Bukiety matematyczne dla szkoły średniej

`http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/`

8 X 2002 *Bukiet 1*

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Jej wszystkie dzielniki naturalne to

$$1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n.$$

1. Zauważ, że $a_k \cdot a_{m-k} = n$ dla $k = 0, 1, \ldots, m$.

2. Wykaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_k + a_{m-k}}{2} \geqslant \sqrt{n}.$$

3. Sprawdź, że jeżeli $x, y \geqslant 1$, to

$$xy - x - y + 1 \geqslant 0.$$

4. Pokaż, że dla $k = 0, 1, \ldots, m$ zachodzi nierówność

$$a_k + a_{m-k} \leqslant n + 1.$$

5. Udowodnij, że

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}{m+1} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

22 X 2002 *Bukiet 2*

Dane są liczby naturalne $m, n \geqslant 3$. Rozważmy wielościan (niekoniecznie foremny), którego wszystkie ściany są n-kątami i w którym przy każdym wierzchołku jest m ścian. Oznaczmy przez w liczbę wierzchołków, przez k liczbę krawędzi, a przez s liczbę ścian naszego wielościanu.

1. Uzasadnij, że $mw = 2k = ns$.

2. Wiadomo, że dla dowolnego wielościanu prawdziwy jest wzór $w - k + s = 2$. Korzystając z tego wzoru wykaż, że

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

3. Udowodnij nierówność $(m-2)(n-2) < 4$.

4. Wyznacz wszystkie pary (m, n), dla których istnieje wielościan spełniający warunki zadania.

5. Wyznacz wszystkie pary (m, n) spełniające warunek
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$
i zbadaj sens geometryczny tego przypadku.

5 XI 2002 *Bukiet 3*

1. Udowodnij nierówność $10^{n-3} \geqslant n$ dla $n \geqslant 4$.

2. Wykaż, że jeśli $n \geqslant 4$, to najmniejsza liczba n-cyfrowa jest większa od największej możliwej sumy kwadratów cyfr liczby n-cyfrowej.

3. Wykaż, że każda liczba trzycyfrowa jest większa od sumy kwadratów swoich cyfr.

4. Rozważmy dowolną liczbę naturalną (większą od 0). Utwórzmy ciąg, którego pierwszym wyrazem jest ta liczba, a każdy następny wyraz jest równy sumie kwadratów cyfr wyrazu poprzedniego (w zapisie dziesiętnym). Uzasadnij, że w otrzymanym ciągu:
a) wystąpi liczba jedno- lub dwucyfrowa;
b) od pewnego miejsca wszystkie wyrazy będą równe 1 lub wystąpi okres zawierający liczbę 4.

19 XI 2002 *Bukiet 4*

Niech O będzie punktem przecięcia symetralnych trójkąta ABC, H punktem przecięcia wysokości, zaś S środkiem odcinka OH. Niech punkty D, E, F będą (odpowiednio) środkami boków BC, CA, AB, punkty K, L, M spodkami wysokości poprowadzonych z wierzchołków A, B, C, zaś punkty P, Q, R środkami odcinków AH, BH, CH.

1. Wykaż, że odcinki FD i PR są równoległe do boku AC, odcinki FE i QR są równoległe do boku BC, odcinki FQ i ER są równoległe do wysokości AK, a odcinki FP i DR są równoległe do wysokości BL.

2. Zauważ, że czworokąty $DRPF$ i $ERQF$ są prostokątami.

3. Uzasadnij, że odcinki OF i RH są równe i równoległe.

4. Pokaż, że punkt S jest środkiem odcinka FR.

5. Udowodnij, że punkty $D, E, F, K, L, M, P, Q, R$ leżą na jednym okręgu o środku S.

6. Czy coś się zmieni w powyższych rozważaniach, jeśli niektóre z występujących punktów będą się pokrywać?

3 XII 2002 *Bukiet 5*

1. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 1$ i dowolnego rzeczywistego $x \geqslant -1$ zachodzi **nierówność Bernoulliego**

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Zauważ, że w tej nierówności ma miejsce równość dokładnie wtedy, gdy $n = 1$ lub $x = 0$.

