Grupy Coxetera i diagramy Coxetera–Dynkina

Justyna Kosakowska

Szczecin, kwiecień 2013

Cel wykładu

Omówimy klasyfikację oraz pewne własności skończonych grup Coxetera.

Wstęp

- Skończone grupy Coxetera odgrywają ważną rolę m.in. w
  - klasyfikacji półprostych algebr i grup Liego;
  - teorii grup algebraicznych.
  - klasyfikacji wielościanów foremnych;
- Znana jest klasyfikacja skończonych grup Coxetera (wykorzystująca systemy pierwiastków oraz grafy Coxetera).

Oznaczenia

- $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ – algebra $n \times n$-macierzy o współczynnikach w ciele $\mathbb{R}$;
- $e_1, \ldots, e_n$ – baza standardowa p. lin. $\mathbb{R}^n$;
- $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – standardowy iloczyn skalarny;
- $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \ A \cdot A^{tr} = E\}$ grupa macierzy ortogonalnych (**pełna grupa ortogonalna**);
- grupa $\mathcal{O}(n)$ jest izomorficzna z grupą $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ wszystkich liniowych ortogonalnych przekształceń $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
  $$(\text{tzn. } \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle);$$
  dalej będziemy utożsamiać te grupy;

Definicja

Przekształcenie liniowe $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *nazywamy* ***odbiciem****, jeśli istnieje hiperpłaszczyzna* $\mathcal{P}$ *w* $\mathbb{R}^n$ *(tzn. podprzestrzeń liniowa wymiaru* $n-1$*) taka, że* $s(x) = x$*, jeśli* $x \in \mathcal{P}$ *oraz* $s(x) = -x$*, jeśli* $x \in \mathcal{P}^{\perp}$*.*
Niech $0 \neq \alpha \in \mathcal{P}^{\perp}$*. Wtedy odbicie względem* $\mathcal{P}$ *jest postaci*

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2\langle x, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Oczywiście $s_\alpha \in \mathcal{O}(n)$*.*

Problem

Opisać skończone podgrupy w $\mathcal{O}(n)$ generowane przez odbicia.

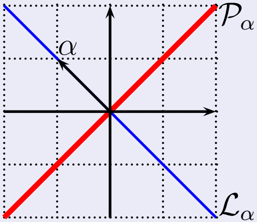
Odbicia

Każde odbicie s wyznacza jednoznacznie hiperprzestrzeń $\mathcal{P}$ oraz prostą

$$\mathcal{L} = \mathcal{P}^{\perp} = \alpha\mathbb{R}\,,\ 0 \neq \alpha \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

Będziemy stosować oznaczenia $s = s_\alpha$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\alpha$ oraz $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha$.

Wektor α (tzw. **pierwiastek**) **NIE** jest jednoznacznie wyznaczony przez s ($s_\alpha = s_{\lambda\alpha}$ dla $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$).



Dwa przykłady

Niech $\Box_m$ będzie m-kątem foremnym w $\mathbb{R}^2$ (o środku ciężkości w $(0,0)$) oraz niech

$$\mathcal{H}_m := \mathcal{O}(\Box_m) = \{A \in \mathcal{O}(2)\ ;\ \ A(\Box_m) = \Box_m\}$$

$$= \{E, R_\theta, R_\theta^2, \ldots, R_\theta^{m-1}, T, R_\theta \cdot T, R_\theta^2 \cdot T, \ldots, R_\theta^{m-1} \cdot T\},$$

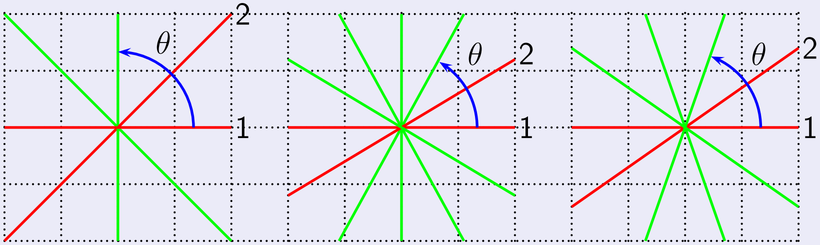
gdzie

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

oraz $\theta = 2\pi/m$, (**grupa dyhedralna**).

Grupa $\mathcal{H}_m$ jest generowana przez dwa odbicia: T oraz $R_\theta \cdot T$.

Grupy $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_6$ oraz $\mathcal{H}_5$



$$R_\theta = s_2 \cdot s_1$$

Dwa przykłady

Niech $\mathcal{S}_n$ będzie grupą symetryczną. Wtedy $\mathcal{S}_n \hookrightarrow \mathcal{O}(n)$ (permutacje wektorów bazowych).

