Internetowe Kółko Matematyczne

http://www.mat.uni.torun.pl/~kolka/

Zadania dla gimnazjum

Zestaw I (8 X 2002)

Zadanie 1. Znajdź dziesięć kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, których suma jest podzielna przez 99.

Zadanie 2. Ile jest liczb tysiąccyfrowych?

Zadanie 3. Zużycie paliwa podaje się w litrach na 100 kilometrów lub w milach na galon. Ile mil przejedzie na jednym galonie paliwa samochód, który spala 5 litrów na 100 kilometrów? Mila to około $1,609$ kilometra, a galon to około $3,785$ litra.

Zadanie 4. O dwunastej kąt między wskazówkami zegara wynosi $0°$. Do jakiej wartości wzrośnie w ciągu 10 minut? O której godzinie wyniesie $90°$?

Zadanie 5. Jaka jest największa, a jaka najmniejsza liczba części, na które może podzielić płaszczyznę pięć różnych prostych?

Zestaw II (22 X 2002)

Zadanie 1. Ile razy jedna liczba powinna być większa od drugiej, żeby ich suma była o połowę większa od ich różnicy?

Zadanie 2. Uzasadnij, że liczba $321^{654} - 123^{456}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 3. Czy milion minut to mniej, czy więcej niż dwa lata?

Zadanie 4. Grupa turystów wyruszyła na pieszą wędrówkę. Z miasta A do miasta B turyści szli trójkami, z miasta B do miasta C czwórkami, a z C do D piątkami. W miastach B i C grupa powiększała się o jedną osobę. Znajdź liczbę turystów, którzy wyszli z miasta A wiedząc, że jest ona dwucyfrowa.

Zadanie 5. Jakie wielokąty (o ilu bokach) można otrzymać przecinając sześcian płaszczyzną.

Zestaw III (5 XI 2002)

Zadanie 1. Przez co trzeba podzielić 50, żeby otrzymać resztę 5? Znajdź wszystkie możliwości.

Zadanie 2. Która z liczb: 9^{27}, 27^{19}, 81^{13} jest największa, a która najmniejsza?

Zadanie 3. Samochód przejechał 60 kilometrów. Ile czasu zajęła ta podróż, jeśli połowę czasu samochód jechał z prędkością 90 kilometrów na godzinę, a drugą połowę z prędkością 60 kilometrów na godzinę?

Zadanie 4. Ile jest n-cyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 2?

Zadanie 5. Najmniejszy kąt trójkąta ma miarę $30°$. Jaką największą i jaką najmniejszą wartość może mieć miara największego kąta w takim trójkącie?

Zestaw IV (19 XI 2002)

Zadanie 1. Dla jakich dwóch liczb trzycyfrowych, składających się z sześciu różnych cyfr, ich iloczyn jest największy, a dla jakich najmniejszy?

Zadanie 2. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4, ale niepodzielnych przez 5?

Zadanie 3. A waży tyle samo co B i C razem, B waży tyle samo co C i D razem, a k sztuk A waży tyle samo co l sztuk D. Ile razy cięższe od C jest B?

Zadanie 4. Akurat w tej chwili wychodzę. Jeśli będę szedł z prędkością $6km/h$, to do celu dojdę na $10^{\underline{30}}$, a jeśli z prędkością $5km/h$, to dojdę na $11^{\underline{00}}$. Jak daleko jest do celu? Która godzina jest teraz?

Zadanie 5. Na ile części mogą podzielić przestrzeń cztery płaszczyzny?

Zestaw V (3 XII 2002)

Zadanie 1. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnij równość

$$n^2 + (n^2+1) + (n^2+2) + \ldots + (n^2+n-1) + (n^2+n) =$$
$$= (n^2+n+1) + (n^2+n+2) + \ldots + (n^2+2n-1) + (n^2+2n).$$

Zadanie 2. Znajdź dwutysięczną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{13}$.

Zadanie 3. Pewna liczba daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, a przy dzieleniu przez 5 resztę 3. Jaką resztę da ta liczba przy dzieleniu przez 15?

Zadanie 4. Dane są liczby rzeczywiste a i b. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} ax + (1-a)y = b + a \\ (1-a)x + ay = b + 1 - a. \end{cases}$$

Zadanie 5. Ile wierzchołków ma wielokąt, którego każdy kąt ma miarę $179°$?