2. Udowonij, że dla dowolnego naturalnego $n \geqslant 2$ zachodzą nierówności:

a)

$$\frac{(n-1)^n \cdot (n+1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n},$$

b)

$$\frac{n^{2n+2}}{(n-1)^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} > \frac{n}{n-1}.$$

3. Pokaż, że:

a) ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący,

b) ciąg $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ jest malejący.

4. Uzasadnij, że $a_k < b_l$ dla dowolnych naturalnych k, l.

5. Udowodnij, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do tej samej granicy.

17 XII 2002 *Bukiet 6*

W tym bukiecie dopuszczamy zapis dziesiętny liczby naturalnej zaczynający się od samych zer. Oznacza to, że za liczby n-cyfrowe uważamy liczby od 0 do $10^n - 1$. Ponadto dla każdej liczby naturalnej jest określona jej n-cyfrowa końcówka (na przykład czterocyfrową końcówką liczby 12 jest 0012).

Mówimy, że liczba A spełnia warunek $\mathcal{W}_n$ (gdzie n jest liczbą naturalną), jeśli jej n-cyfrowa końcówka jest taka sama jak n-cyfrowa końcówka liczby A^2, czyli $10^n \mid A^2 - A$.

1. Znajdź wszystkie liczby jednocyfrowe spełniające warunek $\mathcal{W}_1$.

W zadaniach 2. i 3. chcemy dla danej liczby n-cyfrowej A_n spełniającej warunek $\mathcal{W}_n$ znaleźć taką cyfrę a_n, by liczba $n{+}1$-cyfrowa $A_{n+1} = 10^n \cdot a_n + A_n$ spełniała warunek $\mathcal{W}_{n+1}$.

2. Pokaż, że dla: a) $A_n = 0$, b) $A_n = 1$, jedyna możliwość to $a_n = 0$, i wówczas a) $A_{n+1} = 0$, b) $A_{n+1} = 1$.

3. Jaką cyfrę należy przyjąć za a_n, jeśli ostatnią cyfrą A_n jest: a) 5, b) 6? Podaj te cyfry dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

4. Udowodnij, że dla każdego n istnieją dokładnie cztery liczby n-cyfrowe (czyli od 0 do $10^n - 1$) spełniające warunek $\mathcal{W}_n$.

14 I 2003 *Bukiet 7*

Dane są liczby rzeczywiste a i b. Szukamy ciągów (x_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, spełniających równanie

$$(\star) \qquad x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Uzasadnij, że istnieje dokładnie jeden ciąg (x_n), spełniający równanie $(\star)$, o danych wyrazach x_0 i x_1.

2. Dla jakich $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ciąg $x_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, spełnia równanie $(\star)$?

3. Czy istnieje takie $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, że ciąg postaci $x_n = nq^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, spełnia równanie $(\star)$?

4. Zauważ, że jeśli ciągi (x'_n) i (x''_n) spełniają równanie $(\star)$, to dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$ ciąg $(ux'_n + vx''_n)$ też spełnia równanie $(\star)$.

5. Znajdź ciągi spełniające warunki:

a) $\quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) $\quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

6. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c. Przedyskutuj sposób szukania ciągów (x_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, spełniających równanie

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n + c = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

28 I 2003 *Bukiet 8*

1. Znajdź równanie, które spełniają długości boków trapezu prostokątnego.

2. Dwie kule, styczne do płaszczyzny, są styczne do siebie. Uzasadnij, że środki kul i punkty ich styczności do płaszczyzny są wierzchołkami trapezu prostokątnego.

3. Trzy kule, parami styczne, są styczne do płaszczyzny w wierzchołkach trójkąta o bokach długości a, b i c. Znajdź promienie tych kul.

11 II 2003 *Bukiet 9*

Liczbę całkowitą nazywamy **kwadratem**, jeśli jest kwadratem liczby całkowitej. Liczbę całkowitą nazywamy **liczbą bezkwadratową**, jeśli nie jest podzielna przez żaden kwadrat większy od 1.

