Internetowe Kółko Matematyczne

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla szkoły średniej *Zestaw I* (1 X 2002)

Zadanie 1. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnij, że suma $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2n} + 4^{2n+1}$ dzieli się przez 5.

Zadanie 2. Pokaż, że jeśli $2^x = 3$ i $5^y = 3$, to $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 2$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych, których różnica jest równa ilorazowi.

Zadanie 4. Dany jest prostokąt $n \times 2$. Z lewego górnego rogu idziemy do prawego dolnego po liniach kratki, ale poruszać się możemy tylko w prawo lub w dół. Ile jest możliwych dróg?

Zadanie 5. Dwa okręgi są styczne w punkcie S. Przez ten punkt poprowadzono proste KL i MN, odpowiednio, przecinające pierwszy okrąg w punktach K i M, a drugi w L i N. Udowodnij, że $KM \parallel LN$.

Zestaw II (15 X 2002)

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n liczba $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ jest całkowita.

Zadanie 2. Wiadomo, że $x^2 + y^2 = 1 - xy$. Uzasadnij równość $(x-1)x(x+1) = (y-1)y(y+1)$.

Zadanie 3. Dane są liczby naturalne $m < n$. Która z liczb jest większa: $\sqrt[n]{m}$ czy $\sqrt[m]{n}$?

Zadanie 4. Uzasadnij, że dwa prostokąty o równych polach i równych obwodach mają boki odpowiednio równe.

Zadanie 5. Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru X. Wiadomo, że $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|A \cap B| = k$, $|A \cap C| = l$, $|B \cap C| = m$ i $|A \cap B \cap C| = r$. Ile wynosi $|A \cup B \cup C|$?

Zestaw III (29 X 2002)

Zadanie 1. Ile jest n-cyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 3?

Zadanie 2. Udowodnij, że suma dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych daje w dzieleniu przez 6 resztę 3.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie liczby całkowite, których połowa jest kwadratem liczby całkowitej, a jedna trzecia jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 4. Dana jest liczba naturalna n. Oblicz iloczyn

$$(a+1)(a^2+1)(a^{2^2}+1)\ldots(a^{2^{n-1}}+1)(a^{2^n}+1).$$

Zadanie 5. W kwadratowej tablicy 4×4 ustaw zera i jedynki tak, by w każdym wierszu, kolumnie i głównej przekątnej suma wynosiła 2. Opisz wszystkie możliwości.

Zestaw IV (12 XI 2002)

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli $p+q=1$, to

$$p^2+q^2-p^3-q^3=pq.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba naturalna $n>1$. Wykaż, że jeżeli $n^k+1 \mid n^l+1$ dla pewnych naturalnych k i l, to $k \mid l$.

Zadanie 3. Ile cyfr mają w sumie liczby 2^n i 5^n?

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $a\in(0,4)$. Określamy ciągi (x_n) i (y_n) w sposób następujący:

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{a}}, \quad y_1=\sqrt{2-\sqrt{a}},$$
$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \quad y_{n+1}=\sqrt{2-x_n}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Sprawdź, że ciągi (x_n) i (y_n) są określone poprawnie i wykaż, że ciąg $z_n=x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot y_n$, $n=1,2,3,\ldots$, jest stały.

Zadanie 5. Wykaż, że pole trójkąta o bokach a, b, c jest nie mniejsze od

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

Zestaw V (26 XI 2002)

