki, że $\|F\| = 1$ oraz $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Uwaga. Przeformułowaniem tego wniosku jest stwierdzenie, że przestrzeń sprzężona X^* rozdziela punkty, tzn. jeśli $x \neq y$, to istnieje $F \in X^*$ taki, że $F(x) \neq F(y)$.

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Przypomnijmy, że X^* jest przestrzenią Banacha, tym bardziej $(X^*)^* = X^{**}$ jest przestrzenią Banacha. Ustalmy $x_0 \in X$. Określamy

$$F_{x_0} : X^* \to \mathbb{C}, \quad F_{x_0}(f) = f(x_0).$$

Zauważmy, że F_{x_0} jest funkcjonałem liniowym oraz

$$|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\| \cdot \|f\|.$$

Stąd F_{x_0} jest funkcjonałem liniowym i ograniczonym, a zatem ciągłym. Ponadto $\|F_{x_0}\| \leqslant \|x_0\|$. Zauważmy również, że z wniosku z twierdzenia Hahna–Banacha dla $x_0 \neq 0$ istnieje $f_0 \in X^*$ o normie 1 taki, że $f_0(x_0) = \|x_0\|$, a więc

$$\|F_{x_0}\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |F_{x_0}(f)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x_0)| \geqslant |f_0(x_0)| = \|x_0\|.$$

Zatem $\|F_{x_0}\| = \|x_0\|$.

W ten sposób otrzymaliśmy odwzorowanie

$$X \ni x \mapsto F_x \in X^{**},$$

które jest liniową izometrią (a więc jest ono również różnowartościowe). Oznaczmy je przez

$$n : X \hookrightarrow X^{**}.$$

Z izometryczności n wynika, że $n(X)$ jest podprzestrzenią domkniętą w X^{**}.

Istotnie, jeśli

$$\lim_{k\to\infty} n(x_k) = F \in X^{**},$$

to $(n(x_k))_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X^{**}. Stąd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X. Zatem $\lim_{k\to\infty} x_k = x \in X$, a ponieważ n jest izometrią, to $\lim_{k\to\infty} n(x_k) = n(x)$. To oznacza, że $F = n(x)$.

Odwzorowanie n nazywamy *kanonicznym zanurzeniem* przestrzeni Banacha w jej drugą przestrzeń sprzężoną.

Definicja. Przestrzeń Banacha X nazywamy przestrzenią *refleksywną*, gdy $n(X) = X^{**}$.

Uwaga. Przestrzeń X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall\, F \in X^{**})\ \ (\exists\, x_0 \in X)\ \ F = F_{x_0}.$$

Przykłady.

1° Każda skończenie wymiarowa przestrzeń Banacha jest refleksywna.

2° Rozważmy przestrzeń $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, a w niej podprzestrzeń Banacha c_0 ciągów zbieżnych do zera. Dla $i \geqslant 1$ niech

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

gdzie 1 występuje na i-tym miejscu oraz niech $\underline{x} = (x_i)_{i=1}^\infty \in c_0$. Mamy

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^\infty x_i e_i, \quad \text{to znaczy} \quad \underline{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Weźmy $f \in (c_0)^*$. Ponieważ f jest liniowy i ciągły, więc

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i, \quad \text{gdzie} \quad a_i = f(e_i). \tag{1}$$

Definiujemy ciąg $\big(z^{(N)}\big)_{N=1}^\infty \subset c_0$ następująco:

$$z^{(N)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots),$$

gdzie $|\alpha_i| = 1$ wybieramy tak, aby $\alpha_i a_i = |a_i|$ dla $i \geqslant 1$. Wówczas

$$\sum_{i=1}^N |a_i| = \sum_{i=1}^N a_i \alpha_i = f\big(z^{(N)}\big) \leqslant \|f\| \cdot \big\|z^{(N)}\big\| = \|f\|.$$

Zatem szereg $\sum_{i=1}^\infty |a_i|$ jest zbieżny. Z drugiej strony jeśli szereg $\sum_{i=1}^\infty |a_i|$ jest zbieżny, to wzór (1) definiuje funkcjonał liniowy i ciągły na c_0^* (wyliczenie normy tego funkcjonału pozostaje jako ćwiczenie). Jako konkluzję otrzymujemy

$$(c_0)^* \cong l^1.$$

3° Można pokazać, że

$$(l^p)^* \cong l^q, \quad \text{gdzie} \quad 1 < p < +\infty \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Stąd wnioskujemy, że l^p jest przestrzenią refleksywną dla $1 < p < +\infty$.

Twierdzenie Riesza–Frécheta. *Niech $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią Hilberta i $f \in H^*$. Wówczas*

$$(\exists!\, y \in H)\ \ (\forall\, x \in H)\ \ f(x) = \langle x, y\rangle.$$

W szczególności przestrzeń Hilberta jest refleksywną przestrzenią Banacha.

Dowód.

1° Istnienie. Jeżeli $f = 0$, to $y = 0$. Natomiast jeżeli $f \neq 0$, to niech $M = \ker f$. Mamy

$$H = M \oplus M^\perp \quad \text{i} \quad \dim M^\perp = 1.$$

Niech $z \in M^\perp$ i $\|z\| = 1$. Wtedy dowolny $x \in H$ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$x = m + \beta z \quad \text{dla} \quad m \in M,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= f(m) + \beta f(z) = \beta f(z) = \langle m, \overline{f(z)} z\rangle + \beta f(z)\langle z, z\rangle = \langle m, \overline{f(z)} z\rangle + \langle \beta z, \overline{f(z)} z\rangle = \\ &= \langle m + \beta z, \overline{f(z)} z\rangle = \langle x, y\rangle, \end{aligned}$$

gdzie $y = \overline{f(z)} z$.

2° Jedyność. Jeśli istnieją $y_1, y_2 \in H$ takie, że $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ dla każdego $x \in H$, to $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$. Stąd biorąc $x = y_1 - y_2$ otrzymujemy $y_1 - y_2 = 0$.

$\square$

Niech $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią Hilberta, $K : H \to H$ zaś operatorem liniowym i ograniczonym. Ustalmy $y \in H$ i rozpatrzmy

$$f(x) = \langle Kx, y\rangle.$$

Zauważmy, że:

- f jest operatorem liniowym,
- f jest ograniczony, gdyż wykorzystując nierówność Schwarza, mamy

$$|f(x)| \leqslant \|Kx\| \cdot \|y\| \leqslant \big(\|K\| \cdot \|y\|\big) \cdot \|x\|.$$

Zatem $f \in H^*$ i z twierdzenia Riesza–Frécheta

$$(\exists!\, y^* \in H)\ \ (\forall\, x \in H)\ \ f(x) = \langle x, y^*\rangle.$$

Niech $K^*y = y^*$. Otrzymujemy

$$\langle Kx, y\rangle = \langle x, K^*y\rangle \tag{2}$$

dla dowolnych $x, y \in H$.

Uwaga. Operator $K^* : H \to H$ jest jedynym operatorem spełniającym (2).

Ćwiczenie. Pokazać, że $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$, $0^* = 0$ oraz $(S+T)^* = S^* + T^*$, $(ST)^* = T^*S^*$ dla dowolnych $S, T \in B(H, H)$.

Twierdzenie. *Niech $K : H \to H$ będzie operatorem liniowym i ograniczonym. Wówczas K^* jest liniowy i ograniczony. Ponadto*

$$\|K^*\| = \|K\| \quad \textit{oraz} \quad K^{**} = K.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $y_1, y_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned}\langle x, K^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\rangle &= \langle Kx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\rangle = \overline{\alpha_1}\langle Kx, y_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle Kx, y_2\rangle = \overline{\alpha_1}\langle x, K^*y_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle x, K^*y_2\rangle = \\ &= \langle x, \alpha_1 K^*y_1 + \alpha_2 K^*y_2\rangle\end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in H$. Zatem K^* jest operatorem liniowym. Pokażemy, że $\|K^*\| \leqslant \|K\|$. Istotnie,

$$\|K^*y\|^2 = \langle K^*y, K^*y\rangle = \langle KK^*y, y\rangle \leqslant \|KK^*y\| \cdot \|y\| \leqslant \|K\| \cdot \|K^*y\| \cdot \|y\|.$$

Stąd $\|K^*y\| \leqslant \|K\| \cdot \|y\|$, a więc $\|K^*\| \leqslant \|K\|$. W szczególności $K^* \in B(H, H)$, a zatem K^{**} jest dobrze zdefiniowany oraz

$$\langle K^*x, y\rangle = \langle x, K^{**}y\rangle$$

dla dowolnych $x, y \in H$. Ponieważ

$$\overline{\langle x, Ky\rangle} = \langle Ky, x\rangle = \langle y, K^*x\rangle = \overline{\langle K^*x, y\rangle},$$

więc

$$\langle x, Ky\rangle = \langle K^*x, y\rangle = \langle x, K^{**}y\rangle.$$

Stąd $K = K^{**}$. Zatem z pierwszej części dowodu $\|K\| = \|K^{**}\| \leqslant \|K^*\|$, a więc $\|K\| = \|K^*\|$. $\square$

Definicja. K^* nazywamy *operatorem sprzężonym* do K.

Przykład. Niech $I = [0,1]$. Rozpatrzmy funkcję $k : I \times I \to \mathbb{C}$ taką, że

$$\iint_{I\times I} |k(s,t)|^2 \, ds \, dt < +\infty.$$

Definiujemy operator Hilberta–Schmidta $K : L^2(I) \to L^2(I)$ wzorem

$$(Kx)(s) = \int_I k(s,t) \cdot x(t) \, dt.$$

Łatwo zauważyć, że jest on liniowy. Ponadto

$$|(Kx)(s)| \leqslant \int_I |k(s,t)| \cdot |x(t)| \, dt \leqslant \left(\int_I |k(s,t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |x(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stąd

$$\|Kx\|_{L^2(I)} = \int_I |(Kx)(s)|^2 \, ds \leqslant \int_I \left(\int_I |k(s,t)|^2 \, dt \cdot \int_I |x(t)|^2 \, dt \right) ds = \|x\|^2_{L^2(I)} \cdot \iint_{I\times I} |k(s,t)|^2 \, ds \, dt.$$

Zatem $\|K\| \leqslant \|k\|_{L^2(I\times I)}$. Wyliczymy teraz K^*. Dla dowolnych $x, y \in L^2(I)$ mamy

$$\langle Kx, y\rangle = \int_I (Kx)(s) \cdot \overline{y(s)} \, ds = \int_I \left(\int_I k(s,t) \cdot x(t) \, dt \right) \overline{y(s)} \, ds = \int_I x(t) \cdot \overline{\int_I \overline{k(s,t)} \cdot y(s) \, ds} \, dt =$$
$$= \left\langle x, \int_I \overline{k(s,\cdot)} y(s) \, ds \right\rangle.$$

Zatem

$$(K^*y)(t) = \int_I k^*(t,s) \cdot y(s) \, ds, \quad \text{gdzie} \quad k^*(t,s) = \overline{k(s,t)}.$$

Przykład. Rozważmy operator Volterry

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t,\tau) \cdot x(\tau) \, d\tau$$

(zakładamy, że k jest całkowalna z kwadratem na odpowiednim trójkącie). Możemy rozszerzyć k kładąc $k(t,\tau) = 0$ dla $t < \tau$. Wtedy z poprzedniego przykładu

$$(K^*y)(t) = \int_0^1 \overline{k(\tau,t)} \cdot y(\tau) \, d\tau = \int_t^1 \overline{k(\tau,t)} \cdot y(\tau) \, d\tau.$$

Zastanówmy się teraz, co to znaczy zdefiniować operator liniowy i ciągły na przestrzeni Hilberta H.

Twierdzenie. *Jeśli* $((\cdot,\cdot)) : H \times H \to \mathbb{C}$ *jest formą półtoraliniową i ograniczoną*

$$(\textit{tzn.} \quad (\exists\, A > 0) \ \ (\forall\, x, y \in H) \ \ |((x,y))| \leqslant A \cdot \|x\| \cdot \|y\|),$$

to istnieje dokładnie jeden operator liniowy i ograniczony $K : H \to H$ *taki, że*

$$((x,y)) = \langle Kx, y\rangle$$

dla dowolnych $x, y \in H$.

Dowód. Ustalmy $x \in H$ i rozpatrzmy

$$f : H \to \mathbb{C}, \quad f(y) = \overline{((x,y))}.$$

Wówczas łatwo sprawdzamy, że f jest funkcjonałem liniowym i ograniczonym, a zatem z twierdzenia Riesza–Frécheta istnieje dokładnie jeden $x^* \in H$ taki, że $f(y) = \langle y, x^*\rangle$. Przyjmując $Kx = x^*$ mamy $f(y) = \langle y, Kx\rangle$, a więc

$$((x,y)) = \overline{f(y)} = \overline{\langle y, Kx\rangle} = \langle Kx, y\rangle. \tag{3}$$

dla dowolnego $y \in H$. Sprawdzimy własności tak zdefiniowanego odwzorowania K.

1° Liniowość. Wystarczy sprawdzić, że dla $x_1, x_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\langle K(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle = \langle \alpha_1 K x_1 + \alpha_2 K x_2, y\rangle$$

dla dowolnego $y \in H$, to znaczy

$$((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y)) = \alpha_1((x_1, y)) + \alpha_2((x_2, y)).$$

2° Ograniczoność. Biorąc $y = Kx$ w (3) mamy

$$\|Kx\|^2 = \langle Kx, Kx\rangle = ((x, Kx)) \leqslant A \cdot \|x\| \cdot \|Kx\|.$$

Zatem $\|Kx\| \leqslant A\|x\|$ dla dowolnego $x \in H$.

□

Ważne klasy operatorów:

- operatory *normalne*, to jest spełniające warunek $KK^* = K^*K$,
- operatory *samosprzężone*, to jest spełniające warunek $K = K^*$,
- operatory *unitarne*, to jest spełniające warunek $K^* = K^{-1}$.

Uwaga. Każdy operator unitarny, czy też samosprzężony jest operatorem normalnym.

Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych. *Niech $K : H \to H$ będzie operatorem normalnym. Wówczas*

$$K = \int_{\mathbb{C}} z\, dE(z). \tag{4}$$

Co oznacza napis (4)? Odwzorowanie $E : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(H)$ działa na σ-algebrze zbiorów borelowskich przestrzeni $\mathbb{C}$ do zbioru projektorów ortogonalnych na H i ma własności miary:

- $E(\emptyset) = 0$,
- $E\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$ dla dowolnego ciągu zbiorów borelowskich parami rozłącznych $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$

(przy czym rozpatrujemy tu silną zbieżność szeregu, tzn. punktową). Zauważmy, że wówczas dla dowolnych $x, y \in H$ odwzorowanie

$$\Delta \mapsto \langle E(\Delta)x, y\rangle \in \mathbb{C}$$

też spełnia powyższe dwie własności, a wręcz

$$\Delta \mapsto \langle E(\Delta)x, x\rangle \in [0, +\infty)$$

jest miarą nieujemną oraz skończoną, gdyż $E(\mathbb{C}) = \mathrm{Id}$, więc $\langle E(\mathbb{C})x, x\rangle = \|x\|^2$. Napis (4) czytamy jako

$$\langle Kx, y\rangle = \int_{\mathbb{C}} z\, d\big(\langle E(\cdot)x, y\rangle\big). \tag{5}$$

Ponadto forma

$$((x, y)) = \int_{\mathbb{C}} z\, d\big(\langle E(\cdot)x, y\rangle\big)$$

jest półtoraliniowa i ograniczona ($|((x, y))| \leqslant |\langle E(\cdot)x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$). Zatem operator K jest wyznaczony przez (5).