1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci iloczynu kwadratu i liczby bezkwadratowej.

2. Wykaż, że jeżeli pierwiastek liczby całkowitej jest liczbą wymierną, to (ten pierwiastek) jest liczbą całkowitą.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 0$, $n = m^2 \cdot r$, gdzie m jest liczbą całkowitą, a r jest liczbą bezkwadratową. Pokaż, że jeżeli liczby całkowite x i y spełniają równanie $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$, to liczby $\sqrt{xr}$ i $\sqrt{yr}$ są całkowite.

4. Uzasadnij, że jeśli kwadrat jest podzielny przez liczbę bezkwadratową, to jest podzielny również przez jej kwadrat.

5. Opisz wszystkie rozwiązania równania $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ w liczbach całkowitych x, y, gdzie n jest daną liczbą całkowitą.

25 II 2003 *Bukiet 10*

Dany jest czworościan $ABCD$. Niech punkty K, L, M, P, Q, R będą odpowiednio środkami krawędzi AD, BD, CD, BC, CA, AB. Niech h_A, h_B, h_C, h_D będą prostymi zawierającymi wysokości czworościanu poprowadzone odpowiednio przez punkty A, B, C, D.

1. a) Uzasadnij, że czworokąty $KLPQ$, $LMQR$ i $MKRP$ są równoległobokami.

b) Zauważ, że odcinki KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem każdego z nich.

2. a) Pokaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.

b) Udowodnij równoważność:

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 \Leftrightarrow |KP| = |LQ| \Leftrightarrow KLPQ \text{ jest prostokątem.}$$

3. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostopadłymi punktów A i B na prostą CD. Udowodnij równoważność:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow h_A \text{ i } h_B \text{ się przecinają.}$$

4. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) Proste h_A, h_B, h_C i h_D przecinają się w jednym punkcie;

(ii) $AD \perp BC$, $BD \perp CA$ i $CD \perp AB$;

(iii) $|KP| = |LQ| = |MR|$;

(*iv*) $|AD|^2 + |BC|^2 = |BD|^2 + |CA|^2 = |CD|^2 + |AB|^2$.

18 III 2003 *Bukiet 11*

1. Dane są liczby rzeczywiste p i q. Rozważmy wielomian

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

a) Pokaż, że jeżeli $M > \max(\sqrt{2|p|}, \sqrt[3]{2|q|})$, to

$$f(M) > 0 \text{ i } f(-M) < 0.$$

b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.

c) Zbadaj liczbę i krotności pierwiastków rzeczywistych wielomianu f.

2. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, przy czym $a \neq 0$.

a) Znajdź takie liczby p, q, x_0, by dla każdego rzeczywistego x zachodziła równość

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a((x + x_0)^3 + p(x + x_0) + q).$$

b) Zbadaj liczbę i krotności pierwiastków rzeczywistych wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1 IV 2003 *Bukiet 12*

Niech a_n będzie największą możliwą liczbą części, na które może podzielić płaszczyznę n różnych prostych ($n = 0, 1, 2, \ldots$), na przykład $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

1. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że na płaszczyźnie jest $n - 1$ prostych, które dzielą ją na a_{n-1} części. Rozważmy nową (n-tą) prostą.

a) Na ile najwięcej części dane $n - 1$ prostych może podzielić tę prostą?

b) Jaka jest największa liczba części podziału płaszczyzny danymi $n - 1$ prostymi, przez które może przechodzić n-ta prosta?

2. Udowodnij dla $n \geqslant 1$ wzór $a_n = a_{n-1} + n$.

3. Wyprowadź jawny wzór na a_n.

Niech b_n będzie największą możliwą liczbą części, na które może podzielić przestrzeń n różnych płaszczyzn ($n = 0, 1, 2, \ldots$), na przykład $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4$.