Transpozycja (ij) działa jak odbicie: przeprowadza $e_i - e_j$ w $-(e_i - e_j)$ oraz jest niezmiennicze na przestrzeni prostopadłej do $e_i - e_j$.

Zatem grupa $\mathcal{S}_n$ jest generowana przez odbicia $(i, i+1)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Wiadomo, że $(\mathbb{R}^n)^{\mathcal{S}_n} = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)\mathbb{R}$. Zatem $\mathcal{S}_n$ działa również na $\mathbb{R}^{n-1}$ oraz $\mathcal{S}_n \hookrightarrow \mathcal{O}(n-1)$.

Uwaga

Niech $W \subseteq \mathcal{O}(n)$ *będzie podgrupą oraz niech*

$$V_0 = V_0(W) = (\mathbb{R}^n)^W$$

Wtedy $\mathbb{R}^n = V_0 \oplus V_0^\perp$ *oraz* $W(V_0) = V_0$, $W(V_0^\perp) = V_0^\perp$. *Zatem* $W \hookrightarrow \mathcal{O}(m)$, *gdzie* $m = \dim_{\mathbb{R}} V_0^\perp$. *Bez straty ogólności można założyć, że* $V_0 = 0$.

Definicja

Skończoną podgrupę $W \subseteq \mathcal{O}(n)$ *generowaną przez odbicia oraz taką, że* $V_0(W) = 0$ *będziemy nazywać* ***grupą Coxetera***.

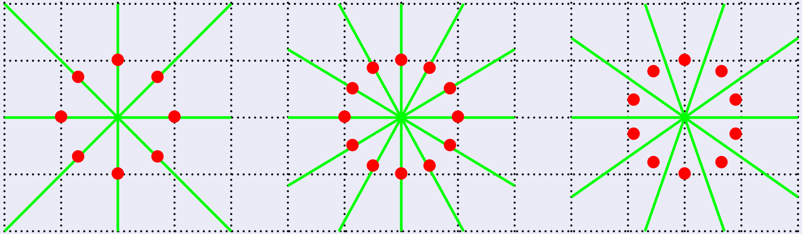
Definicja

Niech W będzie grupą Coxetera oraz niech

$$\Phi = \Phi_W = \{\alpha, -\alpha \ ; \ \ \| \alpha \| = 1 \text{ oraz } s_\alpha \in W\}.$$

Zbiór Φ nazywamy ***systemem pierwiastków*** *grupy W.*

Systemy pierwiastków grup $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_6$ oraz $\mathcal{H}_5$



Niech $t \in \mathbb{R}^n$ będzie taki, że $\langle t, r \rangle \neq 0$ dla każdego $r \in \Phi$. Definiujemy

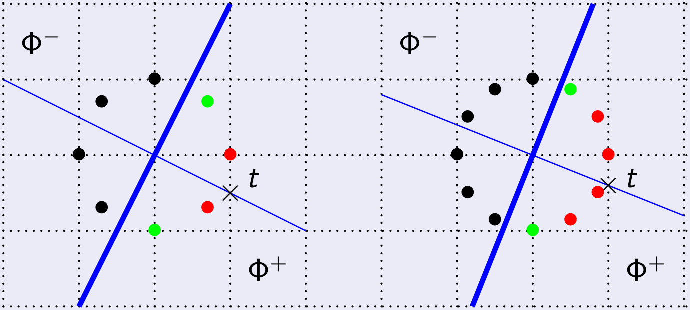
$$\Phi^+ = \Phi_t^+ = \{r \in \Phi \; ; \; \langle t, r \rangle > 0\}$$

oraz $\Phi_t^- = -\Phi_t^+$. Wtedy $\Phi = \Phi_t^+ \cup \Phi_t^-$ oraz $|\Phi_t^+| = |\Phi_t^-|$.

Ustalamy Φ^+. Niech $\Delta \subseteq \Phi^+$ będzie minimalnym podzbiorem o tej własności, że każdy $r \in \Phi^+$ jest kombinacją liniową o nieujemnych współczynnikach elementów z Δ. Taki zbiór Δ nazywamy t-**bazą** (krótko: bazą) systemu Φ.

Niech $\Delta = \{r_1, \ldots, r_n\}$ będzie bazą systemu Φ (jest to również baza liniowa $\mathbb{R}^n$). Pierwiastki $r_1, \ldots, r_n$ nazywamy **prostymi pierwiastkami** natomiast odpowiadające im odbicia $s_1, \ldots, s_n$ **fundamentalnymi odbiciami** w W.