Uwaga. Gdy operator K jest unitarny, zamiast $\mathbb{C}$ wstawiamy okrąg $\mathbb{S}^1$, natomiast gdy K jest samosprzężony, całkujemy po $\mathbb{R}$. Ogólnie miary $\langle E(\cdot)x, x\rangle$ skupione są na widmie operatora K, to znaczy zbiorze

$$\sigma(K) := \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \,\mathrm{Id} - K \text{ nie jest odwracalny}\}.$$

WYKŁAD VIII

Poznamy kilka twierdzeń dotyczących operatorów na przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym. *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$ zaś operatorem liniowym i ciągłym takim, że $A(X) = Y$. Wówczas A jest odwzorowaniem otwartym.*

Dowód. Niech
$$B(x, r) = \{z \in X;\ \|z - x\| < r\}$$
dla $x \in X$, $r > 0$ (podobne oznaczenie będzie stosowane w innych przestrzeniach Banacha). Twierdzimy, że
$$0 \in \operatorname{Int}\left(\overline{A\big(B(0, r)\big)}\right). \tag{1}$$
Istotnie, jeśli $y \in Y$, to istnieje $x \in X$ taki, że $Ax = y$ oraz istnieje $k \geqslant 1$ taka, że $x \in B(0, \frac{kr}{2})$. To oznacza, że $y \in A\big(B(0, \frac{kr}{2})\big)$. Stąd
$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A\big(B(0, \tfrac{kr}{2})\big)}.$$
Zatem ponieważ Y jest przestrzenią Banacha, więc z twierdzenie Baire'a wynika, że istnieje $k \geqslant 1$ takie, że zbiór
$$\overline{A\big(B(0, \tfrac{kr}{2})\big)} = k \cdot \overline{A\big(B(0, \tfrac{r}{2})\big)}$$
ma niepuste wnętrze, a więc również
$$V := \operatorname{Int}\left(\overline{A\big(B(0, \tfrac{r}{2})\big)}\right) \neq \emptyset.$$
Niech $y_0 \in V$. Wtedy istnieje $s > 0$ taka, że $B(y_0, s) \subset V$. Niech $y \in Y$, $\|y\| < s$ ($y \in B(0, s)$). Wówczas
$$y + y_0 \in B(y_0, s) \subset V \subset \overline{A\big(B(0, \tfrac{r}{2})\big)}.$$
Zatem istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(0, \frac{r}{2})$ taki, że
$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y + y_0.$$
Ponadto istnieje ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(0, \frac{r}{2})$ taki, że
$$\lim_{n\to\infty} Az_n = y_0.$$
Wtedy $x_n - z_n \in B(0, r)$ oraz
$$\lim_{n\to\infty} A(x_n - z_n) = y.$$
Stąd
$$y \in \overline{A\big(B(0, r)\big)}, \quad \text{tzn. otrzymaliśmy} \quad B(0, s) \subset \overline{A\big(B(0, r)\big)},$$
więc zachodzi (1).

Wykażemy za chwilę, że
$$\overline{A\big(B(0, \tfrac{r}{2})\big)} \subset A\big(B(0, r)\big). \tag{2}$$
Zanim udowodnimy inkluzję (2) pokażemy, że wynika z niej teza twierdzenia. Niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym. Musimy pokazać, że zbiór $A(U)$ też jest otwarty. Niech $x \in U$. Szukamy kuli B o środku w Ax zawartej w $A(U)$. Mamy $0 \in U - x$. Wybieramy $r > 0$ tak, aby $B(0, 2r) \subset U - x$. Wówczas
$$A\big(B(0, 2r)\big) \subset A(U - x) = A(U) - Ax.$$
Stąd
$$A\big(B(0, 2r) + x\big) = A\big(B(0, 2r)\big) + Ax \subset A(U).$$

Z (1) istnieje kula otwarta B_1 o środku w 0 zawarta w $\overline{A\big(B(0,r)\big)}$. Natomiast korzystając z (2) mamy

$$B_1 \subset \overline{A\big(B(0,r)\big)} \subset A\big(B(0,2r)\big).$$

Zatem

$$B_1 + Ax \subset A\big(B(0,2r)\big) + Ax = A\big(B(0,2r)+x\big).$$

Ponieważ $0 \in B_1$, to $Ax \in B_1 + Ax$ i w ten sposób znaleźliśmy $B := B_1 + Ax$.

Przejdźmy do dowodu (2). Ustalmy

$$y_1 \in \overline{A\big(B(0,\tfrac{r}{2})\big)}.$$

Chcemy pokazać, że $y_1 \in A\big(B(0,r)\big)$, tzn. $y_1 = Ax$, gdzie $\|x\| < r$. Z (1) mamy

$$0 \in \operatorname{Int}\left(\overline{A\big(B(0,2^{-2}r)\big)}\right).$$

Stąd

$$\left(y_1 - \overline{A\big(B(0,2^{-2}r)\big)}\right) \cap A\big(B(0,\tfrac{r}{2})\big) \neq \emptyset$$

(pierwszy z tych zbiorów zawiera otoczenie punktu należącego do domknięcia drugiego zbioru). Niech więc $x_1 \in B(0,\frac{r}{2})$ będzie taki, że

$$Ax_1 \in y_1 - \overline{A\big(B(0,2^{-2}r)\big)}.$$

Zatem $Ax_1 = y_1 - y_2$ dla pewnego

$$y_2 \in \overline{A\big(B(0,2^{-2}r)\big)}.$$

Powtarzamy rozumowanie dla y_2, a dokładniej z (1) mamy

$$0 \in \operatorname{Int}\left(\overline{A\big(B(0,2^{-3}r)\big)}\right)$$

i tak dalej. W ten sposób indukcyjnie wybieramy ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ takie, że

(a) $x_n \in B(0,2^{-n}r)$,

(b) $y_n \in \overline{A\big(B(0,2^{-n}r)\big)}$,

(c) $y_{n+1} = y_n - Ax_n$.

Mamy $\|x_n\| < 2^{-n}r$, stąd $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, a więc ponieważ X jest przestrzenią Banacha, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny w X. Oznaczmy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Mamy

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < r,$$

a więc $x \in B(0,r)$. Ponadto z (b)

$$\|y_n\| \leqslant \|A\| \cdot 2^{-n}r,$$

więc w szczególności $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Ponieważ

$$\lim_{N\to\infty} \big(A(x_1) + \cdots + A(x_N)\big) = \lim_{N\to\infty} (y_1 - y_{N+1}) = y_1,$$

więc wykorzystując ciągłość A, mamy

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A(x_n) = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = A(x).$$

$\square$

Wniosek (twierdzenie Banacha o operatorze odwrotnym). *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$ zaś ciągłą, liniową bijekcją. Wówczas odwzorowanie A^{-1} jest ciągłe.*

Dowód. Jeśli U jest zbiorem otwartym w X, to $(A^{-1})^{-1}(U) = A(U)$ jest zbiorem otwartym w Y, gdyż A jest odwzorowaniem otwartym. $\square$

Wniosek. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Załóżmy, że $\|\cdot\|_1$ jest normą na X słabszą niż $\|\cdot\|$ (tzn. jeśli $\|x_n\| \to 0$, to $\|x_n\|_1 \to 0$ dla każdego $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$). Wówczas jeśli $(X, \|\cdot\|_1)$ jest przestrzenią Banacha, to normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ są równoważne.*

Dowód. Odwzorowanie $\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_1)$ jest ciągłe, więc Id^{-1} też jest ciągłe. $\square$

Wniosek. *Niech $(X, \|\cdot\|)$, $(X, \|\cdot\|_1)$ będą przestrzeniami Banacha. Załóżmy, że zbiory funkcjonałów liniowych i ciągłych dla obu norm są takie same. Wówczas normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ są równoważne.*

Dowód. Określamy
$$\|x\|_2 = \|x\| + \|x\|_1$$
dla $x \in X$. Wtedy $\|\cdot\|_2$ jest silniejsza od każdej z norm $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$. Wykażemy, że $(X, \|\cdot\|_2)$ jest przestrzenią Banacha. Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ będzie ciągiem Cauchy'ego dla $\|\cdot\|_2$. Jest on więc również ciągiem Cauchy'ego dla $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_1$. Zatem istnieją $x, x' \in X$ takie, że
$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \quad \text{oraz} \quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x'.$$
Wystarczy pokazać, że $x = x'$. Gdyby $x \neq x'$, to istniałby funkcjonał liniowy i ciągły (względem $\|\cdot\|$) f taki, że $f(x) \neq f(x')$ (oraz f jest ciągły również względem $\|\cdot\|_1$). Mielibyśmy więc
$$f(x_n) \to f(x) \quad \text{oraz} \quad f(x_n) \to f(x'),$$
a stąd $f(x) = f(x')$, co oznacza sprzeczność. $\square$

Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Wówczas na przestrzeni $X \times Y$ możemy określić normę wzorem
$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$
otrzymując przestrzeń Banacha. Niech $A : X \to Y$ będzie operatorem liniowym oraz
$$G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y;\ x \in X\}.$$
Zbiór $G(A)$ jest podprzestrzenią liniową w $X \times Y$.

Uwaga. Jeśli A jest operatorem ciągłym, to $G(A)$ jest podzbiorem domkniętym w $X \times Y$.

Twierdzenie o domkniętym wykresie. *Jeśli zbiór $G(A)$ jest domknięty w $X \times Y$, to operator liniowy A jest ciągły.*

Dowód. Określmy odwzorowanie
$$\Pi : G(A) \to X, \quad \Pi(x, Ax) = x.$$
Zauważmy, że $G(A)$ jest przestrzenią Banacha jako domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni Banacha $X \times Y$. Oczywiście Π jest operatorem liniowym i ciągłym. Ponadto Π jest bijekcją, więc teza wynika z twierdzenia Banacha o operatorze odwrotnym: jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ w przestrzeni X, to
$$\left(\lim_{n\to\infty} \Pi^{-1}(x_n) = \Pi^{-1}(x)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) = (x, Ax)\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax\right).$$
$\square$

Uwaga. Jak powyższe twierdzenie można zastosować?
Przy sprawdzaniu ciągłości operatora A, wystarczy tylko pokazać, że wykres jest domknięty, tzn.
$$\text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) = (x, y), \quad \text{to} \quad y = Ax.$$
Zatem oprócz warunku $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ możemy dodatkowo zakładać, że ciąg $(Ax_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Twierdzenie (zasada jednostajnej ograniczoności). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y przestrzenią unormowaną, $\mathcal{A} \subset B(X,Y)$. Załóżmy, że*

$$(\forall\, x \in X) \quad \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\| < +\infty.$$

Wówczas

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < +\infty.$$

Dowód. Określmy odwzorowanie

$$M : X \to [0, +\infty), \quad M(x) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|.$$

Mamy

$$\|Ax\| \leqslant M(x) \tag{3}$$

dla dowolnych $A \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Przypuśćmy, że $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| = +\infty$. Istnieją zatem ciągi $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ takie, że

$$\|z_n\| = 1 \quad \text{oraz} \quad \|A_n z_n\| > 4^n$$

dla $n \geqslant 1$. Niech $x_n = 2^{-n} z_n$. Mamy więc

$$\|x_n\| = \frac{1}{2^n} \quad \text{oraz} \quad \|A_n x_n\| > 2^n$$

dla $n \geqslant 1$. Pokażemy, że możemy wybrać podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tak, aby dla $k \geqslant 1$

(a) $\|A_{n_{k+1}} x_{n_{k+1}}\| > 1 + k + \sum_{j=1}^{k} M(x_{n_j})$,

(b) $\|x_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{\max\{\|A_{n_j}\|;\ j = 1, \ldots, k\}}$.

Ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ wybieramy indukcyjnie (n_1 jest dowolne). Jeśli wybraliśmy $n_1, \ldots, n_k$, to prawe strony nierówności (a) i (b) są określone. Więc n_{k+1} wybieramy tak, aby (a) i (b) były spełnione. Ponieważ X jest przestrzenią Banacha i szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k}\|$ jest zbieżny, więc możemy zdefiniować

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}.$$

Dla dowolnego $k \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
\|A_{n_{k+1}} x\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A_{n_{k+1}} x_{n_j} \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} A_{n_{k+1}} x_{n_j} + A_{n_{k+1}} x_{n_{k+1}} + \sum_{j=k+2}^{\infty} A_{n_{k+1}} x_{n_j} \right\| \geqslant \\
&\geqslant \|A_{n_{k+1}} x_{n_{k+1}}\| - \left\| \sum_{j=1}^{k} A_{n_{k+1}} x_{n_j} + \sum_{j=k+2}^{\infty} A_{n_{k+1}} x_{n_j} \right\| \geqslant \\
&\overset{(a)}{\geqslant} 1 + k + \sum_{j=1}^{k} M(x_{n_j}) - \left\| \sum_{j=1}^{k} A_{n_{k+1}} x_{n_j} + \sum_{j=k+2}^{\infty} A_{n_{k+1}} x_{n_j} \right\|.
\end{aligned}$$

Ale z (3)

$$\|A_{n_{k+1}} x_{n_j}\| \leqslant M(x_{n_j}) \quad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Ponadto

$$\|A_{n_{k+1}} x_{n_j}\| \leqslant \|A_{n_{k+1}}\| \cdot \|x_{n_j}\| \quad \text{dla} \quad j = k+2, k+3, \ldots.$$

Zatem

$$\|A_{n_{k+1}} x\| \geqslant 1 + k + \sum_{j=1}^{k} M(x_{n_j}) - \left(\sum_{j=1}^{k} M(x_{n_j}) + \sum_{j=k+2}^{\infty} \|A_{n_{k+1}}\| \cdot \|x_{n_j}\| \right) = 1 + k - \|A_{n_{k+1}}\| \sum_{j=k+2}^{\infty} \|x_{n_j}\|.$$

Ale z (b)

$$\|x_{n_{k+2}}\| < \frac{1}{2^{k+2}} \cdot \frac{1}{\|A_{n_{k+1}}\|},$$
$$\|x_{n_{k+3}}\| < \frac{1}{2^{k+3}} \cdot \frac{1}{\|A_{n_{k+1}}\|},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Stąd

$$\|A_{n_{k+1}}x\| \geqslant 1 + k - \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j} \geqslant k.$$

Zatem

$$\sup_{k\geqslant 1} \|A_{n_k}x\| = +\infty,$$

co daje nam sprzeczność. □

Wniosek (twierdzenie Banacha–Steinhausa). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y przestrzenią unormowaną, $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(X,Y)$. Załóżmy, że*

$$(\forall\, x \in X) \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax.$$

Wówczas $A \in B(X,Y)$ oraz

$$\sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| < +\infty \quad i \quad \|A\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|A_n\|.$$

Dowód. A jest oczywiście operatorem liniowym. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \|Ax\|$, więc

$$\sup_{n\geqslant 1} \|A_n x\| < +\infty$$

dla dowolnego $x \in X$. Stąd rodzina $\mathcal{A} = \{A_n;\ n \geqslant 1\}$ spełnia założenia zasady jednostajnej ograniczoności. Zatem

$$\sup_{n\geqslant 1} \|A_n\| = M < +\infty.$$

Jeśli $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, to

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax - A_n x\| + \|A_n x\| \leqslant \|Ax - A_n x\| + \|A_n\| \leqslant \|Ax - A_n x\| + M \xrightarrow[n\to\infty]{} M,$$

więc $\|Ax\| \leqslant M$. Stąd $\|A\| \leqslant M$. □

WYKŁAD IX

Sformułujemy jeszcze dwa wnioski.

Wniosek. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $A \subset X$. Wówczas A jest zbiorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall\, f \in X^*) \quad \sup_{x\in A} |f(x)| < +\infty.$$

Dowód.

⇒: Istnieje $M > 0$ takie, że $\|x\| \leqslant M$ dla $x \in A$. Stąd jeśli $f \in X^*$, to

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant \|f\| \cdot M.$$

$\Leftarrow$: Rozpatrzmy kanoniczne zanurzenie (będące izometrią)

$$n : X \hookrightarrow X^{**} = B(X, \mathbb{C})^* = B(X^*, \mathbb{C}).$$

Mamy $n(x) = \hat{x}$, gdzie $\hat{x}(f) = f(x)$ dla $f \in X^*$. Ponieważ z założenia wynika, że

$$(\forall\, f \in X^*) \quad \sup_{\hat{x} \in n(A)} |\hat{x}(f)| < +\infty,$$

więc wykorzystując zasadę jednostajnej ograniczoności mamy

$$\sup_{\hat{x} \in n(A)} \|\hat{x}\| < +\infty.$$

Zatem zbiór A jest ograniczony.

$\square$

Wniosek. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $A \subset X^*$. Wówczas A jest zbiorem ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall\, x \in X) \quad \sup_{f \in A} |f(x)| < +\infty.$$

Dowód.

$\Rightarrow$: Istnieje $M > 0$ takie, że $\|f\| \leqslant M$ dla $f \in A$. Stąd jeśli $x \in X$, to

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \leqslant M \cdot \|x\|.$$

$\Leftarrow$: Teza wynika z tego, że A jest pewną rodziną funkcjonałów liniowych i ciągłych spełniających zasadę jednostajnej ograniczoności.