Zadanie 1. Rozłóż na czynniki wyrażenie

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

Zadanie 2. Znajdź liczbę dzielników naturalnych iloczynu $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, gdzie $p_1,p_2,\ldots,p_k$ to różne liczby pierwsze.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie ciągi geometryczne (x_n), spełniające warunki

$$x_1 + x_4 = 91 \quad \text{i} \quad x_3 + x_6 = 819.$$

Zadanie 4. Dana jest liczba $x > 0$. Oblicz

$$\text{arctg} x + \text{arctg} \frac{1}{x}.$$

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dane są cztery dowolne punkty A, B, C, D. Niech punkty E i F będą odpowiednio środkami odcinków AC i BD. Wykaż, że

$$|EF| \geqslant \left| \frac{|AB| - |CD|}{2} \right|.$$

Zestaw VI (10 XII 2002)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (a, b), dla których $a+2$ jest podzielne przez b, a $b + 3$ jest podzielne przez a.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli pewna liczba całkowita jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to jej dwukrotność też jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 3. Która z liczb jest większa:

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad \text{czy} \quad \sqrt{44}\,?$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie

$$\big||x| + 1| - ||x| - 1|\big| = |x + 1| + |x - 1|.$$

Zadanie 5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x^3 + y^3 &= 1. \end{cases}$$

Zestaw VII (5 I 2003)

Zadanie 1. Nieujemną liczbę całkowitą nazywamy rosnącą, jeśli ciąg cyfr jej zapisu dziesiętnego, od lewej do prawej, jest ciągiem rosnącym (być może jednoelementowym). Wykaż, że liczb rosnących o nieparzystej liczbie cyfr jest o dwie więcej, niż liczb rosnących o parzystej liczbie cyfr.

Zadanie 2. Dane są liczby całkowite a, b, c, d. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n każdy wspólny dzielnik liczb $an + b$ i $cn + d$ jest dzielnikiem liczby $ad - bc$.

Zadanie 3. Funkcja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x \neq 0$ równanie $g(x) \cdot g(\frac{1}{x}) = 1$. Funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest określona za pomocą funkcji $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ równością

$$f(x) = h(x) + g(x) \cdot h(\frac{1}{x})$$

dla $x \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że jeżeli $x \neq 0$ jest pierwiastkiem funkcji f, to $\frac{1}{x}$ też jest pierwiastkiem funkcji f.

Zadanie 4. Znajdź najmniejszą możliwą wartość stosunku promienia okręgu wpisanego do wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym.

Zadanie 5. W trójkącie ABC wysokość AD jest równa bokowi BC. Rozważmy trójkąt $A'B'C'$, w którym $|A'B'| = |AB|$, $|A'C'| = |AC|$ i $|\angle A'| = 90° - |\angle A|$. Udowodnij, że

$$|B'C'| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2}.$$

Zestaw VIII (21 I 2003)

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie pary (a, b) liczb naturalnych spełniających równanie $\frac{ab}{a+b} = p$, gdzie p jest daną liczbą pierwszą.

Zadanie 2. Oblicz $\underbrace{33\ldots33}_{k}{,}\underbrace{99\ldots99}_{l}{}^2$.

Zadanie 3. Wiadomo, że

$$\sin x + \sin y = s \quad \text{oraz} \quad \cos x + \cos y = c.$$

Oblicz: $\sin(x + y)$, $\cos(x + y)$, $\mathrm{tg}(x + y)$, $\mathrm{ctg}(x + y)$.

Zadanie 4. Na płaszczyźnie dane są odcinki A_1B_1 i A_2B_2, równej długości. Na odcinku A_1B_1 obrano punkt C_1, a na odcinku A_2B_2 punkt C_2 w ten sposób, że $|A_1C_1| = |A_2C_2|$. Wykaż, że środek odcinka C_1C_2 leży na odcinku łączącym środek odcinka A_1A_2 ze środkiem odcinka B_1B_2.

Zadanie 5. Odległością dwóch prostych w przestrzeni nazywamy długość najkrótszego z odcinków łączących punkty leżące na jednej prostej z punktami leżącymi na drugiej prostej. Udowodnij, że odległość prostych k i l wynosi r dokładnie wtedy, gdy prosta k jest styczna do nieskończonego walca (nie posiadającego podstaw) o osi symetrii l i promieniu r.