Zestaw VI (17 XII 2002)

Zadanie 1. Jaki jest największy możliwy wynik dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr? A drugi w kolejności?

Zadanie 2. Czy dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje taka liczba rzeczywista b, że suma liczb a i b jest równa ich iloczynowi?

Zadanie 3. W ilu punktach pozostałe przekątne mogą przeciąć przekątną ośmiokąta wypukłego? Opisz wszystkie możliwości.

Zadanie 4. Znajdź miary kątów trójkąta równoramiennego, którego wysokość jest równa połowie długości podstawy.

Zadanie 5. Trzech Mikołajów miało razem 200 prezentów do rozdania w trzech miejscowościach: A, B i C. Pierwszy Mikołaj rozdał $\frac{1}{2}$ swoich prezentów w miejscowości A, a $\frac{1}{11}$ w miejscowości B. Drugi Mikołaj rozdał $\frac{1}{3}$ swoich prezentów w A, a $\frac{1}{7}$ w B. Trzeci Mikołaj rozdał $\frac{1}{4}$ w A i $\frac{1}{6}$ w B. Ile prezentów zanieśli Mikołaje do miejscowości C?

Zestaw VII (14 I 2003)

Zadanie 1. Jaka jest największa możliwa suma cyfr liczby będącej sumą cyfr liczby stucyfrowej?

Zadanie 2. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Uzasadnij, że liczba $5^n + 5^{n+1}$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 3. Niech $a - b = 2$. Udowodnij, że

$$a^2 - b^2 = 2a + 2b.$$

Zadanie 4. Który wielokąt ma k razy więcej przekątnych niż boków?

Zadanie 5. Dane są trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Na ile sposobów można obrać czwarty wierzchołek trapezu równoramiennego o wierzchołkach w danych punktach? Od czego to zależy?

Zestaw VIII (28 I 2003)

Zadanie 1. W pięciokącie (wypukłym) rysujemy wszystkie przekątne. Ile będzie trójkątów na rysunku?

Zadanie 2. Wykaż, że suma dowolnych czterech kolejnych liczb całkowitych jest parzysta, ale nie jest podzielna przez 4.

Zadanie 3. Udowodnij, że

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1.$$

Zadanie 4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i b, a przeciwprostokątna ma długość c. Wykaż, że

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{c}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{ab}.$$

Zadanie 5. Wiadomo, że zbiór A ma a elementów, zbiór B ma b elementów, a zbiór $A\cap B$ ma n elementów. Ile elementów ma zbiór $A\cup B$?

Zestaw IX (11 II 2003)

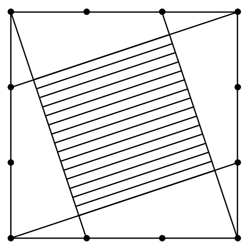
Zadanie 1. Liczbę nazywamy palindromiczną, jeśli jej pierwsza cyfra jest taka sama jak ostatnia, druga cyfra jest taka sama jak przedostatnia, i tak dalej. Jaka może być różnica między dwiema kolejnymi liczbami palindromicznymi?

Zadanie 2. Wykaż, że liczba $7^{100}-3^{100}+7^{101}+3^{102}$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 3. Średnią arytmetyczną liczb a i b nazywamy liczbę $\frac{a+b}{2}$, średnią geometryczną nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$, a średnią harmoniczną – liczbę $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Udowodnij, że średnia geometryczna średniej arytmetycznej i średniej harmonicznej dwóch liczb dodatnich jest równa średniej geometrycznej tych liczb.

Zadanie 4. Piszemy cztery listy do czterech osób. Na ile sposobów możemy te listy włożyć do czterech kopert zaadresowanych do tych osób (po jednym liście do każdej koperty), żeby żaden list nie trafił do właściwej koperty?

Zadanie 5. Jaką figurą jest zakreskowana część? Oblicz jej pole, jeśli pole całego kwadratu jest równe 1.



Zestaw X (25 II 2003)

Zadanie 1. Znajdź cyfrę, która nie jest ostatnią cyfrą żadnej liczby postaci $m!+n!$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

Zadanie 2. Usuń niewymierność z mianownika ułamka

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \geqslant \frac{4}{2+x+y}.$$

Zadanie 4. Punkt P jest wspólnym wierzchołkiem kąta prostego prostokątnych trójkątów równoramiennych PAB i PCD, przy czym podana kolejność wierzchołków każdego z trójkątów jest zgodna z ruchem wskazówek zegara oraz punkt A nie pokrywa się z punktem D. Wykaż, że prosta przechodząca przez punkt P i środek odcinka BC jest prostopadła do prostej AD.