$\square$

Słabe topologie

Niech X będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$) i niech $\Gamma \subset X'$, tzn. Γ jest pewną rodziną funkcjonałów liniowych określonych na X. Zakładamy przy tym, że

- Γ jest liniowa, tzn.
$$(\forall\, f, g \in \Gamma) \;\; (\forall\, \alpha \in \mathbb{C}) \;\; f + g \in \Gamma, \; \alpha f \in \Gamma,$$
- Γ jest totalna, tzn.
$$(\forall\, x \in X) \;\; \Big(\big((\forall\, f \in \Gamma) \;\; f(x) = 0 \big) \Rightarrow \big(x = 0 \big) \Big).$$

Drugi warunek oznacza, że Γ rozdziela punkty przestrzeni X, gdyż dla $x_1, x_2 \in X$

$$\big(x_1 \neq x_2\big) \Rightarrow \big(x_1 - x_2 \neq 0\big) \Rightarrow \big((\exists\, f \in \Gamma) \;\; f(x_1 - x_2) \neq 0\big) \Rightarrow \big((\exists\, f \in \Gamma) \;\; f(x_1) \neq f(x_2)\big).$$

Określamy rodzinę podzbiorów przestrzeni X:

$$U_{f_1,\ldots,f_n}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{x \in X;\; |f_i(x)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

gdzie $\varepsilon_i > 0$, $f_i \in \Gamma$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $n \geqslant 1$. Zauważmy, że

(a) $0 \in U_{f_1,\ldots,f_n}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$,

(b) przekrój skończonej liczby zbiorów postaci (1) jest zbiorem tej samej postaci:

$$U_{f_1,\ldots,f_n}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \cap U_{f_1',\ldots,f_m'}^{\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_m'} = U_{f_1,\ldots,f_n,f_1',\ldots,f_m'}^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_m'}.$$

Ponadto

(c) jeśli $z \in U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$ oraz $0 < \varepsilon'_i < \varepsilon_i - |f_i(z)|$ dla $i = 1, \dots, n$, to $z + U^{\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n}_{f_1,\dots,f_n} \subset U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$.

Następnie w dowolnym punkcie $x \in X$ rozpatrujemy rodziny postaci

$$x + U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}.$$

W ten sposób na X wprowadzamy pewną topologię zwaną *Γ-topologią*. Robimy to poprzez podanie bazy otoczeń w dowolnym punkcie tej przestrzeni, to znaczy przez podanie dla każdego $x \in X$ rodziny zbiorów $\mathcal{B}(x)$ spełniającej warunki:

(A) $\Big(\mathcal{B}(x) \neq \emptyset\Big) \wedge \Big(\big(U \in \mathcal{B}(x)\big) \Rightarrow \big(x \in U\big)\Big)$,

(B) $\Big(x \in U \in \mathcal{B}(y)\Big) \Rightarrow \Big((\exists\, V \in \mathcal{B}(x))\ \ V \subset U\Big)$,

(C) $\Big(U_1 \in \mathcal{B}(x), U_2 \in \mathcal{B}(x)\Big) \Rightarrow \Big((\exists\, U \in \mathcal{B}(x))\ \ U \subset U_1 \cap U_2\Big)$.

W rozpatrywanej sytuacji warunki (A), (B), (C) wynikają odpowiednio z własności (a), (c), (b).

Lemat. *W określonej powyżej topologii mamy*

(i) *działania* $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ *są ciągłe,*

(ii) X *jest przestrzenią Hausdorffa,*

(iii) *istnieje baza otoczeń zera składająca się ze zbiorów wypukłych.*

Dowód.

(i) Niech $x_0, y_0 \in X$. Weźmy dowolne otoczenie punktu $x_0 + y_0$. Zawiera się w nim otoczenie postaci

$$x_0 + y_0 + U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}.$$

Jeśli weźmiemy teraz

$$x_0 + U^{\frac{\varepsilon_1}{2},\dots,\frac{\varepsilon_n}{2}}_{f_1,\dots,f_n}, \quad y_0 + U^{\frac{\varepsilon_1}{2},\dots,\frac{\varepsilon_n}{2}}_{f_1,\dots,f_n},$$

to

$$\left(x_0 + U^{\frac{\varepsilon_1}{2},\dots,\frac{\varepsilon_n}{2}}_{f_1,\dots,f_n}\right) + \left(y_0 + U^{\frac{\varepsilon_1}{2},\dots,\frac{\varepsilon_n}{2}}_{f_1,\dots,f_n}\right) \subset x_0 + y_0 + U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n},$$

co dowodzi ciągłości dodawania.

Przejdźmy do dowodu ciągłości mnożenia przez skalary. Ustalmy $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \in X$. Bierzemy otoczenie punktu $\lambda_0 x_0$

$$\lambda_0 x_0 + U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}.$$

Szukamy $\delta > 0$ oraz $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m > 0$, $f'_1, \dots, f'_m \in \Gamma$ tak, aby

$$\left(\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta),\ x \in x_0 + U^{\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_m}_{f'_1,\dots,f'_m}\right) \Rightarrow \left(\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}\right),$$

tzn. chcemy otrzymać

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n},$$

albo równoważnie

$$|f_i(\lambda x - \lambda_0 x_0)| < \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n,$$

co z kolei jest równoważne warunkowi

$$|\lambda f_i(x) - \lambda_0 f_i(x_0)| < \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Zatem odpowiednie otoczenie punktu x_0 będzie miało postać

$$U^{\varepsilon'_1,\dots,\varepsilon'_n}_{f_1,\dots,f_n},$$

przy czym $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n > 0$ oraz $\delta > 0$ dobieramy tak, aby spełnione były nierówności (2) (tzn. te nierówności mają być spełnione, jeśli $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon'_i$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $|\lambda - \lambda_0| < \delta$).

(ii) Wystarczy pokazać, że $x \neq 0$ oraz 0 można rozdzielić zbiorami otwartymi w Γ-topologii. Wiemy, że istnieje $f \in \Gamma$ taki, że $f(x) \neq 0$. Weźmy $0 < \varepsilon < \frac{|f(x)|}{2}$. Twierdzimy, że

$$(x + U_f^\varepsilon) \cap U_f^\varepsilon = \emptyset.$$

Jeśliby $y \in (x + U_f^\varepsilon) \cap U_f^\varepsilon$, to $y = x + z = z'$, gdzie $z, z' \in U_f^\varepsilon$. Stąd

$$|f(x)| = |f(z') - f(z)| < |f(z')| + |f(z)| < 2\varepsilon < |f(x)|$$

i otrzymujemy sprzeczność.

(iii) Zbiory $U_{f_1,\dots,f_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ są wypukłe, gdyż jeśli $x, y \in U_{f_1,\dots,f_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, to

$$|f_i(tx + (1-t)y)| = |tf_i(x) + (1-t)f_i(y)| \leqslant t|f_i(x)| + (1-t)|f_i(y)| < t\varepsilon_i + (1-t)\varepsilon_i = \varepsilon_i$$

dla $i = 1, \dots, n$.

$\square$

Definicja. Przestrzeń liniową, w której określono topologię spełniającą (i) oraz (ii) nazywamy przestrzenią *liniowo-topologiczną*. Jeśli dodatkowo spełniony jest warunek (iii), to otrzymaną przestrzeń liniowo-topologiczna nazywamy *lokalnie wypukłą*.

Lemat. *Funkcjonał liniowy f na X jest ciągły w Γ-topologii wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \Gamma$.*

Dowód.

$\Leftarrow$: Łatwo sprawdzić, że jeśli funkcjonał liniowy f jest ciągły w jednym punkcie, to jest ciągły w dowolnym punkcie (względem Γ-topologii). Jeśli $f \in \Gamma$, to U_f^ε jest otoczeniem zera dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$. Zatem ciągłość f w zerze wynika z określenia zbiorów U_f^ε.

$\Rightarrow$: Wykażemy najpierw prawdziwość następującego stwierdzenia:

$$\left(f, g_1, \dots, g_n \in X' \wedge \ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i \right) \Rightarrow \left((\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \;\; f = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \right). \tag{3}$$

Powyższego stwierdzenia dowodzimy indukcyjnie. Dla $n = 1$ już zostało ono udowodnione (funkcjonał liniowy jest wyznaczony przez swoje jądro z dokładnością do przemnożenia przez stałą). Załóżmy więc, że

$$\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n+1} \ker g_i,$$

przy czym możemy zakładać, że $g_{n+1} \neq 0$. Mamy

$$\ker f \cap \ker g_{n+1} \supset \bigcap_{i=1}^{n} (\ker g_i \cap \ker g_{n+1}),$$

to znaczy

$$\ker f|_{\ker g_{n+1}} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i|_{\ker g_{n+1}}.$$

Stosujemy założenie indukcyjne do $\ker f|_{\ker g_{n+1}}$, $\ker g_i|_{\ker g_{n+1}}$ dla $i = 1, \dots, n$ i otrzymujemy

$$(\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}) \;\; f|_{\ker g_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(g_i|_{\ker g_{n+1}} \right).$$

Zatem

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \right)\Bigg|_{\ker g_{n+1}} = 0.$$

Stąd stosując (3) dla $n = 1$ mamy

$$\left(\ker g_{n+1} \subset \ker \left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right)\right) \Rightarrow \left((\exists\, a_{n+1} \in \mathbb{C}) \;\; a_{n+1} g_{n+1} = f - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right),$$

co kończy dowód stwierdzenia (3).

Załóżmy teraz, że f jest ciągły w Γ-topologii. Z ciągłości f w zerze istnieje takie otoczenie zera $U = U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$, że $|f(x)| < 1$ dla $x \in U$. Niech

$$X_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \{x \in X;\; f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\}.$$

Ponieważ $X_0 \subset U$, więc f jest ograniczony jako funkcja na X_0. Ponadto X_0 jest podprzestrzenią liniową. Stąd wynika, że $f = 0$, tzn. $f|_{X_0} = 0$. Zatem

$$\left(\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i\right) \overset{(3)}{\Rightarrow} \left(f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \Gamma\right).$$

□

Lemat. *Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi z odpowiednio Γ_X i Γ_Y -topologiami. Wówczas operator liniowy $A : X \to Y$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall\, f \in \Gamma_Y) \;\; f \circ A \in \Gamma_X.$$

Dowód.

$\Rightarrow$: Jeśli $f \in \Gamma_Y$, to f jest ciągły w Γ_Y-topologii. Wówczas jeśli A jest ciągły, to $f \circ A : X \to \mathbb{C}$ jest ciągły w Γ_X-topologii. Zatem $f \circ A \in \Gamma_X$.

$\Leftarrow$: Zauważmy, że dla $f_1, \dots, f_n \in \Gamma_Y$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$

$$A^{-1}\left(U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}\right) = U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1\circ A,\dots,f_n\circ A},$$

gdyż

$$x \in A^{-1}\left(U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}\right) \Leftrightarrow Ax \in U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n} \Leftrightarrow |f_1(Ax)| < \varepsilon_1, \dots, |f_n(Ax)| < \varepsilon_n \Leftrightarrow x \in U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1\circ A,\dots,f_n\circ A}.$$

□

Podamy teraz dwa podstawowe przykłady Γ-topologii.

Uwaga. Jeśli X jest przestrzenią Banacha nieskończonego wymiaru, to domknięta kula jednostkowa w X nie jest zbiorem zwartym. Próbujemy zadać słabszą (niż topologia zadana przez normę) topologię, w której:

- $f \in X^*$ jest w dalszym ciągu ciągły,
- $\{x \in X;\; \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem zwartym.

1° $\Gamma = X^*$, gdzie X jest przestrzenią Banacha (z twierdzenia Hahna–Banacha wynika, że Γ jest totalna). Otrzymaną w ten sposób topologię przestrzeni X nazywamy *słabą topologią*.

Zauważmy, że Γ-topologia jest słabsza niż topologia normy, gdyż zbiory postaci $U^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$ są otwarte w normie, co wynika z ciągłości funkcjonałów $f_1, \dots, f_n \in X^*$. Ponadto zbiór funkcjonałów liniowych i ciągłych w słabej topologii to wciąż X^*. Zobaczymy, że słaba topologia w niektórych przypadkach daje również zwartość domkniętych kul jednostkowych.

2° Rozpatrzmy przestrzeń X^*, przy założeniu, że X jest przestrzenią Banacha. Mamy

$$X \subset (X^*)^* = X^{**} \quad (\text{właściwie } n(X) \subset X^{**}).$$

Zauważmy, że X (dokładnie $\Gamma = n(X)$) jest rodziną totalną

$$\big(f \neq g\big) \Rightarrow \big((\exists\, x \in X) \;\; f(x) \neq g(x)\big)$$

dla $f, g \in X^*$. Otrzymaną w ten sposób Γ-topologię przestrzeni X^* nazywamy *$*$-słabą topologią* (przestrzeni X^*).

Ćwiczenie. Pokazać, że $*$-słaba topologia na X^* jest słabsza od słabej topologii na X^*, a ta jest słabsza od topologii normy na X^*.

Uwaga. Słabe topologie wyprowadzają nas w świat ogólniejszych struktur niż badane przez nas uprzednio struktury liniowo-metryczne. Mamy na przykład

- jeśli X jest przestrzenią Banacha nieskończonego wymiaru, to słaba topologia nie jest metryzowalna.

Istotnie, załóżmy, że d jest szukaną metryką. Wówczas

$$(\forall\, n \geqslant 1) \;\; (\exists\, f_1^{(n)}, \dots, f_{k_n}^{(n)} \in X^*) \;\; (\exists\, \varepsilon_1^{(n)}, \dots, \varepsilon_{k_n}^{(n)} > 0) \;\; B_d(0, \tfrac{1}{n}) \supset U^{\varepsilon_1^{(n)}, \dots, \varepsilon_{k_n}^{(n)}}_{f_1^{(n)}, \dots, f_{k_n}^{(n)}} \supset U^{\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n}_{f_1^{(n)}, \dots, f_{k_n}^{(n)}},$$

gdzie $\varepsilon_n = \min\{\varepsilon_1^{(n)}, \dots, \varepsilon_{k_n}^{(n)}\}$. W ten sposób otrzymujemy rodzinę

$$\Big\{f_i^{(n)};\; i = 1, \dots, k_n,\; n \geqslant 1\Big\} \subset X^*,$$

która jest przeliczalna. Weźmy teraz dowolny $f \in X^*$. Wówczas dla pewnego $n \geqslant 1$

$$U_f^1 \supset B_d(0, \tfrac{1}{n}),$$

a więc

$$\{x \in X;\; |f(x)| < 1\} \supset U^{\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n}_{f_1^{(n)}, \dots, f_{k_n}^{(n)}} \supset \bigcap_{i=1}^{k_n} \ker f_i^{(n)}.$$

Stąd f jest ograniczony (jako funkcja) na $\bigcap_{i=1}^{k_n} \ker f_i^{(n)}$. Zatem f jest zerem na $\bigcap_{i=1}^{k_n} \ker f_i^{(n)}$ i mamy

$$\left(\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{k_n} \ker f_i^{(n)}\right) \Rightarrow \left((\exists\, a_1, \dots, a_{k_n} \in \mathbb{C}) \;\; f = \sum_{i=1}^{k_n} a_i f_i^{(n)}\right).$$

Niech

$$F_n = \operatorname{span}\Big\{f_1^{(1)}, \dots, f_{k_1}^{(1)}, \dots, f_1^{(n)}, \dots, f_{k_n}^{(n)}\Big\} \subset X^*$$

dla $n \geqslant 1$. Wykazaliśmy, że

$$X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Ponieważ wymiar przestrzeni F_n jest skończony, więc F_n jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha X^* dla $n \geqslant 1$. Ponadto X^* ma nieskończony wymiar (w przeciwnym przypadku $(X^*)^* = X^{**}$ miałaby skończony wymiar, co jest niemożliwe, gdyż w X^{**} można zanurzyć X). Zatem F_n jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni X^*. Wynika stąd, że $\operatorname{Int} F_n = \emptyset$ dla $n \geqslant 1$ (gdyby w F_n zawarty był niepusty zbiór otwarty, to F_n zawierałby otoczenie zera, które przemnożone przez dowolny skalar również byłoby zawarte w F_n), co daje sprzeczność z twierdzeniem Baire'a.

Twierdzenie. *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A : X \to Y$ zaś funkcjonałem liniowym i ciągłym. Wówczas A jest słabo ciągły.*

Dowód. Teza wynika z odpowiedniego lematu charakteryzującego ciągłość operatorów liniowych dla Γ-topologii. □

Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, $A \in B(X, Y)$. Określmy $A^* : Y^* \to X^*$ wzorem $A^* f = f \circ A$. Zauważmy, że A^* jest liniowy i ciągły (tzn. ograniczony)

$$\|A^* f\| = \|f \circ A\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|f\|.$$

Ćwiczenie. Wykazać, że A^* jest ciągły w $*$-słabych topologiach.