Zestaw IX (4 II 2003)

Zadanie 1. Co jest większe:

$$\sqrt[3]{2002} + \sqrt[3]{2004} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot \sqrt[3]{2003}?$$

Zadanie 2. Znajdź ciąg, w którym suma n pierwszych wyrazów wynosi $n(n^2 - 1)$ dla każdego n.

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 3^y \cdot 25^z &= \frac{3}{4} \cdot 2^x \\ 5^z \cdot 4^x &= \frac{16}{3} \cdot 3^y \\ 2^x \cdot 9^y &= 36 \cdot 5^z \end{cases}$$

Zadanie 4. Niech $f(x)$ będzie funkcją kwadratową. Wykaż, że jeżeli równanie

$$f(x) = f(-x)$$

ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem tego równania.

Zadanie 5. Dany jest wielokąt, w który można wpisać okrąg i na którym można opisać okrąg. Udowodnij, że jeżeli środki tych okręgów się pokrywają, to wielokąt jest foremny.

Zestaw X (18 II 2003)

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$\left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{4n-1}\,\right].$$

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli $a + c \geqslant e > 0$ i $b + d \geqslant f > 0$, to $ad + bc \geqslant ef$ lub $ab + cd \geqslant ef$.

Zadanie 3. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że liczba c jest tego samego znaku co $100a + 10b + c$.

Zadanie 4. Jakie wartości może przyjmować miara najmniejszego kąta n-kąta wypukłego, którego miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny długości n.

Zadanie 5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AB| = |BC|$ i $|\angle ADB| = |\angle BDC|$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem (czyli przekątna jest jego osią symetrii) lub można go wpisać w okrąg.

Zestaw XI (11 III 2003)

Zadanie 1. Z jakim wykładnikiem występuje liczba 23 w rozkładzie liczby 2003! na czynniki pierwsze?

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki

$$x + y + z = xy + yz + zx \quad \text{i} \quad xyz = 1,$$

to co najmniej jedna z nich jest równa 1.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli suma liczb nieujemnych a, b, c, d wynosi 1, to

$$ab + bc + cd \leqslant \frac{1}{4}.$$

Zadanie 4. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Znajdź wzór ogólny na x_n.

Zadanie 5. Przez punkt K leżący na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$) poprowadzono prostą przecinającą ramię AC w punkcie L, a przedłużenie ramienia BC w punkcie M. Niech D będzie punktem, w którym dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina okrąg opisany na trójkącie ABC. Udowodnij, że punkt K jest środkiem odcinka LM wtedy i tylko wtedy, gdy prosta DK jest prostopadła do prostej LM.

Zestaw XII (25 III 2003)

Zadanie 1. Wykaż, że do dowolnej liczby naturalnej w zapisie dziesiętnym można dopisać pewną liczbę cyfr tak, aby otrzymać sześcian liczby naturalnej.

Zadanie 2. Dany jest rosnący ciąg liczb całkowitych a_1, a_2, a_3, ... o tej własności, że ciąg $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, ... jest ograniczony. Udowodnij, że $a_m + a_{n+1} = a_n + a_{m+1}$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli x i y są liczbami dodatnimi, to w przedziale

$$\left[x, x + y + \frac{x}{y} + 1\right]$$

leży co najmniej jeden kwadrat liczby całkowitej.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zadanie 5. Dane są liczby dodatnie a, b, c oraz liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + b(x - x_2)(x - x_3) + c(x - x_3)(x - x_1)$$

ma pierwiastek rzeczywisty.

Zestaw XIII (8 IV 2003)

Zadanie 1. Znajdź największą liczbę naturalną n o tej własności, że suma cyfr sumy cyfr sumy cyfr dowolnej liczby n-cyfrowej jest liczbą jednocyfrową.

Zadanie 2. Iloczyn pewnych dwóch dodatnich liczb całkowitych jest podzielny przez ich sumę. Wykaż, że w rozkładzie tej sumy na iloczyn potęg różnych liczb pierwszych wszystkie wykładniki są większe od 1.