4. Niech $n \geqslant 1$. Załóżmy, że w przestrzeni jest $n - 1$ płaszczyzn, które dzielą ją na b_{n-1} części. Rozważmy nową (n-tą) prostą.

a) Na ile najwięcej części dane $n - 1$ płaszczyzn może podzielić tę płaszczyznę?

b) Jaka jest największa liczba części podziału przestrzeni danymi $n - 1$ płaszczyznami, przez które może przechodzić n-ta płaszczyzna?

5. Udowodnij dla $n \geqslant 1$ wzór $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$.

6. Wyprowadź wzór na b_n.

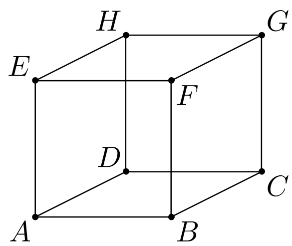
15 IV 2003 *Bukiet 13*

Załóżmy, że we wierzchołkach sześcianu umieściliśmy liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (po jednej liczbie przy każdym wierzchołku) w ten sposób, że suma liczb przy każdej ścianie jest taka sama.

1. Wykaż, że suma dwóch liczb na dowolnej krawędzi sześcianu jest równa sumie liczb na przeciwległej krawędzi.

2. Uzasadnij, że liczby 1 i 8 leżą przy jednej krawędzi.

Załóżmy, że 1 leży we wierzchołku A, a 8 we wierzchołku E.



3. Udowodnij, że liczby we wierzchołkach B i D są nie mniejsze od 4, a liczby we wierzchołkach F i H są nie większe od 5.

4. Udowodnij, że liczba we wierzchołku C jest nie mniejsza od 4, a liczba we wierzchołku G jest nie większa od 5.

5. Opisz wszystkie możliwości umieszczenia liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 we wierzchołkach sześcianu w ten sposób, by suma liczb przy każdej ścianie była taka sama.

29 IV 2003 *Bukiet 14*

Dane są liczby dodatnie a i b. Określmy ciąg (x_n) następująco:

$$x_1 = b, \qquad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy przez c liczbę dodatnią spełniającą warunek

$$\sqrt{a + c} = c.$$

1. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pokaż, że jeżeli $x_n < x_{n+1}$, to $x_{n+1} < x_{n+2}$, jeżeli $x_n = x_{n+1}$, to $x_{n+1} = x_{n+2}$, a jeżeli $x_n > x_{n+1}$, to $x_{n+1} > x_{n+2}$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że ciąg (x_n) jest ściśle monotoniczny lub stały.

c) Wykaż, że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest rosnący, jeżeli $b = c$, to ciąg (x_n) jest stały, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest malejący.

2. a) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że jeżeli $x_n < c$, to $x_{n+1} < c$, jeżeli $x_n = c$, to $x_{n+1} = c$, a jeżeli $x_n > c$, to $x_{n+1} > c$.

b) Udowodnij (indukcyjnie), że jeżeli $b < c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z góry przez c, a jeżeli $b > c$, to ciąg (x_n) jest ograniczony z dołu przez c.

3. Uzasadnij, że ciąg (x_n) jest zbieżny i znajdź jego granicę.

20 V 2003 *Bukiet 15*

Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ została przedstawiona w postaci $f = f_0 + f_1$, gdzie $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_0 jest funkcją parzystą, a f_1 jest funkcją nieparzystą.

1. Mając dane $f_0(x)$ i $f_1(x)$ dla pewnego x, napisz, czemu jest równe $f(x)$ i $f(-x)$.

2. Mając dane $f(x)$ i $f(-x)$ dla pewnego x, oblicz $f_0(x)$ i $f_1(x)$.

3. Znajdź f_0 i f_1, jeśli f jest postaci:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi;

b) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 są danymi liczbami rzeczywistymi;

c) $f(x) = a \sin x + b \cos x$, gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi.

4. Udowodnij, że dowolną funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można dokładnie jednym sposobem przedstawić w postaci sumy funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

Wskazówki do zadań

Bukiet 1

1. Liczba naturalna d jest dzielnikiem liczby naturalnej n dokładnie wtedy, gdy $n = k \cdot d$ dla pewnego naturalnego k.