WYKŁAD X

Twierdzenie. *Niech Γ będzie pewną przestrzenią liniową. Oznaczmy $X = \Gamma'$. Na X rozpatrujemy Γ-topologię (Γ działa na X poprzez ewaluacje: $\gamma(x) = x(\gamma)$). Niech $c : \Gamma \to [0, +\infty)$. Wówczas zbiór*

$$K = \{x \in X;\ (\forall\, \gamma \in \Gamma)\ \ |x(\gamma)| \leqslant c(\gamma)\}$$

jest zwarty w Γ-topologii.

Dowód. Połóżmy

$$I(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leqslant c(\gamma)\}.$$

$I(\gamma)$ jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}$. Rozpatrzmy zbiór

$$I = \prod_{\gamma \in \Gamma} I(\gamma)$$

z topologią produktową. Z twierdzenia Tichonowa wynika, że I jest zbiorem zwartym. Określamy

$$T : K \to I, \quad Tx = (x(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}.$$

1° T jest odwzorowaniem różnowartościowym.
Istotnie,

$$\big(Tx = Ty\big) \Rightarrow \big((\forall\, \gamma \in \Gamma)\ \ x(\gamma) = y(\gamma)\big) \Rightarrow \big(x = y\big)$$

dla $x, y \in X$.

2° T jest odwzorowaniem ciągłym (na K rozpatrujemy obcięcie Γ-topologii).
Istotnie, niech V będzie zbiorem pochodzącym z definiującej topologię produktową bazy:

$$V = \{(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in I;\ |x_{\gamma_i} - a_i| < \delta_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\} \quad (a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C},\, \delta_1, \ldots, \delta_N > 0,\, N \geqslant 1).$$

Wówczas

$$T^{-1}V = \{x \in K;\ |x(\gamma_i) - a_i| < \delta_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\}.$$

Niech $x \in T^{-1}V$, a więc $|x(\gamma_i) - a_i| < \delta_i$ dla $i = 1, \ldots, N$. Chcemy pokazać, że istnieje otoczenie zera W w Γ-topologii takie, że jeśli $y \in W$, to

$$|x(\gamma_i) + y(\gamma_i) - a_i| < \delta_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N,$$

co jest oczywiście możliwe, gdy

$$W = \{y \in X;\ |y(\gamma_i)| < \eta_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\}$$

przy odpowiednio dobranych $\eta_1, \ldots, \eta_N > 0$.

3° $T^{-1} : TK \to K$ jest odwzorowaniem ciągłym (na TK rozpatrujemy topologię indukowaną).
Weźmy otoczenie w Γ-topologii punktu $x \in K$:

$$\{y \in K;\ |x(\gamma_i) - y(\gamma_i)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\} \quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \Gamma,\, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N > 0,\, N \geqslant 1).$$

Mamy

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\right)^{-1} \big(\{y \in K;\ |x(\gamma_i) - y(\gamma_i)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\}\big) =\\ = \{(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in TK;\ |x(\gamma_i) - x_{\gamma_i}| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, N\},\end{aligned}$$

tzn. otrzymaliśmy przekrój otoczenia w topologii produktowej punktu $(x(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ ze zbiorem TK.

4° Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że TK jest podzbiorem domkniętym w I (zbiór K jest homeomorficzny z TK).
Dla $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\alpha \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in I;\ x_{\gamma_1+\gamma_2} = x_{\gamma_1} + x_{\gamma_2}\},$$
$$B(\alpha, \gamma) = \{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in I;\ x_{\alpha\gamma} = \alpha x_\gamma\}.$$

Oczywiście odwzorowanie

$$\pi_{\gamma'} : I \to \mathbb{C}, \quad \pi_{\gamma'}\big((x(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}\big) = x_{\gamma'}$$

jest ciągłe. Stąd $A(\gamma_1, \gamma_2)$, $B(\alpha, \gamma)$ są zbiorami domkniętymi. Ponadto

$$TK = \bigcap_{\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma} A(\gamma_1, \gamma_2) \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma,\alpha\in\mathbb{C}} B(\alpha, \gamma).$$

Istotnie, sprawdźmy, że zachodzą odpowiednie inkluzje.

$\subset$: Jeśli $x \in K$, to x jest funkcjonałem liniowym i stąd

$$Tx \in \bigcap_{\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma} A(\gamma_1, \gamma_2) \cap \bigcap_{\gamma\in\Gamma,\alpha\in\mathbb{C}} B(\alpha, \gamma).$$

$\supset$: Jeśli $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in I$ ma własności

$$x_{\gamma_1+\gamma_2} = x_{\gamma_1} + x_{\gamma_2}, \quad x_{\alpha\gamma} = \alpha x_\gamma$$

dla dowolnych $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\alpha \in \mathbb{C}$, to istnieje $x \in X$ taki, że $x(\gamma) = x_\gamma$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$. Zatem $Tx = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ i $x \in K$.

□

Niech Y będzie przestrzenią unormowaną, $X = Y^*$. Na $X \subset Y'$ rozpatrujemy daną przez ewaluacje Y-topologię, czyli $*$-słabą topologię.

Wniosek (twierdzenie Banacha–Alaoglu). *Domknięta kula jednostkowa w $X = Y^*$ jest zbiorem zwartym w $*$-słabej topologii.*

Dowód. Zauważmy, że

$$K := \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\} = \{x \in Y';\ (\forall\, y \in Y)\ \ |x(y)| \leqslant \|y\|\}.$$

Teza wynika z poprzedniego twierdzenia (dla $\Gamma = Y$, $c(y) = \|y\|$). □

Wniosek. *Jeśli X jest refleksywną przestrzenią Banacha, to kula $\{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ jest zbiorem zwartym w słabej topologii.*

Dowód. Teza wynika z tego, że X^* definiuje słabą topologię na X przez bazę otoczeń zera składającą się ze zbiorów postaci

$$\{x \in X;\ |f_i(x)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, n\} \quad (f_1, \ldots, f_n \in X^*,\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0,\ n \geqslant 1),$$

jak również X^* definiuje $*$-słabą topologię na $(X^*)^* = n(X)$ przez bazę otoczeń zera składającą się ze zbiorów postaci

$$\{n(x) \in X^{**};\ |n(x)(f_i)| = |f_i(x)| < \varepsilon_i \text{ dla } i = 1, \ldots, n\}.$$

□

Uwaga. Z ostatniego wniosku wynika, że domknięta kula jednostkowa jest zwarta w słabej topologii w przestrzeniach Hilberta, a także w przestrzeniach $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

Wniosek. *Jeśli X jest refleksywną przestrzenią Banacha, $f \in X^*$, to wartość $\|f\|$ jest osiągana na domkniętej kuli jednostkowej.*

Dowód. Ponieważ
$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)|,$$
więc teza wynika z ciągłości f na zbiorze zwartym w słabej topologii. $\square$

Twierdzenia o rozdzielaniu.

Będziemy zakładać, że X jest rzeczywistą przestrzenią liniową.

Lemat. *Niech X będzie przestrzenią Banacha (ze słabą topologią). Załóżmy, że $G \subset X$ jest niepustym, otwartym, wypukłym podzbiorem nie zawierającym zera. Wówczas istnieje $f \in X^*$ taki, że*
$$\ker f \cap G = \emptyset.$$

Uwaga. Funkcjonał f z tezy lematu spełnia wtedy warunek:

- albo $f(x) < 0$ dla każdego $x \in G$, albo $f(x) > 0$ dla każdego $x \in G$.

Istotnie, jeśli istniałyby elementy $x_1, x_2 \in G$ takie, że $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$, to ponieważ funkcjonał f jest ciągły, istniałby $x \in \{(1-t)x_1 + tx_2;\ t \in (0,1)\} \subset G$ taki, że $f(x) = 0$.

Dowód lematu. Weźmy $x_0 \in G$ i połóżmy $H := x_0 - G$. Wówczas H jest otwartym, wypukłym zbiorem zawierającym zero. Z dowodu twierdzenia Kołmogorowa istnieje funkcjonał Banacha $p : X \to \mathbb{R}$ taki, że
$$H = \{x \in X;\ p(x) < 1)\}$$
(p jest funkcjonałem Minkowskiego zbioru H, zatem w szczególności przyjmuje tylko wartości nieujemne). Ponieważ $0 \notin G$, więc $x_0 \notin H$. Stąd $p(x_0) \geqslant 1$. Określamy funkcjonał liniowy na przestrzeni $\mathbb{R}x_0$ wzorem
$$f_0 : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}, \quad f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0).$$
Jeśli $\alpha \geqslant 0$, to
$$f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0),$$
natomiast jeśli $\alpha < 0$, to
$$f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) \leqslant \alpha < 0 \leqslant p(\alpha x_0).$$
Zatem $f_0 \leqslant p|_{\mathbb{R}x_0}$. Z twierdzenia Hahna–Banacha istnieje rozszerzenie funkcjonału f_0 do $f : X \to \mathbb{R}$, przy czym $f \leqslant p$ na X.

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór
$$\varepsilon H = \{x \in X;\ p(x) < \varepsilon\}$$
jest otwartym, wypukłym otoczeniem zera. Niech $(x_i)_{i \in I}$ będzie ciągiem uogólnionym zmierzającym do zera ($(I, \succ)$ jest zbiorem skierowanym, tzn. $\succ$ jest zwrotną, przechodnią relacją w I taką, że $(\forall\, i_1, i_2 \in I)\ (\exists\, j \in I)\ j \succ i_1,\ j \succ i_2$). Wówczas
$$(\exists\, i_0 \in I)\ \ (\forall\, i \succ i_0)\ \ x_i \in \varepsilon H.$$
Stąd $p(x_i) < \varepsilon$ dla $i \succ i_0$. Zatem p jest funkcjonałem ciągłym w zerze (względem słabej topologii na X). Ponadto
$$-p(-x_i) \leqslant -f(-x_i) = f(x_i) \leqslant p(x_i).$$
Ponieważ ciąg $(-x_i)_{i \in I}$ również zmierza do zera, więc funkcjonał f jest ciągły w zerze, a stąd wynika, że jest ciągły (względem słabej topologii, ale to oznacza, że $f \in X^*$).

Przypuśćmy, że $\ker f \cap G \neq \emptyset$. Istnieje więc $x \in G$ taki, że $f(x) = 0$. Mamy
$$1 > p(x_0 - x) \geqslant f(x_0 - x) = f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0) \geqslant 1,$$
co daje sprzeczność. $\square$

Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią Banacha (ze słabą topologią). Załóżmy, że podzbiory $A, B \subset X$ są niepuste, rozłączne, otwarte i wypukłe. Wówczas istnieją $f \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$(\forall\, x \in A)\ \ f(x) > \alpha \quad \textit{oraz} \quad (\forall\, x \in B)\ \ f(x) < \alpha.$$

Dowód. Niech $G = A - B$. G jest zbiorem otwartym (bo $G = \bigcup_{a \in A}(a - B)$) i wypukłym. Ponadto $0 \notin G$. Z lematu istnieje niezerowy funkcjonał $f \in X^*$ taki, że

$$\ker f \cap G = \emptyset.$$

Zatem, albo $f(x) < 0$ dla $x \in G$, albo $f(x) > 0$ dla $x \in G$. Załóżmy, że $f(x) > 0$ dla $x \in G$. Wtedy

$$0 < f(a - b) = f(a) - f(b)$$

dla dowolnych $a \in A$, $b \in B$. Stąd

$$\inf_{a \in A} f(a) \geqslant \sup_{b \in B} f(b).$$

Ale zbiory $f(A)$, $f(B)$ są wypukłe i otwarte (wynika to z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, gdyż każdy niezerowy funkcjonał z X^* jest surjekcją). Zatem $f(A)$, $f(B)$ są przedziałami otwartymi, a stąd wynika już teza twierdzenia. □

Lemat. *Niech X będzie przestrzenią Banacha (ze słabą topologią). Załóżmy, że $K \subset X$ jest zbiorem zwartym, $V \subset X$ jest zbiorem otwartym oraz $K \subset V$. Wówczas istnieje wypukłe otoczenie zera U takie, że*

$$K + U \subset V.$$

Dowód. Jeśli $x \in K$, to istnieje wypukłe otoczenie zera V_x takie, że $x + V_x + V_x \subset V$. Wówczas rodzina $\{x + V_x;\ x \in K\}$ jest pokryciem zbioru K zbiorami otwartymi. Zatem

$$(\exists\, x_1, \ldots, x_n \in K)\ \ K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i}).$$

Niech $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. U jest wypukłym otoczeniem zera. Ponadto jeśli $x \in K$, $y \in U$, to dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$

$$x + y \in x_i + V_{x_i} + U \subset x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset V,$$

więc $K + U \subset V$. □

Twierdzenie. *Niech X będzie przestrzenią Banacha (ze słabą topologią). Załóżmy, że zbiory $A, B \subset X$ są niepuste, rozłączne, domknięte i wypukłe oraz dodatkowo B jest zbiorem zwartym. Wówczas zbiory A i B można rozdzielić (tzn. spełniona jest teza poprzedniego twierdzenia).*

Dowód. Mamy $B \subset X \setminus A$ oraz B jest zbiorem zwartym, $X \setminus A$ zaś zbiorem otwartym. Zatem z poprzedniego lematu istnieje wypukłe otoczenie zera U_1 takie, że

$$B + U_1 \subset X \setminus A.$$

Ponieważ słaba topologia jest lokalnie wypukła, więc istnieje wypukłe otoczenie zera U takie, że $U - U \subset U_1$. Wtedy

$$(A + U) \cap (B + U) = \emptyset,$$

gdyż jeśli istniałyby elementy $a \in A$, $b \in B$, $u, u' \in U$ takie, że $a + u = b + u'$, to

$$A \ni a = b + u' - u \in B + U - U \subset B + U_1 \subset X \setminus A$$

i otrzymujemy sprzeczność. Zatem ponieważ zbiory $A + U$, $B + U$ są otwarte i wypukłe, więc wystarczy skorzystać z poprzedniego twierdzenia o rozdzielaniu. □

Niech teraz X będzie przestrzenią liniową, $A \subset X$. Zbiór

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{C\text{-wypukły}, C \supset A} C$$

nazywamy *otoczką wypukłą* zbioru A. Jeśli natomiast X jest przestrzenią liniowo-topologiczną, to zbiór

$$\overline{\operatorname{conv}}(A) = \bigcap_{C\text{-wypukły,domknięty}, C \supset A} C$$

nazywamy *domkniętą otoczką wypukłą* zbioru A.

Lemat. *Niech X będzie przestrzenią liniową-topologiczną, $A \subset X$ podzbiorem wypukłym. Wówczas*

(i) *$\bar{A}$ jest zbiorem wypukłym,*

(ii) *jeśli $a \in \operatorname{Int} A$, $b \in \bar{A}$, to*

$$[a, b) := \{tb + (1-t)a;\ t \in [0, 1)\} \subset \operatorname{Int} A.$$

Dowód.

(i) Wykorzystując ciągłość dodawania, dla dowolnych zbiorów $C, D \subset X$ mamy $\bar{C} + \bar{D} \subset \overline{C + D}$. Ponieważ A jest zbiorem wypukłym, więc dla $t \in [0, 1]$ otrzymujemy

$$tA + (1-t)A \subset A.$$

Stąd

$$t\bar{A} + (1-t)\bar{A} = \overline{tA} + \overline{(1-t)A} \subset \overline{tA + (1-t)A} \subset \bar{A}.$$

Zatem $\bar{A}$ jest zbiorem wypukłym.

(ii) Niech $t \in (0, 1)$. Kładziemy $c = tb + (1-t)a$. Ponieważ $a \in \operatorname{Int} A$, więc dla pewnego otoczenia zera V mamy $a + V \subset A$. Zatem dla każdego $d \in A$

$$A \supset td + (1-t)(a + V) = t(d - b) + tb + (1-t)(a + V) = \big(t(d - b) + (1-t)V\big) + c.$$

Wystarczy teraz pokazać, że $0 \in t(d - b) + (1-t)V$ dla pewnego $d \in A$. Otóż

$$0 \in t(d - b) + (1-t)V \Leftrightarrow 0 \in (d - b) + (1-t)t^{-1}V \Leftrightarrow d \in b - (1-t)t^{-1}V,$$

ale $b \in \bar{A}$, więc $\big(b - (1-t)t^{-1}V\big) \cap A \neq \emptyset$.