Zadanie 3. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Udowodnij, że jeżeli $(a + b + c) \cdot c < 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 4. Dany jest punkt P leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że suma pól trójkątów ABP i CDP jest równa sumie pól trójkątów BCP i DAP. Czy podobna własność zachodzi, gdy punkt P leży na zewnątrz równoległoboku?

Zadanie 5. Wyprowadź wzór na przekątną pięciokąta foremnego.

Zestaw XIV (22 IV 2003)

Zadanie 1. Dane są dwie liczby naturalne nie będące kwadratami liczb naturalnych. Udowodnij, że suma ich pierwiastków jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Danych jest $2n$ liczb dodatnich mniejszych od M. Udowodnij, że suma pewnych n z danych liczb jest większa od sumy n pozostałych o mniej niż M.

Zadanie 3. Ile jest liczb trzycyfrowych niepodzielnych przez 7 ani przez 13?

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku A przecina przeciwprostokątną BC w punkcie D. Wykaż, że

$$\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{2}{AD^2}.$$

Zadanie 5. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty nie leżące na jednym okręgu, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów oznaczamy znakiem „+”, jeśli leży na zewnątrz okręgu przechodzącego przez pozostałe trzy punkty, a znakiem „−”, jeśli leży wewnątrz tego okręgu. Ile z danych punktów może być oznaczonych znakiem „+”?

Zadanie 1. Symbol S_k oznacza sumę k pierwszych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Pokaż, że

$$S_{5n} - S_n = 2 \cdot (S_{4n} - S_{2n}).$$

Zadanie 2. Udowodnij, że wszystkie punkty przecięcia parabol $y = ax^2 + bx + c$ i $x = dy^2 + ey + f$ $(a, d \neq 0)$ leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x zachodzi nierówność

$$\cos 2x + 4 \cos x + 3 \geqslant 0.$$

Zadanie 4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach A', B' i C'. Uzasadnij, że jeżeli $|\angle A'| = |\angle A|$, $|\angle B'| = |\angle B|$ i $|\angle C'| = |\angle C|$, to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są równoboczne.

Zadanie 5. Czy istnieje wielościan posiadający dokładnie siedem krawędzi?

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Przedstaw tę liczbę w postaci $5 \cdot \text{coś}$.

2. Jeśli nie lubisz logarytmów, to oblicz $3^{\frac{1}{x}}$ i $3^{\frac{1}{y}}$.

4. Narysuj prostokąt poziomo i zauważ, że odcinek linii środkowej, po którym idziemy, jednoznacznie określa całą drogę.

5. Poprowadź przez punkt S wspólną styczną obu okręgów. Co wiemy o kącie, który styczna tworzy z cięciwą wychodzącą z punktu styczności?

Zestaw II

1. Wszystko na jedną kreskę ułamkową, przedstaw licznik w postaci iloczynu.

2. To można policzyć na różne sposoby, np. wyznaczając $x^2 - 1$ i $y^2 - 1$ lub korzystając ze wzoru na $x^3 - y^3$.

3. Porównaj obie liczby z liczbą $\sqrt[n]{n}$.

4. Mając dane obwód i pole, spróbuj obliczyć długość jednego z boków. To samo inaczej: napisz wzory na obwód i pole i skojarz je ze wzorami Viete'a.

5. Zrób rysunek (tzw. diagram Venne'a) i wpisz liczby elementów w odpowiednie kawałki, zaczynając od $A \cap B \cap C$.

Zestaw III

1. Jakie cyfry mogą mieć te liczby? Na ile sposobów można z tych cyfr utworzyć liczbę n-cyfrową?

2. Oznacz najmniejszą z tych liczb przez n.

3. Przez co muszą się dzielić szukane liczby? Co można powiedzieć o rozkładzie na czynniki pierwsze liczby, która jest: a) kwadratem, b) sześcianem?

