

# INTERNETOWE KÓŁKO MATEMATYCZNE

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

Zadania dla szkoły średniej

Zestaw VIII (21 I 2003)

**Zadanie 1.** Wyznacz wszystkie pary  $(a, b)$  liczb naturalnych spełniających równanie  $\frac{ab}{a+b} = p$ , gdzie  $p$  jest daną liczbą pierwszą.

**Zadanie 2.** Oblicz  $\underbrace{33 \dots 33}_k, \underbrace{99 \dots 99}_l^2$ .

**Zadanie 3.** Wiadomo, że

$$\sin x + \sin y = s \quad \text{oraz} \quad \cos x + \cos y = c.$$

Oblicz:  $\sin(x + y)$ ,  $\cos(x + y)$ ,  $\operatorname{tg}(x + y)$ ,  $\operatorname{ctg}(x + y)$ .

**Zadanie 4.** Na płaszczyźnie dane są odcinki  $A_1B_1$  i  $A_2B_2$ , równej długości. Na odcinku  $A_1B_1$  obrano punkt  $C_1$ , a na odcinku  $A_2B_2$  punkt  $C_2$  w ten sposób, że  $|A_1C_1| = |A_2C_2|$ . Wykaż, że środek odcinka  $C_1C_2$  leży na odcinku łączącym środek odcinka  $A_1A_2$  ze środkiem odcinka  $B_1B_2$ .

**Zadanie 5.** Odległością dwóch prostych w przestrzeni nazywamy długość najkrótszego z odcinków łączących punkty leżące na jednej prostej z punktami leżącymi na drugiej prostej. Udowodnij, że odległość prostych  $k$  i  $l$  wynosi  $r$  dokładnie wtedy, gdy prosta  $k$  jest styczna do nieskończonego walca (nie posiadającego podstaw) o osi symetrii  $l$  i promieniu  $r$ .