$\square$

Uwaga. Jeśli X jest przestrzenią liniową-topologiczną, to dla $A \subset X$ mamy

$$\overline{\operatorname{conv}}(A) = \overline{\operatorname{conv}(A)}.$$

$\subset$: Z (i) wynika, że $\overline{\operatorname{conv}(A)}$ jest pewnym domkniętym zbiorem wypukłym zawierającym A, natomiast po lewej stronie równości jest przekrój zbiorów tego typu.

$\supset$: $\operatorname{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A, natomiast po lewej stronie równości jest pewien zbiór wypukły zawierający A, więc $\operatorname{conv}(A) \subset \overline{\operatorname{conv}}(A)$, ale $\overline{\operatorname{conv}}(A)$ jest zbiorem domkniętym, stąd $\overline{\operatorname{conv}(A)} \subset \overline{\operatorname{conv}}(A)$.

WYKŁAD XI

Niech X będzie przestrzenią liniową, $K \subset X$.

Definicja. Punkt $a \in K$ nazywamy *punktem ekstremalnym (wierzchołkiem)* zbioru K, gdy a nie jest punktem wewnętrznym żadnego odcinka, którego końce należą do K.

Zbiór punktów ekstremalnych zbioru K oznaczamy przez $\operatorname{ex} K$.

Ćwiczenie. Załóżmy, że K jest zbiorem wypukłym. Następujące warunki są równoważne:

(i) $a \in \operatorname{ex} K$,

(ii) jeśli $x_1, x_2 \in X$, $a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, to albo $x_1 \notin K$, albo $x_2 \notin K$, albo $x_1 = x_2 = a$,

(iii) jeśli $x_1, x_2 \in X$, $0 < t < 1$, $a = tx_1 + (1-t)x_2$, to albo $x_1 \notin K$, albo $x_2 \notin K$, albo $x_1 = x_2 = a$,

(iv) jeśli $x_1, \ldots, x_n \in K$, $a \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, to istnieje $1 \leqslant k \leqslant n$ taka, że $x_k = a$,

(v) $K \setminus \{a\}$ jest zbiorem wypukłym.

Zauważmy jedynie, że warunki (i), (v) są równoważne. Wykorzystując wypukłość zbioru K mamy

$$\begin{aligned} K \setminus \{a\} \text{ nie jest zbiorem wypukłym} &\Leftrightarrow (\exists\, k_1, k_2 \in K \setminus \{a\}) \ \ (\exists\, t \in (0,1)) \ \ tk_1 + (1-t)k_2 \notin K \setminus \{a\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists\, k_1, k_2 \in K \setminus \{a\}) \ \ (\exists\, t \in (0,1)) \ \ tk_1 + (1-t)k_2 = a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \notin \operatorname{ex} K. \end{aligned}$$

Twierdzenie Kreina–Milmana. *Niech X będzie przestrzenią Banacha (ze słabą topologią), $K \subset X$ zaś niepustym, wypukłym podzbiorem zwartym. Wówczas*

$$\operatorname{ex} K \neq \emptyset.$$

Ponadto

$$\overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ex} K) = K.$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że K ma co najmniej dwa elementy. Rozpatrzmy rodzinę

$$\mathcal{R} = \{U \subset K;\ \emptyset \neq U \neq K,\ U\text{-wypukły, otwarty w topologii indukowanej na } K\}.$$

Wiemy, że istnieją dwa różne elementy $a, b \in K$. Ponieważ X ze słabą topologią jest przestrzenią Hausdorffa, więc istnieje otoczenie A punktu a takie, że $b \notin A$. Ponadto X jest przestrzenią lokalnie wypukłą, więc możemy zakładać, że A jest zbiorem wypukłym. Zatem $A \cap K \in \mathcal{R}$ i stąd $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Rodzinę $\mathcal{R}$ rozpatrujemy ze zwykłym porządkiem inkluzji zbiorów. Niech $(U_i)_{i \in I}$ będzie łańcuchem w $\mathcal{R}$. Wtedy zbiór

$$U_0 = \bigcup_{i \in I} U_i$$

jest otwarty i wypukły. Gdyby $U_0 = K$, to $(U_i)_{i \in I}$ byłby pokryciem otwartym zbioru zwartego K. Stąd

$$K = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}, \quad i_1, \ldots, i_N \in I,$$

ale wykorzystując własność łańcucha $K = U_{i_s}$ dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant N$ i otrzymujemy sprzeczność, gdyż $U_{i_s} \in \mathcal{R}$. Zatem z lematu Kuratowskiego–Zorna w $\mathcal{R}$ istnieją elementy maksymalne. Niech więc U będzie elementem maksymalnym w $\mathcal{R}$.

Jeśli $x \in K$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, to wykorzystując wypukłość zbioru K, definiujemy

$$T_{\lambda,x} : K \to K, \quad T_{\lambda,x}(y) = \lambda y + (1-\lambda)x.$$

Jest to odwzorowanie ciągłe i afiniczne (tzn. zachowuje kombinacje wypukłe).

Jeśli $x \in U$, to $T_{\lambda,x}(U) \subset U$, gdyż U jest zbiorem wypukłym, a więc

$$U \subset T_{\lambda,x}^{-1}(U). \tag{1}$$

Zauważmy, że

$$U \subsetneq \bar{U}.$$

Istotnie, K jest zbiorem wypukłym, więc spójnym. Gdyby $U = \bar{U}$, to $\bar{U} = U \subsetneq K$ i w K mielibyśmy właściwy zbiór otwarto-domknięty, co daje sprzeczność.

Niech więc $y \in \bar{U} \setminus U \subset K$. Dla $0 \leqslant \lambda < 1$, wykorzystując ostatni lemat poprzedniego wykładu, mamy

$$T_{\lambda,x}(y) \in [x, y) \subset U, \tag{2}$$

tzn. $y \in T_{\lambda,x}^{-1}(U)$. Łącząc (2) z (1), otrzymujemy

$$\bar{U} \subset T_{\lambda,x}^{-1}(U).$$

Stąd

$$U \subsetneq \bar{U} \subset T_{\lambda,x}^{-1}(U) \subset K.$$

Zatem ponieważ zbiór $T_{\lambda,x}^{-1}(U)$ jest otwarty i wypukły (bo $T_{\lambda,x}$ jest afiniczne), to z maksymalności zbioru U wynika, że $T_{\lambda,x}^{-1}(U) = K$. Otrzymaliśmy więc $T_{\lambda,x}(K) \subset U$. Stąd

(3) jeśli $V \subset K$ jest zbiorem wypukłym i otwartym (w topologii indukowanej na K), to albo $V \cup U = U$, albo $V \cup U = K$.

Istotnie, najpierw zauważmy, że $U \cup V$ jest zbiorem wypukłym. Niech $x, y \in U \cup V$. Jeśli oba elementy x, y są w zbiorze U lub oba są w zbiorze V, to wszystkie ich kombinacje wypukłe należą do $U \cup V$. Jeśli natomiast $x \in U$, $y \in V$, to

$$\lambda y + (1 - \lambda)x \in T_{\lambda,x}(K) \subset U$$

dla $0 \leqslant \lambda < 1$, a dla $\lambda = 1$ mamy $y \in V$. Zatem ponieważ U jest zbiorem maksymalnym zawartym w zbiorze otwartym i wypukłym $U \cup V$, to albo $V \cup U = U$, albo $V \cup U = K$.

Pokażemy teraz, że

$$\operatorname{card}(K \setminus U) = 1.$$

Przypuśćmy, że $a, b \in K \setminus U$, $a \neq b$. Wtedy istnieją rozłączne, wypukłe otoczenia $V_a, V_b \subset K$ takie, że $a \in V_a$, $b \in V_b$. Ponieważ $U \subsetneq V_a \cup U$, więc z (3) mamy $V_a \cup U = K$, co daje sprzeczność, bo $b \notin V_a \cup U$.

W ten sposób otrzymaliśmy $K \setminus \{a\} = U$ dla pewnego $a \in K$. Ponieważ U jest zbiorem wypukłym, więc (wykorzystując ćwiczenie) $a \in \operatorname{ex} K$. Pokazaliśmy, że $\operatorname{ex} K \neq \emptyset$, ale w istocie pokazaliśmy więcej:

(4) jeśli $V \subset X$ jest zbiorem otwartym i wypukłym oraz $\operatorname{ex} K \subset V$, to $K \subset V$.

Istotnie, przypuśćmy, że $K \not\subset V$. Wówczas $\emptyset \neq V \cap K \subsetneq K$ (gdyż $\emptyset \neq \operatorname{ex} K \subset V$). Zatem $V \cap K \in \mathcal{R}$. Z lematu Kuratowskiego–Zorna, zbiór $V \cap K$ zawiera się w pewnym elemencie maksymalnym z rodziny $\mathcal{R}$, tzn. $V \cap K \subset K \setminus \{a\}$, gdzie $a \in \operatorname{ex} K$ (pokazaliśmy wyżej, że tak wyglądają elementy maksymalne w $\mathcal{R}$). W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność, bo $a \in \operatorname{ex} K \subset V$.

Niech $E = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{ex} K)$ (domknięcie rozpatrujemy w słabej topologii). Wtedy $E \subset K$, gdyż K jest zbiorem wypukłym, domkniętym zawierającym $\operatorname{ex} K$. Przypuśćmy, że $x_0 \in K \setminus E$. Wtedy zbiory E i $\{x_0\}$ można rozdzielić (oba są zwarte i wypukłe), a więc istnieją $f \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$E \subset \{x \in X;\ f(x) < \alpha\}.$$

Ostatni zbiór jest otwarty, wypukły i zawiera $\operatorname{ex} K$. Zatem wykorzystując (4), mamy

$$K \subset \{x \in X;\ f(x) < \alpha\},$$

co daje sprzeczność, gdyż $f(x_0) > \alpha$ i $x_0 \in K$. □

Przykład. Przestrzeń c_0 nie jest refleksywna.

Wystarczy pokazać, że domknięta kula jednostkowa K w c_0 nie ma punktów ekstremalnych, gdyż jeśli c_0 byłaby refleksywna, to kula K byłaby zbiorem zwartym w słabej topologii i z twierdzenia Kreina–Milmana miałaby punkty ekstremalne. Niech $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, $\|x\| \leqslant 1$. Dla $N \geqslant 1$ określamy ciągi $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ następująco

$$\begin{cases} y_n = x_{N+1} + \frac{1}{2^{N+1}}, & \text{gdy } n = N+1, \\ y_n = x_n, & \text{gdy } n \neq N+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_n = x_{N+1} - \frac{1}{2^{N+1}}, & \text{gdy } n = N+1, \\ z_n = x_n, & \text{gdy } n \neq N+1. \end{cases}$$

Dla dostatecznie dużych N elementy y i z należą do kuli jednostkowej oraz $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $y \neq z$. Zatem $x \notin \operatorname{ex} K$.

Ćwiczenie. Pokazać, że domknięta kula jednostkowa w przestrzeni $L^1[0,1]$ nie ma punktów ekstremalnych.

Twierdzenie (Mazura). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $A \subset X$ zbiorem wypukłym. Wówczas*

$$\bar{A} = \bar{A}^w,$$

gdzie domknięcie po lewej stronie równości wzięto w topologii normy, po prawej zaś w słabej topologii.

Dowód. Zbiory $\bar{A}$ i $\bar{A}^w$ są przekrojami wszystkich zbiorów domkniętych odpowiednio w topologii normy i w słabej topologii zawierającymi A. Ponieważ zbiór domknięty w słabej topologii jest też domknięty w topologii normy, więc

$$\bar{A} \subset \bar{A}^w.$$

Przypuśćmy, że $x_0 \in \bar{A}^w \setminus \bar{A}$. Zbiór $\bar{A}$ jest domknięty i wypukły, zbiór $\{x_0\}$ zaś zwarty i wypukły, więc można je rozdzielić (wszystkie twierdzenia o rozdzielaniu są prawdziwe również w mocnej topologii). Zatem istnieje $f \in X^*$ taki, że

$$\sup\{f(x);\ x \in A\} = \sup\{f(x);\ x \in \bar{A}\} < f(x_0). \tag{5}$$

Jednocześnie dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ zbiór

$$\{x \in X;\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

jest słabym otoczeniem punktu x_0. Ponieważ $x_0 \in \bar{A}^w$, więc istnieją w nim elementy zbioru A, co jest sprzeczne z warunkiem rozdzielania (5) (np. dla $\varepsilon = f(x_0) - \sup\{f(x);\ x \in A\}$). □

Wniosek. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do $x \in X$, to istnieje ciąg kombinacji wypukłych*

$$y_j = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{jk} x_k, \quad j \geqslant 1 \ \Big(n_j \geqslant 1,\ \lambda_{jk} \geqslant 0 \ \textit{dla}\ k = 1, \dots, n_j,\ \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{jk} = 1\Big)$$

taki, że

$$\lim_{j \to \infty} \|y_j - x\| = 0.$$

Dowód. Z założenia $x \in \overline{\operatorname{conv}}^w\{x_1, x_2, \dots\}$. Zatem $x \in \overline{\operatorname{conv}}\{x_1, x_2, \dots\}$. □

Wniosek. *W przestrzeni Banacha każdy podzbiór domknięty i wypukły jest słabo domknięty.*

Wniosek. *W przestrzeni Banacha każda podprzestrzeń domknięta jest słabo domknięta.*

Uwaga (Problem). Czy twierdzenie Mazura zachodzi dla $*$-słabej topologii? Odpowiedź jest negatywna.

WYKŁAD XII

Szeregi Fouriera na $\mathbb{T}$.

Niech $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Zbiór $\mathbb{T}$ możemy utożsamić z odcinkiem $[0, 2\pi)$, w którym dodawanie odbywa się modulo 2π. Mając funkcję $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ możemy ją rozszerzyć do funkcji 2π-okresowej

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$$

dla $x \in \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas mówimy, że f jest funkcją ciągłą, gdy $\tilde{f}$ jest funkcją ciągłą, f jest funkcją różniczkowalną, gdy $\tilde{f}$ jest funkcją różniczkowalną itd. Wprowadzimy metrykę na $\mathbb{T}$ wzorem:

$$d(t, t') = \min\{|t - t'|, 2\pi - |t - t'|\}.$$

Mamy

$$d(t + t_0, t' + t_0) = d(t, t')$$

dla dowolnych $t, t', t_0 \in \mathbb{T}$. Interesować nas będą funkcje całkowalne względem miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Podstawową własnością miary Lebesgue'a jest niezmienniczość ze względu na przesunięcia:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t - t_0)\, dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt$$

dla $t_0 \in \mathbb{T}$.

Definicja.

$$L^1(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C};\ \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt < +\infty \right\}, \quad \|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt.$$

Wówczas $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^1})$ jest przestrzenią Banacha.

Definicja. Wyrażenie

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \quad (a_{-N}, \ldots, a_N \in \mathbb{C},\ N \geqslant 0,\ t \in \mathbb{T})$$

nazywamy *wielomianem trygonometrycznym* (*stopnia* N, gdy $|a_N| + |a_{-N}| > 0$).

Uwaga. Jeżeli mamy wielomian trygonometryczny

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int},$$

to jego współczynniki można obliczyć ze wzoru:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(t) e^{-int}\, dt, \quad n = -N, \ldots, N.$$

Istotnie, dla $j \neq 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ijt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ij} e^{ijt} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

a dla $j = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ijt}\, dt = 1.$$

Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Na podstawie powyższej uwagi możemy (na razie formalnie) rozpatrywać *szereg Fouriera* funkcji f

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int},$$

gdzie

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt$$

nazywamy *n-tym współczynnikiem Fouriera* funkcji f.

Twierdzenie. *Niech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy*

(i) $(f+g)^\wedge(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$,

(ii) $(\alpha f)^\wedge(n) = \alpha \hat{f}(n)$ *dla* $\alpha \in \mathbb{C}$,

(iii) *jeśli* $\bar{f}(t) := \overline{f(t)}$ $(t \in \mathbb{T})$ *oznacza funkcję sprzężoną do* f, *to* $\hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$,

(iv) *jeśli* $f_\tau(t) := f(t-\tau)$ $(t, \tau \in \mathbb{T})$, *to* $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n) e^{-in\tau}$,

(v) $\left|\hat{f}(n)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1}$.

Dowód. Mamy:

(iii)

$$\hat{\bar{f}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t)} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(t) e^{int}}\, dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{int}\, dt} = \overline{\hat{f}(-n)},$$

(iv)

$$\hat{f}_\tau(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_\tau(t) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau+\tau)}\, dt = e^{-in\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau) e^{-in(t-\tau)}\, dt =$$
$$= e^{-in\tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt = \hat{f}(n) e^{-in\tau},$$

(v)

$$\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1}.$$

□

Wprowadzimy teraz jedną z najważniejszych operacji na funkcjach, tzw. splot (co będzie nam zastępowało mnożenie funkcji).