2. Skorzystaj z nierówności $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$.

3. Przekształć wyrażenie po lewej stronie nierówności.

4. Zastosuj nierówność z zadania 3.

5. Co możemy powiedzieć o sumie

$$(a_0 + a_m) + (a_1 + a_{m-1}) + \ldots + (a_{m-1} + a_1) + (a_m + a_0)?$$

Bukiet 2

1. Policz ściany i krawędzie przy każdym wierzchołku oraz wierchołki i krawędzie przy każdej ścianie.

2. Korzystając z zadania 1, oblicz w i s dla danego k.

3. Wymnóż nawiasy i przekształć tę nierówność.

4. Jakie liczby spełniają nierówność z zadania 3?

5. Dla każdej z wyznaczonych par liczb (m, n) spróbuj kleić (rysować) wielościan spełniający warunki zadania.

Bukiet 3

1. Pierwszy sposób: indukcja matematyczna. Drugi sposób: sprawdź, że w przedziale $\langle 4, +\infty)$ funkcja $x \mapsto 10^{x-3} - x$ jest rosnąca.

2. Skorzystaj z zadania 1.

3. Zapisz liczbę trzycyfrową w postaci $100A + 10B + C$ i wykorzystaj nierówności $1 \leqslant A \leqslant 9$, $B \leqslant 9$ i $C \leqslant 9$.

4. Na mocy zadań 2 i 3 możemy się ograniczyć do ciągów zaczynających się od liczby dwucyfrowej. Warto też zauważyć, że ciąg zaczynający się od liczby AB jest dalej taki sam, jak ciąg zaczynający się od liczby BA. Trzeba się trochę napracować rozpatrując wszystkie przypadki.

Bukiet 4

1. Skorzystaj z tego, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku.

2. Skorzystaj z zadania 1.

3. Szukaj równoległoboków, jednego o boku OF, drugiego o boku RH.

4. Czworokąt $HFOR$ jest równoległobokiem.

5. Dlaczego punkt S jest środkiem prostokątów z zadania 2? Pozostaje wykazać, że $|FS| = |MS|$, $|DS| = |KS|$ i $|ES| = |LS|$.

Bukiet 5

1. Indukcja.

2. Wyrażenia po lewej stronie przekształć tak, by pasowały do lewej strony nierówności Bernoulliego.

3. Indukcja. W dowodzie kroku indukcyjnego przydadzą się nierówności z zadania 2.

4. Zauważ najpierw, że $a_n < b_n$ dla każdego n.

5. Zbieżność wynika z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym (z odpowiedniej strony). Do dowodu równości granic wykorzystaj zależność między a_n i b_n.

Bukiet 6

1. Chodzi o liczby jednocyfrowe, których kwadrat ma tę samą cyfrę jedności.

2. Jaka jest $n+1$-cyfrowa końcówka liczby $(10^n \cdot a_n + A_n)^2$?

3. Jaka jest $n+1$-sza cyfra od końca liczby $(10^n \cdot a_n + A_n)^2$?

4. Indukcja.

Bukiet 7

1. Potraktuj równanie $(\star)$ jak wzór na x_{n+2}.

2. $x_n = q^n$, $x_{n+1} = q^{n+1}$, $x_{n+2} = q^{n+2}$.

3. Podstaw odpowiednie wyrażenia do równania $(\star)$ i wyłącz n przed nawias (z tych składników, w których występuje).

4. Wystarczy podstawić nowy ciąg do równania $(\star)$ i już wszystko widać.

5. Znajdź najpierw ciągi spełniające równanie, jak w zadaniach 2 i 3. Następnie dopasuj ciąg otrzymany jak w zadaniu 4, do warunków na x_0 i x_1.

6. Spróbuj sprowadzić to równanie do postaci równania $(\star)$.

Bukiet 8

1. Wykorzystaj pewien trójkąt prostokątny.

2. Rozważ proste przechodzące przez środki kul, prostopadłe do płaszczyzny.

3. Masz trzy trapezy prostokątne.

Bukiet 9

1. Sposób I: uwzględnij wykładniki występujące w rozkładzie danej liczby na iloczyn potęg różnych liczb pierwszych. Sposób II: rozważ największy kwadrat, przez który jest podzielna dana liczba.

2. Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci nieskracalnej.

3. Jeden pierwiastek na prawą stronę i podnieś do kwadratu.

4. Wykaż, że jeśli kwadrat jest podzielny przez liczbę pierwszą, to jest podzielny również przez jej kwadrat.

Bukiet 10

1. a) Spójrz na odcinki KL i PQ odpowiednio w trójkątach ABD i ABC.

b) Co możemy powiedzieć o odcinkach KP i LQ w równoległoboku $KLPQ$?

2. a) Twierdzenie cosinusów.

b) Skorzystaj z punktu a) dla równoległoboku $KLPQ$.

3. Zauważ, że wysokości czworościanu poprowadzone przez punkty A i B leżą w płaszczyznach prostopadłych do prostej CD.

Bukiet 11

1. a) Przekształć nierówności $M > \sqrt{2|p|}$, $M > \sqrt[3]{2|q|}$ do postaci $\ldots > p$, $\ldots > q$ i wykorzystaj je.

b) Wykorzystaj pochodną funkcji f.

c) Zbadaj warunki, przy których funkcja f ma pierwiastki w poszczególnych przedziałach monotoniczności.

2. a) Przyrównaj współczynniki wielomianów po obu stronach równości.

b) Skorzystaj z zadań 1c) i 2a).

Bukiet 12

1. a) W ilu punktach dane proste mogą przecinać n-tą prostą?

b) Każda część n-tej prostej leży w innej części płaszczyzny.

2. n-ta prosta dzieli na dwie części każdą część płaszczyzny, przez którą przechodzi.

3. W poprzednim zadaniu a_n zostało wyrażone przez a_{n-1}. Wyraź a_{n-1} przez a_{n-2}, a_{n-2} przez a_{n-3}, itd.

4. a) Każda z płaszczyzn dzieli n-tą płaszczyznę wzdłuż pewnej prostej.

4b, 5, 6. Rozumujemy analogicznie jak w zadaniach 1b, 2 i 3.

Bukiet 13

1. Rozważ dwie sąsiednie ściany.

2. Zwróć uwagę na krawędzie przeciwległe do wychodzących z wierzczołka, przy którym stoi 1.

3. Jaka jest najmniejsza możliwa suma liczb przy krawędzi przeciwległej do krawędzi AB? Jaka jest największa możliwa suma liczb przy krawędzi przeciwległej do krawędzi EF?

4. Liczby stojące przy wierzchołkach B i D są nie większe od 7, więc jedna z nich, np. ta przy B, jest nie większa od 6. Zbadaj sumę liczb przy krawędzi przeciwległej do AB.

5. Jakie liczby mogą stać przy wierzchołkach C i G?

Bukiet 14

1. a) Jak należy przekształcić nierówność $x_n < x_{n+1}$, żeby otrzymać nierówność $x_{n+1} < x_{n+2}$?

b) Krok indukcyjny jest w punkcie a).

c) Zbadaj dwa pierwsze wyrazy.

2. a) Jak należy przekształcić wyrażenie x_n, żeby otrzymać wyrażenie x_{n+1}?

b) Krok indukcyjny jest w punkcie a). Pamiętaj o zadaniu 1c).

3. Skorzystaj z twierdzenia o zbieżności ciągu monotonicznego ograniczonego. W celu obliczenia granicy wykorzystaj zależność między x_n i x_{n+1}.

Bukiet 15

1. $f_0(-x) = f_0(x)$, $f_1(-x) = -f_1(x)$.

2. Skorzystaj z równości otrzymanych w zadaniu 1.

4. Z zadania 2 wynika, że funkcje f_0 i f_1, jeśli istnieją, to są jednoznacznie wyznaczone przez f. Wystarczy sprawdzić, że funkcje określone wzorami z zadania 2 spełniają żądane warunki.