Zadanie 5. W pewnym wielokącie zaznaczono niektóre przekątne w ten sposób, że z każdego wierzchołka wychodzi nieparzysta liczba zaznaczonych przekątnych. Wykaż, że liczba wierzchołków tego wielokąta jest parzysta.

Zestaw XI (18 III 2003)

Zadanie 1. Symbolem $S(n)$ oznaczamy sumę cyfr liczby naturalnej n. Ile może wynosić $S(n+1)-S(n)$, gdzie n jest liczbą naturalną?

Zadanie 2. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równość

$$ax+by=bx+ay+1.$$

Wykaż, że liczby a i b różnią się o 1.

Zadanie 3. Jaki ciąg cyfr należy wpisać zamiast kropek (ten sam po lewej i prawej stronie), żeby zachodziła równość

$$\frac{1}{3,\ldots}=0,3\ldots?$$

Zadanie 4. Jeden z kątów trójkąta jest równy średniej arytmetycznej dwóch pozostałych kątów. Wykaż, że największy kąt tego trójkąta jest mniejszy od 120°.

Zadanie 5. Udowodnij, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB i CD wtedy i tylko wtedy, gdy obwód trójkąta ABC jest równy obwodowi trójkąta ABD, a obwód trójkąta CDA jest równy obwodowi trójkąta CDB.

Zestaw XII (1 IV 2003)

Zadanie 1. Czy w zapisie liczby

$$135791357913579135791357913579$$

można wskazać ciąg kolejnych cyfr, których suma wynosi 89?

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby złożone mniejsze od 210 i względnie pierwsze z 210. Uwaga. Liczby naturalne m, n nazywamy względnie pierwszymi, jeśli $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$.

Zadanie 3. Danych jest $2n$ liczb dodatnich mniejszych od M. Udowodnij, że suma pewnych n z danych liczb jest większa od sumy n pozostałych o mniej niż M.

Zadanie 4. Rycerz zawsze mówi prawdę, łotr zawsze kłamie.
A mówi do B: „Jeśli ty jesteś rycerzem, to ja jestem łotrem."
Kim są A i B?

Zadanie 5. Czy spośród wierzchołków dwunastokąta foremnego można wybrać pięć takich punktów, że żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego?

Zestaw XIII (15 IV 2003)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe, które są 9 razy większe od swych trzycyfrowych końcówek.

Zadanie 2. Ile dzielników naturalnych ma liczba $2^8 \cdot 4^4 \cdot 8^2$?

Zadanie 3. Wykaż, że suma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 4. Przy kolejnych bokach pięciokąta napisano liczby 2, 3, 4, 5, 6. Dopisz liczby przy przekątnych (po jednej liczbie przy każdej przekątnej) w ten sposób, by przy dowolnej numeracji wierzchołków pięciokąta literami A, B, C, D, E, suma liczb stojących przy odcinkach AB, BC, CD, DE i EA była taka sama.

Zadanie 5. Podziel równoramienny trójkąt prostokątny na trójkąty ostrokątne.

Zestaw XIV (29 IV 2003)

Zadanie 1. Czy zapis dziesiętny kwadratu liczby naturalnej większej od 3 może się składać z samych cyfr nieparzystych?

Zadanie 2. Wykaż, że dla dowolnego naturalnego $n > 1$ liczba $n^4 + 4$ jest złożona.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli suma liczb dodatnich x i y wynosi a, to

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} \leqslant 2\sqrt{a+1}.$$

Zadanie 4. Długości dwóch boków trójkąta wynoszą 3 i 6. Jaka może być długość trzeciego boku, jeżeli wiadomo, że wyraża się liczbą całkowitą?

Zadanie 5. Dwusieczne kątów przy dolnej podstawie trapezu przecinają się w punkcie leżącym na górnej podstawie. Uzasadnij, że suma długości ramion trapezu jest równa długości górnej podstawy.

Zestaw XV (20 V 2003)

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe AB, dla których $AB + BA$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli $(n + 1)a = (n - 1)b$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, n, przy czym $n \neq 0$, to $a + b$ dzieli się przez n.