Twierdzenie. *Niech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Wówczas dla p.w. $t \in \mathbb{T}$ funkcja*

$$\mathbb{T} \ni \tau \mapsto f(t-\tau) g(\tau)$$

jest całkowalna oraz jeśli oznaczymy

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau,$$

to $h \in L^1(\mathbb{T})$ oraz

$$\|h\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Ponadto dla $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{h}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n).$$

Dowód. Zauważmy, że funkcje dwóch zmiennych

$$\mathbb{T} \times \mathbb{T} \ni (t, \tau) \mapsto f(t - \tau), \quad \mathbb{T} \times \mathbb{T} \ni (t, \tau) \mapsto g(\tau)$$

są mierzalne, więc funkcja

$$F(t, \tau) = f(t - \tau)g(\tau)$$

jest mierzalna. Dla p.w. $\tau \in \mathbb{T}$ funkcja $F(\cdot, \tau)$ jest wielokrotnością funkcji $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$, jest więc całkowalna. Ponadto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |F(t, \tau)|\, dt \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(\tau)| \cdot \|f\|_{L^1}\, d\tau = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

Zatem z dowodu twierdzenia Fubiniego (ta część twierdzenia Fubiniego nosi nazwę twierdzenia Tonelliego) wynika, że jeśli jedna z całek iterowanych istnieje (tzn. jest skończona), to $F \in L^1(\mathbb{T})$ oraz zachodzi twierdzenie Fubiniego. Otrzymujemy zatem, że funkcja F jest całkowalna jako funkcja argumentu τ (dla p.w. $t \in \mathbb{T}$) oraz

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |h(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau \right| dt \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} |F(t, \tau)|\, d\tau\, dt = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

Niech $n \in \mathbb{Z}$. Policzmy $\hat{h}(n)$:

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(t)e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau \right) e^{-int}\, dt = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} f(t - \tau)e^{-in(t-\tau)}g(\tau)e^{-in\tau}\, d\tau\, dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(\tau)e^{-in\tau} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \tau)e^{-in(t-\tau)}\, dt \right) d\tau = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n). \end{aligned}$$

□

Definicja. *Splotem $f * g$ funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ nazywamy funkcję h z poprzedniego twierdzenia.*

Wniosek. *Niech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Wówczas*

(i) $f * g \in L^1(\mathbb{T})$,

(ii) $\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$,

(iii) $(f * g)^\wedge(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n)$ *dla* $n \in \mathbb{Z}$,

(iv) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$ *dla* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie. *Operacja splotu $* : L^1(\mathbb{T}) \times L^1(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})$ jest przemienna, łączna oraz rozdzielna względem dodawania.*

Dowód.

- Przemienność. Wykorzystując 2π-okresowość funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, dla dowolnego $t \in \mathbb{T}$ mamy

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau = \left| \begin{array}{c} s = t - \tau \\ \tau = t - s \\ d\tau = -ds \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t-2\pi} f(s)g(t - s)\,(-ds) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(s)g(t - s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t - s)f(s)\, ds = (g * f)(t). \end{aligned}$$

(W dowodzie tego twierdzenia wykonujemy tylko takie podstawienia, dla których miara Lebesgue'a jest niezmiennicza: przesuwanie, mnożenie przez -1.)

- Łączność. Dla dowolnych $f_1, f_2, f_3 \in L^1(\mathbb{T})$, $t \in \mathbb{T}$ mamy

$$\begin{aligned}
\big((f_1 * f_2) * f_3\big)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f_1 * f_2)(t-\tau) f_3(\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f_1(t-\tau-u) f_2(u)\, du\right) f_3(\tau)\, d\tau = \left|\begin{array}{c} w = u+\tau \\ dw = du \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_\tau^{\tau+2\pi} f_1(t-w) f_2(w-\tau)\, dw\right) f_3(\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f_1(t-w) f_2(w-\tau)\, dw\right) f_3(\tau)\, d\tau = \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t-w) f_2(w-\tau) f_3(\tau)\, dw\, d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t-w) \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(w-\tau) f_3(\tau)\, d\tau\right) dw = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t-w)(f_2 * f_3)(w)\, dw = \big(f_1 * (f_2 * f_3)\big)(t).
\end{aligned}$$

- Rozdzielność. Pozostaje jako ćwiczenie.

□

Lemat. *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\varphi_n(t) = e^{int}$. Wówczas*

$$(\varphi_n * f)(t) = \hat{f}(n) e^{int}$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$. W szczególności

$$(1 * f)(t) = \hat{f}(0)$$

dla każdego $t \in \mathbb{T}$.

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$

$$(\varphi_n * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau = e^{int}\hat{f}(n).$$

□

Wniosek. *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $k(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$ $(a_{-N}, \ldots, a_N \in \mathbb{C},\ N \geqslant 0)$, to*

$$(k * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n) e^{int}$$

dla każdego $t \in \mathbb{T}$.

Dowód. Należy wykorzystać rozdzielność splotu względem dodawania i poprzedni lemat. □

Twierdzenie. *Odwzorowanie*

$$\mathbb{T} \ni \tau \mapsto f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$$

jest ciągłe dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Dowód.

Krok 1. $C(\mathbb{T})$ jest zbiorem gęstym w $L^1(\mathbb{T})$. Wystarczy udowodnić, że jeśli $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ jest funkcją prostą oraz $\varepsilon > 0$, to istnieje $f_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$ taka, że

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Skoro f jest funkcją prostą, to

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}, \quad \text{gdzie} \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{T} \text{ są mierzalne, parami rozłączne.}$$

Istnieją zbiory domknięte $F_k \subset A_k$ takie, że

$$\lambda(A_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon\pi}{nM}$$

dla $k = 1, \dots, n$, gdzie $M = \max_{k=1,\dots,n} |a_k|$. Połóżmy

$$f_\varepsilon(x) = a_k, \quad \text{gdy} \quad x \in F_k.$$

Wtedy f_ε jest funkcją ciągłą na zbiorze domkniętym $F := \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ (zbiory F_k są parami rozłączne). Z twierdzenia Tietzego istnieje rozszerzenie f_ε do funkcji ciągłej $f_\varepsilon : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bez zwiększenia kresu górnego

$$f_\varepsilon \in C(\mathbb{T}), \quad |f_\varepsilon| \leqslant M.$$

Policzmy

$$\begin{aligned}
\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{F} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}\setminus F} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}\setminus F} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k \setminus F_k} |f(t) - f_\varepsilon(t)|\, dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot n \cdot 2M \cdot \lambda(A_k \setminus F_k) \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2nM \cdot \frac{\varepsilon\pi}{nM} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Krok 2. Twierdzenie jest prawdziwe dla $f \in C(\mathbb{T})$. Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{T}$. Zatem

$$(\exists\, \delta > 0)\ \ (\forall\, s, s' \in \mathbb{T})\ \ \Big(\big(d(s, s') < \delta\big) \Rightarrow \big(|f(s) - f(s')| < \varepsilon\big) \Big).$$

Ustalmy $\tau_0 \in \mathbb{T}$. Dla dowolnego $\tau \in \mathbb{T}$, jeśli $d(\tau, \tau_0) < \delta$, to

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t - \tau) - f(t - \tau_0)|\, dt < \varepsilon,$$

gdyż $d(t - \tau, t - \tau_0) = d(\tau, \tau_0)$.

Krok 3. Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\varepsilon > 0$. Ustalmy $\tau_0 \in \mathbb{T}$. Wykorzystując krok 1, znajdziemy funkcję $g \in C(\mathbb{T})$ taką, że

$$\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z kolei krok 2 pozwala wybrać $\delta > 0$ taką, że

$$\|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3},$$

gdy $d(\tau, \tau_0) < \delta$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} &= \|f_\tau - g_\tau\|_{L^1} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1} + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_{L^1} = \\
&= \|f - g\|_{L^1} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1} + \|g - f\|_{L^1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

WYKŁAD XIII

Definicja. *Jądrem sumującym* (albo *jedynką aproksymatywną*) nazywamy ciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych, 2π-okresowych spełniających warunki:

(S-1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} k_n(t)\,dt = 1$ dla $n \geqslant 1$,

(S-2) $(\exists\, C > 0)$ $(\forall\, n \geqslant 1)$ $\|k_n\|_{L^1} \leqslant C$,

(S-3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ dla dowolnej liczby $0 < \delta < \pi$.

Dodatnim jądrem sumującym nazywamy takie jądro sumujące, że $k_n \geqslant 0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$ (wtedy warunek (S-2) jest zbędny).

Uwaga. $(L^1(\mathbb{T}), +, *, 0)$ jest pierścieniem przemiennym, ale, jak zobaczymy, bez jedynki. Wprowadzamy „jedynkę aproksymatywną" dla mnożenia (splatania).

Przykład. Jądrem Fejéra nazywamy ciąg wielomianów trygonometrycznych $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ danych wzorem

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Sprawdzamy warunek (S-1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)\int_{\mathbb{T}} e^{ijt}\,dt = 1.$$

Aby uzasadnić (S-2) i (S-3) będziemy potrzebowali następującego lematu.

Lemat. *Dla dowolnych $n \geqslant 1$, $t \in (0, 2\pi)$*

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)}$$

(*równość jest prawdziwa również dla $t = 0$, jeśli po prawej stronie policzymy granicę przy $t \to 0$*).

Dowód. Zauważmy, że

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}. \tag{1}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot K_n(t) = \\
&= \left(-\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}\right)\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} = \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{i(j-1)t} + \frac{1}{2}\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} - \frac{1}{4}\sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{i(j+1)t}.
\end{aligned}$$

W ostatnim wyrażeniu dla $s = -(n-1), \ldots, n-1$ przy e^{ist} otrzymamy współczynnik

$$-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{|s+1|}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|s|}{n+1}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{|s-1|}{n+1}\right) = \frac{|s+1| - 2|s| + |s-1|}{4(n+1)}.$$

Ale dla $s \neq 0$ mamy $2|s| = |s+1| + |s-1|$, więc wówczas powyższe współczynniki są równe zero. Z kolei współczynnik przy e^{ist} dla $s = -n$ jest równy

$$-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{|-n+1|}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|-n|}{n+1}\right) = 0.$$

Podobnie otrzymujemy zero dla $s = n$. Pozostaje zatem policzyć współczynniki przy $e^{-i(n+1)t}$, $e^{i(n+1)t}$, e^{i0t}. Mamy

$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot K_n(t) = \\
&= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) e^{-i(n+1)t} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) e^{i(n+1)t} + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)t} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n+1}\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right).
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z (1) dla $t := (n+1)t$.

Natomiast dla $t = 0$ mamy

$$K_n(0) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}(1 + \cdots + n + (n+1) + n + \cdots + 1) = n+1$$

oraz

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)} = \lim_{t \to 0}(n+1)\left(\frac{\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\frac{n+1}{2}t}}{\frac{\sin(\frac{1}{2}t)}{\frac{1}{2}t}}\right)^2 = n+1.$$

□

Zatem warunek (S-2) zachodzi, gdyż $K_n \geqslant 0$ dla $n \geqslant 1$. Ponieważ dla dowolnego $\delta > 0$ na przedziale $[\delta, 2\pi - \delta]$ funkcja $\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)$ jest odgraniczona od zera, więc

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |K_n(t)|\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)}\, dt = 0$$

i spełniony jest również warunek (S-3).

Wniosek. *Jądro Fejéra jest dodatnim jądrem sumującym.*

Oznaczmy

$$\sigma_n(f) = K_n * f$$

dla $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \geqslant 1$. Ponieważ funkcje K_n są wielomianami trygonometrycznymi, więc

$$\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Popatrzmy teraz na związek między funkcjami $\sigma_n(f)$ i szeregiem Fouriera funkcji f

$$S(f) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Interesuje nas oczywiście ciąg sum częściowych

$$S_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt}.$$

Zauważmy, że dla $-n \leqslant j \leqslant n$ mamy

$$\frac{1}{n+1}\big(S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_n(f)\big)^{\wedge}(j)=\frac{1}{n+1}(n+1-|j|)\cdot\hat{f}(j)=\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j),$$

gdyż e^{ijt} występuje w sumach $S_{|j|}(f), S_{|j|+1}(f), \ldots, S_n(f)$, a zatem $n-(|j|-1)$ razy. Pamiętając, że wielomian trygonometryczny jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje współczynniki Fouriera, otrzymujemy

$$K_n * f=\sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\big(S_0(f)+S_1(f)+\cdots+S_n(f)\big),$$

tzn. rozpatrujemy tu tzw. średnią zbieżność.

Lemat. *Niech $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym jądrem sumującym. Wówczas dla dowolnej funkcji $f\in C(\mathbb{T})$*

$$k_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad w \quad C(\mathbb{T}).$$

Dowód. Niech $\varepsilon>0$. Ponieważ funkcja f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{T}$, więc

$$(\exists\,\delta>0)\ \ (\forall\, t,\tau\in\mathbb{T})\ \ \Big(\big(\|\tau\|<\delta\big)\Rightarrow\big(|f(t-\tau)-f(t)|<\varepsilon\big)\Big).$$

Ponadto

$$(\exists\, M>0)\ \ (\forall\, s\in\mathbb{T})\ \ |f(s)|\leqslant M$$

oraz

$$(\exists\, N\geqslant 1)\ \ (\forall\, n\geqslant N)\ \ \int_{\delta}^{2\pi-\delta}|k_n(\tau)|\,d\tau<\varepsilon.$$

Dla $n\geqslant N$ mamy

$$\begin{aligned}
|(k_n*f)(t)-f(t)| &\overset{(S-1)}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_n(\tau)f(t-\tau)\,d\tau-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_n(\tau)f(t)\,d\tau\right|\leqslant\\
&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|k_n(\tau)|\cdot|f(t-\tau)-f(t)|\,d\tau=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|k_n(\tau)|\cdot|f(t-\tau)-f(t)|\,d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|k_n(\tau)|\cdot|f(t-\tau)-f(t)|\,d\tau\leqslant\\
&\leqslant\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|k_n(\tau)|\,d\tau+2M\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}|k_n(\tau)|\,d\tau\leqslant\left(C+\frac{M}{\pi}\right)\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą z warunku (S-2). Zatem

$$\|k_n*f-f\|_{C(\mathbb{T})}=\sup_{t\in\mathbb{T}}|(k_n*f)(t)-f(t)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

□

Twierdzenie. *Jeżeli $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jądrem sumującym oraz $f\in L^1(\mathbb{T})$, to*

$$k_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad w \quad L^1(\mathbb{T}).$$

Dowód. Niech $\varepsilon>0$. Istnieje funkcja $g\in C(\mathbb{T})$ taka, że $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$. Dla dostatecznie dużych n mamy

$$\begin{aligned}
\|k_n*f-f\|_{L^1}&\leqslant\|k_n*f-k_n*g\|_{L^1}+\|k_n*g-g\|_{L^1}+\|g-f\|_{L^1}\leqslant\|k_n*(f-g)\|_{L^1}+\varepsilon+\varepsilon\leqslant\\
&\leqslant\|k_n\|_{L^1}\cdot\|f-g\|_{L^1}+2\varepsilon\leqslant(2+C)\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą z warunku (S-2). □

Wniosek (Twierdzenie Weierstrassa). *Wielomiany trygonometryczne tworzą zbiór gęsty w $L^1(\mathbb{T})$.*

Dowód. Teza wynika z tego, że funkcje $\sigma_n(f) = K_n * f$ są wielomianami trygonometrycznymi dla dowolnych $f \in L^1(\mathbb{T})$, $n \geqslant 1$ oraz

$$K_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{w} \quad L^1(\mathbb{T}).$$

□

Twierdzenie (o jednoznaczności współczynników Fouriera). *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $\hat{f}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas $f = 0$.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\sigma_n(f)(t) = (K_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e^{ijt} = 0.$$

Zatem ponieważ

$$\sigma_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{w} \quad L^1(\mathbb{T}),$$

więc $f = 0$. □

Uwaga. Jeżeli $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, to $f = g$.