4. Pomnóż ten iloczyn przez $a - 1$. Rozważ oddzielnie przypadek $a = 1$.

Zestaw IV

1. Tu jest kilka sposobów. Można chytrze wykorzystać to, że $1 - p = q$, a $1 - q = p$, można skorzystać ze wzoru na $p^3 + q^3$, można też wyrazić obie strony równości np. przez q.

2. Spróbuj podzielić z resztą $n^l + 1$ przez $n^k + 1$. Najprościej wykonać to w układzie n-kowym.

3. Co to znaczy, że liczba 2^n ma k cyfr, a liczba 5^n ma l cyfr?

4. Udowodnij indukcyjnie, że $x_n \in (0, 2)$ dla każdego n. Zauważ, że ciąg (z_n) jest stały dokładnie wtedy, gdy $z_n = z_{n+1}$ dla każdego n.

5. Wykaż, że pole trójkąta jest nie mniejsze od $\frac{a^2+b^2}{4}$.

Zestaw V

1. Zastosuj wzory na różnicę sześcianów i na sumę sześcianów. Patrz uważnie, co można wyłączyć. Zwróć uwagę na to, że dane wyrażenie jest symetryczne względem x, y i z.

2. Najpierw określ, jak może wyglądać taki dzielnik. Następnie policz, na ile sposobów można go utworzyć.

3. Spróbuj sprytnie wyznaczyć q.

4. Oznacz $\mathrm{arctg} x$ przez t. Czemu jest równe x? Czemu jest równe $\frac{1}{x}$?

5. Gdzie można szukać odcinków o długościach $\frac{|AB|}{2}$ i $\frac{|CD|}{2}$? Czy można je powiązać z punktami E i F?

Zestaw VI

1. Najpierw rozważ przypadki $a+2=b$ i $b+3=a$. Następnie skorzystaj z tego, że jeśli $k \mid l$ i $k \neq l$, gdzie k i l są liczbami całkowitymi większymi od 0, to $l \geqslant 2k$.

2. Spróbuj coś dodać do a^2+b^2 i to samo odjąć od a^2+b^2 tak, aby w obu przypadkach otrzymać kwadrat.

3. Zanim podniesiesz obie strony do kwadratu, przenieś jeden pierwiastek z lewej na prawą stronę.

4. Nie ma rady, trzeba rozpatrywać przedziały.

5. Skorzystaj ze wzoru na sumę sześcianów. Otrzymasz równanie kwadratowe.

Zestaw VII

1. Tu nie trzeba niczego liczyć.

2. Znajdź równość łączącą te trzy wyrażenia.

3. To wcale nie jest trudne.

5. Sposób I – najpierw twierdzenie cosinusów. Sposób II – rozetnij trójkąt ABC wzdłuż wysokości AD i potraktuj to zadanie jak układankę.

Zestaw VIII

1. Wykorzystaj to, że licznik ułamka po lewej stronie powinien być podzielny przez p. Drugi sposób: przekształć równanie do postaci $(a-\ldots)(b-\ldots) = \text{liczba}$.

2. Najpierw wyraź $\underbrace{33\ldots33}_{k}$ za pomocą potęgi liczby 10. Następnie oblicz $\underbrace{33\ldots3}_{k-1}4^2$.

3. Oblicz najpierw $\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}$.

4. Rozważ pomocniczy równoległobok.

5. Umieść proste k i l na równoległych płaszczyznach. Znajdź odcinek realizujący najkrótszą odległość.

Zestaw IX

1. Oznacz 2003 przez n i podnieś oba wyrażenia do sześcianu.

2. Jaka zależność wiąże wyraz a_n z sumami początkowych wyrazów?

3. Z pierwszego równania wyznacz np. 3^y i wstaw do pozostałych równań. Następnie z drugiego równania oblicz np. 5^z i wstaw do trzeciego równania.