Zadanie 3. Czy z liczb całkowitych od 0 do 10 można wybrać pięć takich liczb, żeby wszystkie różnice między nimi były różne?

Zadanie 4. Czy stosunek liczby przekątnych do liczby boków n-kąta wypukłego może wynosić:

$$\text{a) } n, \quad \text{b) } \frac{1}{2} \cdot n, \quad \text{c) } \frac{1}{3} \cdot n?$$

Zadanie 5. Oblicz pole czworokąta wypukłego, którego przekątne są prostopadłe i mają długości p, q.

Wskazówki do zadań

Zestaw I

1. Oznacz przez n najmniejszą z szukanych liczb, wypisz te liczby i oblicz ich sumę, albo lepiej oznacz przez n liczbę parzystą stojącą między dwiema środkowymi z tych dziesięciu liczb.

2. Sposób I: Napisz najmniejszą oraz największą liczbę tysiąccyfrową. Sposób II: Jak można utworzyć liczbę tysiąccyfrową, na ile sposobów można to zrobić?

3. Ile kilometrów przejedzie ten samochód na jednym litrze, a ile na jednym galonie?

4. O jaki kąt w ciągu 10 minut przesunie się wskazówka minutowa, a o jaki godzinowa?

Zestaw II

1. Liczby, o których mowa, oznacz literami. Zapisz równość, którą mają spełniać i przekształć ją.

2. Zbadaj ostatnie cyfry.

3. Ile minut liczy godzina, ile godzin ma dzień, ile jest dni w roku?

4. Przez jaką liczbę powinna dzielić się liczba turystów na każdym odcinku wędrówki?

Zestaw III

1. Jeśli 50 daje resztę 5 przy dzieleniu przez pewną liczbę, to jaką resztę da $50 - 5$? Ponadto, pamiętaj o tym, że reszta musi być zawsze mniejsza od dzielnika.

2. Każdą z liczb przedstaw jako potęgę liczby 3.

3. Oznacz czas, jaki zajęła ta podróż, przez t i ułóż równanie.

4. Pierwsza cyfra jest zawsze większa od zera.

5. Ile wynosi suma dwóch pozostałych kątów. Pamiętaj, że ich miary są $\geqslant 30°$.

Zestaw IV

1. Jakie powinny być cyfry setek szukanych liczb? Następnie, jakie mogą być cyfry dziesiątek? Na końcu rozważ cyfry jedności.

2. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 4? Które z liczb podzielnych przez 4 są niepodzielne przez 5?

3. Postaw na jedną szalkę wagi k sztuk A, a na drugą szalkę l sztuk D. Zamiast każdego A możemy postawić B i C, a waga pozostanie w równowadze. Jak każde D zamienić na B i C? Drugi sposób: zapisz wszystko za pomocą równań.

4. Załóżmy, że wychodzą dwie osoby, jedna z prędkością $6km/h$, a druga z prędkością $5km/h$. W jakiej odległości od celu jest druga osoba o $10^{\underline{30}}$? W jakim czasie pierwsza osoba się oddaliła od drugiej na taką odległość?

5. Rozważ wszystkie możliwości równoległości i przecinania się poszczególnych płaszczyzn – wszystkie równoległe, tylko trzy równoległe, dwie pary równoległych, tylko dwie równoległe, każde dwie nierównoległe.

Zestaw V

1. Skojarz n^2+1 z n^2+n+1, n^2+2 z n^2+n+2 i tak dalej.

2. Wykonaj dzielenie pisemne. Co ile miejsc powtarza się ten sam układ cyfr?

3. Jakie reszty przy dzieleniu przez 15 dają liczby, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1? To samo pytanie dla liczb, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3.

5. Zwróć uwagę na kąt o mierze $1°$.

Zestaw VI

2. Napisz równanie i spróbuj obliczyć b.

3. Rozważ, ile wierzchołków może być po jednej, a ile po drugiej stronie przekątnej. Zwróć uwagę na to, że niektóre punkty przecięcia mogą się pokrywać.

4. Wysokość dowolnego trójkąta równoramiennego dzieli podstawę na połowy.

5. Przez jakie liczby są podzielne liczby prezentów, które Mikołaje mieli do rozdania? Wesołych Świąt!

Zestaw VII

1. Ile może wynosić suma cyfr liczby stucyfrowej?

2. Spróbuj coś wyłączyć.

3. Wyraź a przez b i wstaw do dowodzonej równości. Drugi sposób: przyjrzyj się lewej stronie równości i skorzystaj ze znanego wzoru.