Twierdzenie (lemat Lebesgue'a–Riemanna). *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Wówczas*

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Weźmy wielomian trygonometryczny P taki, że $\|f - P\|_{L^1} < \varepsilon$. Jeśli N jest stopniem wielomianu P, to $\hat{P}(n) = 0$ dla $|n| > N$. Zatem dla $|n| > N$ mamy

$$|\hat{f}(n)| = |(f - P)^\wedge(n)| \leqslant \|f - P\|_{L^1} < \varepsilon.$$

□

Wniosek. *Pierścień $(L^1(\mathbb{T}), +, *, 0)$ nie ma jedynki.*

Dowód. Załóżmy, że $e \in L^1(\mathbb{T})$ oraz $f * e = f$ dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$. Stąd

$$\hat{f}(n) \cdot \hat{e}(n) = \hat{f}(n)$$

dla $n \in \mathbb{Z}$. Biorąc $f = \varphi_n$ ($\varphi_n(t) = e^{int}$ dla $t \in \mathbb{T}$) otrzymujemy $\hat{e}(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, co przeczy lematowi Lebesgue'a–Riemanna. □

Wniosek. *Jeśli szereg $S(f)$ jest zbieżny w przestrzeni $L^1(\mathbb{T})$, to jego granicą jest funkcja f.*

Dowód. Jeśli $S_n(f) \to g$, to

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)) \to g,$$

ale wiemy, że $\sigma_n(f) \to f$ (wszystkie zbieżności rozpatrujemy w $L^1(\mathbb{T})$). □

WYKŁAD XIV

Twierdzenie (Fejéra). *Niech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Załóżmy, że $t_0 \in \mathbb{T}$ jest punktem ciągłości funkcji f. Wówczas*

$$\sigma_n(f)(t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0).$$

Dowód. Wiemy, że dla $0 < t < 2\pi$

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right)^2.$$

Zatem

$$(\forall\, 0 < v < \pi)\ \ \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{v<t<2\pi-v} K_n(t)\right) = 0, \tag{1}$$

$$(\forall\, n \geqslant 1)\ \ (\forall\, t \in \mathbb{T})\ \ K_n(t) = K_n(-t). \tag{2}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f)(t_0) - f(t_0) = (K_n * f)(t_0) - f(t_0) = (f * K_n)(t_0) - f(t_0) = \\
&\qquad \overset{(S-1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)f(t_0-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)f(t_0)\,d\tau = \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-v}^{v} K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau + \int_v^{2\pi-v} K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau\right).
\end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned}
\int_{-v}^{0} K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau &= \left|\begin{array}{c}\tau=-t\\ d\tau=-dt\end{array}\right| \overset{(2)}{=} \int_v^0 K_n(t)\cdot\big(f(t_0+t)-f(t_0)\big)(-dt) = \\
&= \int_0^v K_n(t)\cdot\big(f(t_0+t)-f(t_0)\big)\,dt,
\end{aligned}$$

a ponadto

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi-v} K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau &= \left|\begin{array}{c}\tau=2\pi-t\\ d\tau=-dt\end{array}\right| = \\
&= \int_\pi^v K_n(2\pi-t)\cdot\big(f(t_0+t-2\pi)-f(t_0)\big)(-dt) = \\
&\overset{(2)}{=} \int_v^\pi K_n(t)\cdot\big(f(t_0+t)-f(t_0)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f)(t_0) - f(t_0) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^v K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau + \int_0^v K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0+\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau +\right.\\
&\quad\left. + \int_v^\pi K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0-\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau + \int_v^\pi K_n(\tau)\cdot\big(f(t_0+\tau)-f(t_0)\big)\,d\tau\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^v K_n(\tau)\left(\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f(t_0)\right)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_v^\pi K_n(\tau)\left(\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f(t_0)\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja f jest ciągła w t_0, więc dobieramy $0 < v < \pi$ tak, aby

$$(|\tau| < v) \Rightarrow \left(\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f(t_0)\right| < \varepsilon\right)$$

oraz (z (1)) $n_0 \geqslant 1$ tak, aby dla $n \geqslant n_0$

$$\sup_{v<\tau<2\pi-v} K_n(\tau) < \varepsilon.$$

Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|\sigma_n(f)(t_0) - f(t_0)| < \\
&< \frac{1}{\pi}\cdot\varepsilon\int_0^v K_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\cdot\varepsilon\int_v^\pi \left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f(t_0)\right| d\tau \leqslant \\
&\leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\,d\tau + \varepsilon\cdot\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{|f(t_0-\tau)-f(t_0)|}{2}\,d\tau + \int_0^{2\pi}\frac{|f(t_0+\tau)-f(t_0)|}{2}\,d\tau\right) = \\
&= 2\varepsilon + 2\varepsilon\cdot\|f - f(t_0)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

($f(t_0)$ w ostatnim wyrażeniu traktujemy jako funkcję stałą). $\square$

Uwaga. Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, to twierdzenie Fejéra mówi nam, że $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$ w każdym punkcie $t \in \mathbb{T}$. Ale wcześniej pokazaliśmy, że

$$\sigma_n(f) \to f \quad \text{w} \quad C(\mathbb{T}),$$

tzn. jednostajnie. Zatem dla funkcji ciągłych twierdzenie Fejéra nie wnosi nic nowego.

Popatrzmy teraz jak własności analityczne funkcji wpływają na wielkość współczynników Fouriera. Niech $C^k(\mathbb{T})$ będzie zbiorem wszystkich funkcji k razy różniczkowalnych na $\mathbb{T}$, których k-ta pochodna jest ciągła.

Twierdzenie. *Jeśli $f \in C^k(\mathbb{T})$, to*

$$\left|\hat{f}(n)\right| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{|n|^k}\right), \quad \textit{tzn.} \quad \lim_{|n|\to\infty} \left|n^k \hat{f}(n)\right| = 0.$$

Dowód. Będziemy całkowali wielokrotnie przez części:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left(f(t)\cdot\frac{-1}{in}e^{-int}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \left(\frac{-1}{in}\right)\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi(in)^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt = \cdots = \frac{1}{2\pi(in)^k}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}\,dt = \\
&= \frac{1}{(in)^k}\left(f^{(k)}\right)^{\wedge}(n).
\end{aligned}$$

Zatem teza wynika z lematu Lebesgue'a–Riemanna. $\square$

Definicja. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją 2π-okresową, tzn. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *wahanie ograniczone*, gdy

$$(\exists\, M > 0) \;\; (\forall\, P : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 2\pi) \;\; \sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leqslant M.$$

Liczbę

$$\sup_P \sum_{i=0}^{n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| =: \mathrm{Var}(f)$$

nazywamy *wahaniem* funkcji f na $[0, 2\pi)$.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone, to*

$$\left|\hat{f}(n)\right| \leqslant \frac{\mathrm{Var}(f)}{2\pi|n|}$$

dla $n \neq 0$.

Dowód. Niech $n \neq 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\left|\hat{f}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right| = \left|\frac{-1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f(t)\,de^{-int}\right| = \\
&= \left|\left(\frac{-1}{2\pi in}f(t)e^{-int}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,df(t)\right| = \frac{1}{2\pi|n|}\left|\int_0^{2\pi} e^{-int}\,df(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi|n|}\cdot\mathrm{Var}(f)\cdot 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Rozpatrzmy ośrodkową przestrzeń Hilberta $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Lemat (równość Parsevala). *Niech $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą ortonormalną w H. Wówczas dla $f, g \in H$*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, g\rangle.$$

Dowód. Wiemy, że

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Ponadto dla $N \geqslant 1$

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, g \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle.$$

Przechodząc w ostatniej równości do granicy przy $N \to \infty$ otrzymujemy tezę lematu. □

Niech teraz

$$H = L^2(\mathbb{T}), \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)}\, dt.$$

Kładziemy $\varphi_n(t) = e^{int}$ dla $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$. Zbiór $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ jest ortonormalny.

Twierdzenie. *Zbiór $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ jest bazą ortonormalną w $L^2(\mathbb{T})$.*

Dowód. Pokażemy, że zbiór $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ jest zupełny. Mamy

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{e^{int}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt,$$

tzn.

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \hat{f}(n)$$

dla $n \in \mathbb{Z}$. Jeśli zatem $f \perp \{\varphi_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$, to $\hat{f}(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ i z twierdzenia o jednoznaczności współczynników Fouriera $f = 0$. □

Twierdzenie. *Niech $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Wówczas*

(i) $\|f\|_{L^2}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2,$

(ii) $f = \displaystyle\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in(\cdot)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in(\cdot)}$ *w* $L^2(\mathbb{T})$,

(iii) *jeśli* $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$, *to istnieje dokładnie jedna funkcja* $f \in L^2(\mathbb{T})$ *taka, że* $\hat{f}(n) = c_n$ *dla każdego* $n \in \mathbb{Z}$,

(iv) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$

Dowód.

(iv) Zauważmy, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)}\, dt = \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_n \rangle} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

(i) Wystarczy w (iv) wziąć $f = g$.

(ii) Teza wynika z tego, że $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$.

(iii) Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n$ w H (spełniony jest warunek Cauchy'ego, gdyż $\left\| \sum_{n=N}^{M} c_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |c_n|^2$). Kładziemy

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n$$

i otrzymujemy $\langle f, \varphi_n \rangle = c_n$.

□

Uwaga. Warunek (ii) mówi, że szereg Fouriera funkcji $f \in L^2(\mathbb{T})$ jest zbieżny w $L^2(\mathbb{T})$ i to do funkcji f.

Oznaczmy

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{T});\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty \right\}.$$

Oczywiście jeśli $f \in A(\mathbb{T})$, to

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 < +\infty,$$

więc $A(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$. Zachodzi jednak mocniejsze twierdzenie.

Twierdzenie. $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$.

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli $f \in A(\mathbb{T})$, to $S_n(f) \to f$ w $C(\mathbb{T})$, gdyż jednostajna granica ciągu wielomianów trygonometrycznych musi być funkcją ciągłą. Zauważmy, że

$$\|S_N(f) - S_M(f)\|_{C(\mathbb{T})} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \hat{f}(k)e^{ikt} \right\|_{C(\mathbb{T})} \leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left|\hat{f}(k)\right| \xrightarrow[N,M\to\infty]{} 0.$$

Zatem ciąg $\big(S_n(f)\big)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie, a ponieważ $\sigma_n(f) \to f$ w $C(\mathbb{T})$, więc jego granicą musi być funkcja f. $\square$

Uwaga. Podsumujemy rodzaje zbieżności szeregu Fouriera:

- Jeśli $f \in L^1(\mathbb{T})$, to $\sigma_n(f) \to f$ w $L^1(\mathbb{T})$.
- Jeśli $f \in C(\mathbb{T})$, to $\sigma_n(f) \to f$ w $C(\mathbb{T})$.
- Jeśli t_0 jest punktem ciągłości funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$, to $\sigma_n(f)(t_0) \to f(t_0)$.
- Jeśli $f \in L^2(\mathbb{T})$, to $S_n(f) \to f$ w $L^2(\mathbb{T})$.
- Jeśli $f \in A(\mathbb{T})$, to $S_n(f) \to f$ w $C(\mathbb{T})$.

WYKŁAD XV

Funkcje analityczne na $\mathbb{T}$.

Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, tzn. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i f jest 2π-okresowa.

Definicja. Funkcję f nazywamy *analityczną* (w sensie rzeczywistym), gdy dla dowolnego $t_0 \in \mathbb{T}$ istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla każdego t z tego otoczenia

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Uwaga. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞. Przypomnijmy, że wówczas dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x),$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n,$$

(wtedy f jest analityczna, gdy $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ tzn. funkcja analityczna rozwija się lokalnie w szereg Taylora).

Lemat. *Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Wówczas f jest analityczna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\exists\, R > 0) \quad (\forall\, n \geqslant 1) \quad \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| f^{(n)}(t) \right| \leqslant n! \cdot R^n.$$

Dowód.

$\Rightarrow$: Ustalmy $x_0 \in \mathbb{T}$ i niech funkcja f rozwija się w szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

dla $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ przy pewnym $\rho > 0$. Napiszmy teraz wyrażenie zmiennej zespolonej

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n. \tag{2}$$

Ponieważ promień zbieżności szeregu (2) liczy się tak samo jak szeregu (1), więc wzór (2) definiuje funkcję analityczną (w sensie zespolonym) w kole $B(x_0, \rho)$.

Niech C będzie okręgiem o promieniu $2r$ i środku w punkcie x_0 zawartym w kole zbieżności szeregu (2), tzn. $2r < \rho$. Ponieważ funkcja $\tilde{f}$ jest analityczna wewnątrz koła $B(x_0, \rho)$, więc ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$\tilde{f}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\tilde{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

dla punktów z leżących wewnątrz koła ograniczonego okręgiem C i $n \geqslant 0$. W szczególności, dla argumentów rzeczywistych x takich, że $|x - x_0| < r$ mamy

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{\left|\tilde{f}(\zeta)\right|}{|\zeta - x|^{n+1}}\, d\zeta.$$

Ponieważ w powyższej całce $\zeta \in C$, więc $|\zeta - x| > r$, a zatem

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\zeta \in C} \left|\tilde{f}(\zeta)\right|}{r^{n+1}} \cdot 4\pi r = 2 \max_{\zeta \in C} \left|\tilde{f}(\zeta)\right| \cdot n! \cdot \frac{1}{r^n}.$$

Dla różnych punktów $x_0 \in \mathbb{T}$ dostajemy różne funkcje $\tilde{f}$, różne krzywe C itd. Jednak wszystkie rozważane obszary zawarte w okręgach ograniczonych krzywymi C pokryją cały odcinek $[0, 2\pi]$, a więc da się zredukować to pokrycie do pokrycia skończonego. Zatem znajdziemy wspólne oszacowanie wyrażeń $\max_{\zeta \in C} \left|\tilde{f}(\zeta)\right|$ i wspólne $r > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{T}$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \cdot D,$$

gdzie D jest pewną stałą dodatnią. Stąd

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant n! \cdot R^n$$

dla wystarczająco dużej liczby R i wszystkich $n \geqslant 1$.

$\Leftarrow$: Sprawdzamy zachowanie reszt $R_n(x)$. Otóż dla $0 < h < \frac{1}{R}$ rozważmy $|x - x_0| < h$ i wówczas

$$|R_n(x)| = \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left| f^{(n)}(\xi) \right| \leqslant \frac{h^n}{n!} \cdot n! \cdot R^n = (hR)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

gdyż $0 < hR < 1$.

$\square$

Twierdzenie. *Funkcja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest analityczna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\exists\, a > 0) \quad (\exists\, K > 0) \quad (\forall\, n \in \mathbb{Z}) \quad \left| \hat{f}(n) \right| \leqslant K e^{-a|n|}$$

(*tzn. współczynniki Fouriera funkcji f maleją wykładniczo do zera*).

Dowód.

$\Rightarrow$: Z lematu mamy

$$(\exists\, R > 0) \;\; (\forall\, n \geqslant 1) \;\; (\forall\, t \in \mathbb{T}) \;\; \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant n! \cdot R^n.$$

Niech $0 < a < \frac{1}{R}$. Chcielibyśmy udowodnić nierówność

$$\left|\hat{f}(j)\right| \cdot e^{a|j|} \leqslant K,$$

gdzie $K > 0$ jest stałą niezależną od $j \in \mathbb{Z}$ lub równoważnie

$$\left|\hat{f}(j)\right| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n |j|^n}{n!} \leqslant K.$$

Wiemy, że f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna, więc

$$\left|\hat{f}(j)\right| \leqslant \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{L^1}}{|j|^n}$$

dla dowolnych $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \geqslant 0$. Wystarczy zatem pokazać, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{L^1}}{|j|^n} \cdot \frac{a^n |j|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{L^1}}{n!} \cdot a^n \leqslant K.$$

Aby stała K istniała wystarczy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{L^1}}{n!} \cdot a^n < +\infty.$$

Mamy jednak $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant n! R^n$ dla $t \in \mathbb{T}$, a zatem wystarczy, aby

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! R^n}{n!} \cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty} (Ra)^n < +\infty,$$

co zachodzi dla wybranego a.

