

BUKIETY MATEMATYCZNE DLA SZKOŁY ŚREDNIEJ

<http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/>

8 X 2002

*Bukiet I*

Dana jest liczba naturalna  $n \geq 1$ . Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = n.$$

**Zadanie 1.** Zauważ, że  $a_k \cdot a_{m-k} = n$  dla  $k = 0, 1, \dots, m$ .

**Zadanie 2.** Wykaż, że dla  $k = 0, 1, \dots, m$  zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geq \sqrt{n}.$$

**Zadanie 3.** Sprawdź, że jeżeli  $x, y \geq 1$ , to

$$xy - x - y + 1 \geq 0.$$

**Zadanie 4.** Pokaż, że dla  $k = 0, 1, \dots, m$  zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leq n + 1.$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leq \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_m}{m + 1} \leq \frac{n + 1}{2}.$$