Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw XII* (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1\right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_2)(x-x_3)+c(x-x_3)(x-x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw XII* (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1\right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_2)(x-x_3)+c(x-x_3)(x-x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw XII* (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1\right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_2)(x-x_3)+c(x-x_3)(x-x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.

Internetowe Kółko Matematyczne

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw XII* (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1\right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)+b(x-x_2)(x-x_3)+c(x-x_3)(x-x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.