$\Leftarrow$: Zakładamy, że

$$(\exists\, a > 0) \;\; (\exists\, K > 0) \;\; (\forall\, n \in \mathbb{Z}) \;\; \left|\hat{f}(n)\right| \leqslant K e^{-a|n|}.$$

Ponieważ $a > 0$, więc $0 < e^{-a} < 1$ i stąd

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| \leqslant 2K \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a})^n < +\infty.$$

Zatem $f \in A(\mathbb{T})$, tzn. funkcja f ma sumowalną transformatę Fouriera i w szczególności zachodzi zbieżność jednostajna szeregu Fouriera do funkcji f

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Aby zróżniczkować ten szereg j-razy wystarczy wiedzieć, że szereg j-tych pochodnych jest jednostajnie zbieżny. Otóż szereg j-tych pochodnych jest postaci

$$i^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^j \hat{f}(n) e^{int}.$$

Mamy

$$\left|n^j \hat{f}(n) e^{int}\right| \leqslant K |n|^j e^{-a|n|}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$ oraz używając na przykład kryterium d'Alemberta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^j e^{-a|n|} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^j e^{-an} < +\infty$$

dla każdego $j \geqslant 1$. Zatem $f \in C^{\infty}(\mathbb{T})$ oraz

$$\left| f^{(j)}(t) \right| \leqslant 2K \sum_{n=1}^{\infty} n^j e^{-an}. \tag{3}$$

Zauważmy, że funkcja

$$x \mapsto x^j e^{-ax}$$

jest malejąca dla $x > \frac{j}{a}$ i

$$\int_0^{\infty} x^j e^{-ax}\, dx = \left(x^j \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} j x^{j-1} \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax}\, dx = \frac{j}{a} \int_0^{\infty} x^{j-1} e^{-ax}\, dx =$$
$$= \cdots = \frac{j!}{a^j} \int_0^{\infty} e^{-ax}\, dx \leqslant R^j \cdot j!$$

dla dostatecznie dużego R. Stąd stosując kryterium całkowe możemy wyrazy szeregu z (3) od pewnego miejsca porównać z powyższą całką. Pozostaje jeszcze oszacować odpowiednią sumę początkowych wyrazów szeregu z (3):

$$1^j e^{-a} + 2^j e^{-2a} + \cdots + j^j e^{-ja} + \cdots + k^j e^{-ka}, \tag{4}$$

gdzie $k \approx \frac{j}{a}$. Przypomnijmy, że

$$j^j \leqslant \mathrm{const} \cdot 3^j \cdot j!,$$

gdyż wykorzystując kryterium d'Alemberta dostajemy zbieżność szeregu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{3^j \cdot j!}.$$

Zatem ponieważ $e^{-sa} < 1$ dla $s \geqslant 1$, więc suma (4) jest ograniczona przez

$$\frac{j}{a} \cdot \left(\frac{j}{a} \right)^j = \frac{1}{a^{j+1}} \cdot j \cdot j^j \leqslant \mathrm{const} \cdot \frac{1}{a^j} \cdot j \cdot 3^j \cdot j! \leqslant R^j \cdot j!$$

dla dostatecznie dużego R.

□

Literatura

[1] Alexiewicz A.: *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 1969.

[2] Dunford N., Schwartz J.T.: *Linear operators*, John Wiley & Sons, New York, 1971.

[3] Kantorowicz L.V.: *Funkcjonalnyj analiz*, Nauka, Moskwa, 1984.

[4] Mlak W.: *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, PWN, Warszawa, 1987.

[5] Musielak J.: *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa, 1989.

[6] Rolewicz S.: *Analiza funkcjonalna i teoria sterowania*, PWN, Warszawa, 1977.

[7] Rudin W.: *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa, 2002.

PRZYKŁADOWY TEST EGZAMINACYJNY

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią Banacha (kulą jednostkową nazywamy domkniętą kulę o środku w punkcie 0 i promieniu 1). Wówczas

☐ (a) kula jednostkowa w X jest zwarta w słabej topologii;

☐ (b) kula jednostkowa w X^* jest zwarta w $*$-słabej topologii, jedynie, gdy X jest przestrzenią refleksywną;

☐ (c) kula jednostkowa w X jest zwarta w słabej topologii, gdy X jest dodatkowo przestrzenią refleksywną;

☐ (d) kula jednostkowa w X jest zwarta w słabej topologii, gdy kula jednostkowa w X^* jest zwarta w $*$-słabej topologii;

☐ (e) kula jednostkowa w X^* jest zwarta w $*$-słabej topologii, gdy kula jednostkowa w X jest zwarta w słabej topologii.

Zadanie 2. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią unormowaną. Wówczas

☐ (a) dowolne dwie normy na X są równoważne;

☐ (b) X jest przestrzenią zupełną;

☐ (c) przestrzeń funkcjonałów liniowych na X ma nieskończony wymiar;

☐ (d) jeżeli wymiar przestrzeni X jest równy $p > 2$, to wymiar przestrzeni funkcjonałów liniowych na X jest równy q, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

☐ (e) zbiór $\{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ jest zwarty;

☐ (f) istnieją funkcjonały liniowe na X, które nie są ciągłe;

☐ (g) X jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 3. Niech X będzie przestrzenią liniowo–metryczną (nad $\mathbb{R}$) z metryką przesuwalną d. Wówczas

☐ (a) para $(X, \|\cdot\|)$ tworzy przestrzeń unormowaną, gdzie funkcja $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $\|x\| = d(x, 0)$;

☐ (b) półprosta $\{tx;\ t > 0\}$ $(x \in X,\ x \neq 0)$ jest podzbiorem ograniczonym przestrzeni X (w sensie ograniczoności w przestrzeni liniowo–metrycznej), gdy metryka d jest dodatkowo ograniczona (jako funkcja);

☐ (c) metryka d jest równoważna metryce wyznaczonej przez pewną normę, o ile istnieje otoczenie zera będące zbiorem wypukłym i ograniczonym;

☐ (d) funkcjonał Minkowskiego dowolnego wypukłego otoczenia zera definiuje normę na X;

☐ (e) rodzina wypukłych otoczeń zera stanowi bazę otoczeń zera.

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią unormowaną (nad $\mathbb{R}$). Wówczas

☐ (a) jeśli X jest przestrzenią Banacha, X_0 podprzestrzenią liniową, domkniętą w X, $f : X_0 \to \mathbb{R}$ zaś funkcjonałem liniowym takim, że $f(x) \leqslant p(x)$ $(\forall\, x \in X_0)$, gdzie p jest funkcjonałem Banacha na X, to istnieje funkcjonał liniowy $F : X \to \mathbb{R}$ taki, że $F(x) = 2011f(x)$ $(\forall\, x \in X_0)$ i $F(x) \leqslant p(2011x)$ $(\forall\, x \in X)$;

☐ (b) jeśli X jest przestrzenią Banacha nieskończonego wymiaru, $0 \neq M \subset X$ zaś podprzestrzenią skończonego wymiaru, to istnieje $f \in X^*$ taki, że $f|_M \neq 0$;

☐ (c) dowolny funkcjonał liniowy i ograniczony na X jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią Banacha;

☐ (d) każdy funkcjonał liniowy na X jest ograniczony, gdy $\dim X < \infty$;

☐ (e) jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem liniowym, to f jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker f = \{0\}$ lub $\ker f$ jest podprzestrzenią gęstą w X.

Zadanie 5. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Rozważmy przestrzeń $B(X,Y)$ z normą $\|T\| = \inf\{M > 0;\ (\forall\, x \in X)\ \|Tx\| \leqslant M\|x\|\}$. Wówczas

☐ (a) $(\forall\, T \in B(X,Y))\ \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$;

☐ (b) $(\forall\, T \in B(X,Y))\ \|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\|$, gdy X jest przestrzenią Banacha;

☐ (c) $B(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha;

☐ (d) jeśli operator liniowy $T : X \to Y$ jest ciągły dla pewnego $x \neq 0$, to T jest ciągły;

☐ (e) jeśli operator liniowy $T : X \to Y$ jest ciągły dla $x = 0$, to T jest ciągły;

☐ (f) jeśli $S \in B(X,Y)$, $T \in B(Y,Y)$, to $\|T \circ S\| \geqslant \|T\| \cdot \|S\|$.

Zadanie 6. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Wówczas

☐ (a) jeśli $T : X \to X$ jest operatorem liniowym takim, że zbiór $\{(x, Tx, T^2x, \ldots, T^{2011}x);\ x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha X^{2012}, to operator T jest ciągły w słabej topologii;

☐ (b) jeśli $T \in B(X,Y)$ i T jest surjekcją, to $T(\operatorname{Int} C) = \operatorname{Int}(T(C))$ dla dowolnego podzbioru $C \subset X$;

☐ (c) jeśli $T \in B(X,Y)$, to zbiór $\{(x, Tx);\ x \in X\}$ jest otwarty w $X \times Y$;

☐ (d) jeśli $f \in X^*$, to albo $f = 0$, albo f jest odwzorowaniem otwartym;

☐ (e) jeśli $T_n \in B(X,Y)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ i istnieją granice $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ $(\forall\, x \in X)$, to $T \in B(X,Y)$ i $T = \lim_{n\to\infty} T_n$.

Zadanie 7. Podana niżej przestrzeń jest przestrzenią Banacha:

☐ (a) l^p dla $p \in (0,1)$ z normą $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$;

☐ (b) dowolna przestrzeń Hilberta (z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$) z normą $\|x\| = \frac{1}{2011}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$;

☐ (c) $L^p([0,1]) \times L^q([0,1])$ z normą $\|(f,g)\| = \sqrt{(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx)^{2/p} + (\int_0^1 |g(x)|^q\,dx)^{2/q}}$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

☐ (d) $C[0,1]$ z normą $\|f\| = \frac{1}{2011}\int_0^1 |f(t)|\,dt$;

☐ (e) c_0 (przestrzeń ciągów zbieżnych do zera) z normą $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;

☐ (f) dowolna przestrzeń unormowana, w której każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny;

☐ (g) dowolna przestrzeń unormowana, która jest ośrodkowa.

Zadanie 8. Podana niżej przestrzeń jest przestrzenią refleksywną:

☐ (a) $L^1[0,1]$;

☐ (b) $L^2[0,1]$;

☐ (c) c_0;

☐ (d) każda przestrzeń Banacha, w której słaba topologia jest metryzowalna;

☐ (e) przestrzeń Banacha X, dla której zanurzenie kanoniczne $n : X \to X^{**}$ jest izometryczne.

Zadanie 9. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

☐ (a) jeśli X jest przestrzenią Banacha, to X jest również przestrzenią Banacha w słabej topologii;

☐ (b) w przestrzeni Banacha każdy podzbiór wypukły i domknięty w słabej topologii posiada punkty ekstremalne;

☐ (c) każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni Banacha jest zwarta w słabej topologii;

☐ (d) w przestrzeni $L^2[0,1]$ z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg słabo zbieżny;

☐ (e) w przestrzeni Banacha X każdy podzbiór wypukły i domknięty w X jest również domknięty w słabej topologii na X;

☐ (f) w przestrzeni Banacha X każdy podzbiór wypukły i domknięty w słabej topologii na X jest również domknięty w X;

☐ (g) każdy podzbiór wypukły i otwarty w przestrzeni Banacha jest otwarty w słabej topologii.

Zadanie 10. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wówczas

☐ (a) jeśli domknięta kula jednostkowa w X nie posiada punktów ekstremalnych, to X nie jest refleksywna;

☐ (b) jeśli istnieje funkcjonał liniowy i ciągły na X, który nie osiąga swoich kresów na domkniętej kuli jednostkowej w X, to X nie jest refleksywna;

☐ (c) dla każdego zbioru $K \subset X$ wypukłego i zwartego w słabej topologii na X istnieje element $a \in K$ taki, że zbiór $K \setminus \{a\}$ jest wypukły;

☐ (d) każdy zbiór wypukły w X posiada co najmniej jeden punkt ekstremalny;

☐ (e) w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\|_{\max} = \max\{|x|,|y|\}$ domknięta kula jednostkowa ma cztery punkty ekstremalne;

☐ (f) dowolny funkcjonał liniowy i ciągły na X osiąga swoje kresy na dowolnym podzbiorze wypukłym.

Zadanie 11. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wówczas

☐ (a) zbiór $A \subset X$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ elementów ze zbioru A oraz dowolnego ciągu skalarów $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ zbieżnego do zera mamy $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$;

☐ (b) zbiór $A \subset X$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists\, M > 0)\ (\forall\, x \in A)\ \|x\| > M$;

☐ (c) zbiór $\{x \in X;\ \|x\| < 1\}$ jest otwarty, ograniczony, symetryczny i wypukły;

☐ (d) w przestrzeni X można wprowadzić iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tak, że $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ $(\forall\, x \in X)$;

☐ (e) dla każdego $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ istnieje $f \in X^*$ taki, że $\|f\| = 1$ i $f(x_0) = \|x_0\|$;

☐ (f) jeśli zbiór $A \subset X$ jest symetryczny, to jest wypukły.

Zadanie 12. Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta taką, że $\dim H = \infty$. Oznaczmy $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Wówczas

☐ (a) każdy zbiór ortonormalny w H jest przeliczalny;

☐ (b) norma $\|\cdot\|$ spełnia prawo równoległoboku: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ $(\forall\, x, y \in H)$;

☐ (c) $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$ $(\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in H)$;

☐ (d) jeśli zbiór $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset H$ jest ortonormalny oraz dla dowolnego $y \in H$ mamy $\sum_{n=1}^\infty |\langle y, x_n\rangle|^2 = \|y\|^2$, to $\{x_1, x_2, \ldots\}$ jest zupełny;

☐ (e) jeśli M jest podprzestrzenią domkniętą przestrzeni H, to każdy element $x \in H$ można przedstawić w postaci $x = m + m'$, gdzie $m \in M$, $m' \in M^\perp$;

☐ (f) $\|x\| = \sup_{y\neq 0} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|y\|}$ dla każdego $x \in X$.

Zadanie 13. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$ prawdziwa jest następująca własność współczynników Fouriera:

□ (a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| = \|f\|_{L^1}$;

□ (b) $(|\hat{f}(n)|)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do zera;

□ (c) $(\exists\, c = c(f) \in \mathbb{R})\ |\hat{f}(n)| \leqslant \frac{c}{|n|}$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$;

□ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) = 0$;

□ (e) $(\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{+\infty} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Zadanie 14. Niech $K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} (1 - \frac{|j|}{n+1}) e^{ijt}$ dla $n \geqslant 0$, $t \in \mathbb{T}$. Wówczas

□ (a) $K_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t}$ dla $n \geqslant 0$, $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$;

□ (b) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t)\, dt = 1$ dla $n \geqslant 0$;

□ (c) $K_n * f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e^{ijt}$ dla $n \geqslant 0$, $t \in \mathbb{T}$ i dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$;

□ (d) $K_n * K_n = K_n$ dla $n \geqslant 0$;

□ (e) $\lim_{n\to\infty} K_n * f = f$ dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$ (granicę liczymy w przestrzeni $L^1(\mathbb{T})$);

□ (f) jeśli $t_0 \in \mathbb{T}$ jest punktem ciągłości funkcji $f \in L^1(\mathbb{T})$, to $\lim_{n\to\infty} K_n * f(t_0) = f(t_0)$.

Zadanie 15. Prawdziwe jest następujące twierdzenie dotyczące szeregów Fouriera dla funkcji z przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$:

□ (a) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$ dla dowolnych funkcji $f, g \in L^2(\mathbb{T})$;

□ (b) $f * g \in A(\mathbb{T})$ dla dowolnych funkcji $f, g \in L^2(\mathbb{T})$;

□ (c) szereg Fouriera dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbb{T})$ zbiega do f (tzn. $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = f$) w przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$;

□ (d) dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f) = f$ w przestrzeni $L^2(\mathbb{T})$;

□ (e) ciąg współczynników Fouriera funkcji $f \in L^2(\mathbb{T})$ jest ciągiem ograniczonym.

Zadanie 16. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

□ (a) współczynniki Fouriera dowolnej funkcji klasy C^2 na $\mathbb{T}$ tworzą szereg absolutnie sumowalny;

□ (b) ciąg $(\sigma_n(f))_{n=0}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny, chociaż, na ogół, granicą nie jest funkcja f, dla dowolnej funkcji $f \in C(\mathbb{T})$;

□ (c) ciąg $(\sigma_n(f))_{n=0}^{\infty}$ jest punktowo zbieżny do f dla dowolnej funkcji $f \in C(\mathbb{T})$;

□ (d) jeśli funkcja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone, to $(\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{+\infty} \in l^2(\mathbb{Z})$;

□ (e) jeśli funkcja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest r-krotnie różniczkowalna ($r \in \mathbb{N}$), przy czym r-ta pochodna jest funkcją ograniczoną, to $(\hat{f}(n))_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathrm{o}(\frac{1}{|n|^r})$;

□ (f) jeśli $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest funkcją analityczną (w sensie rzeczywistym), to istnieją stałe $K, a > 0$ takie, że $|\hat{f}(n)|^{2011} \leqslant K \cdot e^{-a|n|}$ dla wszystkich $n \geqslant 0$.

Spis treści