4. Ile przekątnych, a ile boków wychodzi z każdego wierzchołka n-kąta? (Zarówno przekątne, jak i boki, są w ten sposób liczone podwójnie.)

5. Prostokąt też jest trapezem równoramiennym.

Zestaw VIII

1. Można to policzyć "na palcach", ale warto te trójkąty połączyć w piątki.

2. Pierwszą z tych liczb oznacz przez n.

3. Przekształć wyrażenia w nawiasach.

4. Podnieś wszystko do kwadratu i zastosuj twierdzenie Pitagorasa.

5. Zrób rysunek. Ile elementów mają zbiory: $A \setminus B$, $B \setminus A$?

Zestaw IX

1. Którą cyfrę (które cyfry) należy zmienić w liczbie palindromicznej, by otrzymać kolejną liczbę palindromiczną? Oddzielnie rozważ przypadek, gdy w samym środku są dziewiątki.

2. Spróbuj wyłączyć 8 przed nawias.

3. Przekształć wzór na średnią harmoniczną.

4. Do ilu kopert można włożyć pierwszy list? Co potem możemy zrobić z listem odpowiadającym kopercie, do której włożyliśmy pierwszy list?

5. Zrób rysunek "na kratkach", przyjmując bok dużego kwadratu długości 10 kratek.

Zestaw X

1. Jaką cyfrą może się kończyć liczba $n!$?

2. Korzystając ze wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ można w mianowniku zamienić liczby a i b na liczby a^2 i b^2. Najpierw zamień $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ na $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$.

3. Pozbądź się ułamków.

5. Co otrzymamy, jeśli dodamy liczby przekatnych wychodzących z poszczególnych wierzchołków?

Zestaw XI

1. Kolejne liczby naturalne najczęściej różnią się tylko ostatnią cyfrą, ale nie zawsze.

2. Jedynkę zostaw na prawej stronie, pozostałe wyrażenia przenieś na lewą stronę i spróbuj coś wyłączyć przed nawias.

3. Liczbę $3,\ldots$ oznacz przez x. Jaka liczba stoi po prawej stronie równania?

4. Gdyby największy kąt był większy lub równy $120°$, to średni kąt byłby większy lub równy ...

Zestaw XII

1. Wykorzystaj to, że suma dowolnych pięciu kolejnych cyfr jest taka sama.

2. Przez jakie liczby pierwsze może być podzielna liczba względnie pierwsza z 210?

3. Ustaw dane liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

4. Zdanie wypowiedziane przez A jest nieprawdziwe tylko wtedy, gdy B jest rycerzem, a A nie jest łotrem.

Zestaw XIII

1. Od liczby czterocyfrowej $ABCD$ odejmij jej trzycyfrową końcówkę BCD.

2. Zapisz ten iloczyn w postaci potęgi liczby 2.

3. Gdyby ta suma była liczbą wymierną, to jej kwadrat też byłby liczbą wymierną.

4. Spróbuj uzyskać równość, w której występują liczby stojące przy jednej przekątnej i trzech bokach.

Zestaw XIV

1. Zbadaj cyfrę dziesiątek kwadratu liczby nieparzystej postaci $10a + b$, gdzie $b < 10$.

2. Przedstaw liczbę $n^4 + 4$ w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych większych od 1. Przyda się wzór na $(x + 2)^2$.

3. Podnieś obie strony nierówności do kwadratu.

5. Zaznacz równe kąty (dwusieczne oraz równoległość).

Zestaw XV

1. Jeśli kwadrat liczby całkowitej dzieli się przez liczbę pierwszą, to dzieli się też przez kwadrat tej liczby pierwszej.

2. Przekształć tę równość tak, by po lewej stronie było $a + b$.

3. Przypuśćmy, że można i ustawmy te liczby w kolejności od najmniejszej do największej. Co można powiedzieć o różnicach między kolejnymi liczbami?

4. Z każdego wierzchołka n-kąta wychodzą $n-3$ przekątne, ale każda przekątna wychodzi z dwóch wierzchołków.

5. Przekątna dzieli czworokąt na dwa trójkąty.