4. To jest łatwe. Podstaw wzór funkcji kwadratowej do danego równania.

5. Zbadaj pojedynczy bok oraz kąt wielokąta.

Zestaw X

1. Pokaż, że między liczbami stojącymi „pod częścią całkowitą" zachodzi nierówność. Zbadaj, czy te liczby mogą być rozdzielone liczbą całkowitą.

2. Trzeba pokazać, że zachodzi I lub II. Co by było, gdyby nie zachodziło I ani II?

3. Jak może wyglądać wykres funkcji f? Zapisz $100a + 10b + c$ używając symbolu f.

4. Znajdź średnią arytmetyczną miar wszystkich kątów. Co możemy powiedzieć o najmniejszym i największym wyrazie skończonego ciągu arytmetycznego, w którym znamy średnią arytmetyczną wszystkich wyrazów?

5. Znajdź wszystkie punkty P na półprostej DC, dla których $|BP| = |AB|$.

Zestaw XI

1. Ile czynników iloczynu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2003$ jest podzielnych przez 23. Ile przez 23^2?

2. Sposób I: wzory Viete'a. Sposób II: zamień x, y, z na $a+1, b+1, c+1$ (łatwiej pokazać, że coś jest równe 0, niż 1).

3. Zauważ, że jeżeli suma dwóch liczb dodatnich wynosi 1, to ich iloczyn nie przekracza $\frac{1}{4}$. Wykorzystaj to.

4. Rozważ ciąg (x_n^2).

5. Poprowadź przez punkt L prostą równoległą do BC. Zauważ, że punkt K jest środkiem odcinka LM dokładnie wtedy, gdy $|AL| = |BM|$.

Zestaw XII

1. Przyjmij, że dopisujesz k cyfr. Napisz nierówność na szukany sześcian.

2. Jaką własność ciągu różnic wyraża teza zadania?

3. Dla jakiego y przedział jest najkrótszy?

4. Usuń niewymierność z mianowników.

5. Zauważ, że jeśli funkcja f nie ma pierwiastków, to jej wartości w punktach x_1, x_2, x_3 są tego samego znaku.

Zestaw XIII

1. Jaka jest najmniejsza liczba o sumie cyfr nie będącej liczbą jednocyfrową?

2. Zauważ, że dowolny dzielnik pierwszy sumy danych liczb jest dzielnikiem ich iloczynu, skąd wynika, że ...

3. Rozważ funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$. Co to jest $a + b + c$? Co to jest c?

4. Oblicz sumę pól trójkątów ABP i CDP. Podobnie dla trójkątów BCP i DAP.

5. To nie jest takie łatwe. Trzeba skorzystać z twierdzenia cosinusów. Ułóż równanie na ten cosinus i rozwiąż je.

Zestaw XIV

1. Przypuśćmy, że suma pierwiastków danych liczb jest liczbą wymierną.

2. Ustaw dane liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

3. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych: a) przez 7, b) przez 13, c) przez 7 i przez 13, d) przez 7 lub przez 13?

4. Pierwszy sposób: twierdzenie sinusów. Drugi sposób: rozważ kwadrat o przekątnej AD.

5. Są dwie możliwości: albo jeden z danych punktów leży wewnątrz trójkąta o wierzchołkach w trzech pozostałych punktach, albo dane punkty są wierzchołkami czworokąta wypukłego.

Zestaw XV

1. Wyraź S_k przez a_1 i r. Drugi sposób: różnica $S_l - S_k$ (dla $l > k$) jest sumą pewnych wyrazów ciągu.

2. Równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$. Spróbuj z warunków zadania otrzymać takie równanie.

3. Skorzystaj ze wzoru na $\cos 2x$.

4. Mając dane kąty A, B, C, oblicz kąty A', B', C'.

5. Jeśli wielościan posiada ścianę o $\geqslant 4$ bokach, to ma $\geqslant ?$ krawędzi. Zatem wielościan, który ma $<?$ krawędzi, ma wszystkie ściany trójkątne.