Systemy pierwiastków grup $\mathcal{H}_4$ oraz $\mathcal{H}_6$



$$\Phi = \{\bullet, \bullet, \bullet\}\ ,\ \Phi^+ = \{\bullet, \bullet\}\ ,\ \Delta = \{\bullet\}.$$

Twierdzenie

Niech $W \subseteq \mathcal{O}(n)$ będzie grupą Coxetera. Wtedy

- *istnieje dokładnie jedna t-baza systemu Φ;*
- *każda t-baza systemu Φ jest bazą liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$;*
- *jeśli Δ, Δ' są odp. t, t'-bazami, to istnieje $w \in W$ takie, że $w(\Delta) = \Delta'$.*

Twierdzenie (Coxeter, 1934)

$$W \cong \langle s_1, \ldots, s_n \; ; \; (s_i s_j)^{p_{ij}} = 1 \, , \; i, j = 1, \ldots, n \rangle,$$

gdzie p_{ij} jest rzędem elementu $s_i s_j$ w grupie W.

Uwaga

Grupą Coxetera nazywa się też każdą grupę posiadającą taką prezentację (wymagamy $p_{ii} = 1$, ale dopuszczamy $p_{ij} = \infty$).

Definicja

Skończony graf nieskierowany $Q = (V, E)$ *z waluacją* $\omega : E \to \mathbb{N}$ *nazywamy* ***grafem Coxetera****, o ile dla każdej krawędzi* $i \frac{\quad}{} j$ *jej waga* $\omega_{ij} = \omega(i \frac{\quad}{} j)$ *jest liczbą naturalną* > 2.

Definicja

Niech W *będzie grupą Coxetera generowaną przez* $\{s_1, \ldots, s_n\}$. *Graf* $Q_W = (\{1, \ldots, n\}, E)$ *z waluacją* $p : E \to \mathbb{N}$, $p(i \frac{\quad}{} j) = p_{ij}$, *gdzie* $E = \{ i \frac{\quad}{} j \ ; \ p_{ij} > 2\}$, *nazywamy* ***grafem Coxetera grupy*** W.

$$Q_{\mathcal{H}_n} \qquad = \qquad \mathbb{H}_2^n : \qquad \circ \overset{n}{\frac{\qquad}{}} \circ$$

Twierdzenie

Niech $W_1, W_2 \subseteq \mathcal{O}(n)$ będą grupami Coxetera. Jeśli $Q_{W_1} = Q_{W_2}$, to istnieje $T \in \mathcal{O}(n)$ taki, że $TW_1T^{-1} = W_2$.

Dowód

Niech Δ_1, Δ_2 będą bazami (odpowiednio systemu Φ_{W_1} oraz Φ_{W_2}), które wyznaczają graf $Q_{W_1} = Q_{W_2}$. Stąd

$$\Delta_1 = \{r_1, \ldots, r_n\} \text{ oraz } \Delta_2 = \{r'_1, \ldots, r'_n\},$$

gdzie $\langle r_i, r_j \rangle = \langle r'_i, r'_j \rangle = -\cos(\frac{\pi}{p'_{ij}})$ ($\iff p_{ij} = p'_{ij}$) dla i, j.
Def. p. lin. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ przez $T(r_i) = r'_i$. Mamy

$$\langle T(r_i), T(r_j) \rangle = \langle r'_i, r'_j \rangle = \langle r_i, r_j \rangle,$$

więc $T \in \mathcal{O}(n)$.

Dowód

Niech s_i, s_i' będą odbiciami odpowiadającymi odpowiednio pierwiastkom r_i, r_i'. Mamy $s_i' = Ts_iT^{-1}$. Istotnie,

$$Ts_iT^{-1}(r_i') = Ts_i(r_i) = T(-r_i) = -r_i'$$

oraz dla x takiego, że $\langle x, r_i' \rangle = 0$ zachodzi

$$0 = \langle T^{-1}(x), T^{-1}(r_i') \rangle = \langle T^{-1}(x), r_i \rangle.$$

Stąd

$$Ts_i(T^{-1}(x)) = T(T^{-1}(x)) = x.$$

Ponieważ odbicia $s_1, \ldots, s_n$ oraz $s_1', \ldots, s_n'$ generują odpowiednio grupy W_1 oraz W_2, więc $W_2 = TW_1T^{-1}$. $\square$

Definicja

*Grupę Coxetera W nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli nie jest ona produktem dwóch nietrywialnych grup Coxetera.*

Stwierdzenie

Niech W będzie grupą Coxetera oraz Q_W jej grafem Coxetera.

- *Grupa W jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy graf Q_W jest spójny.*
- *Jeśli $Q_1, \ldots, Q_m$ są spójnymi składowymi grafu Q_W, to $W = W_1 \times \ldots \times W_m$ oraz $Q_{W_i} = Q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.*

Wniosek

Wystarczy podać klasyfikację nieprzywiedlnych grup Coxetera.

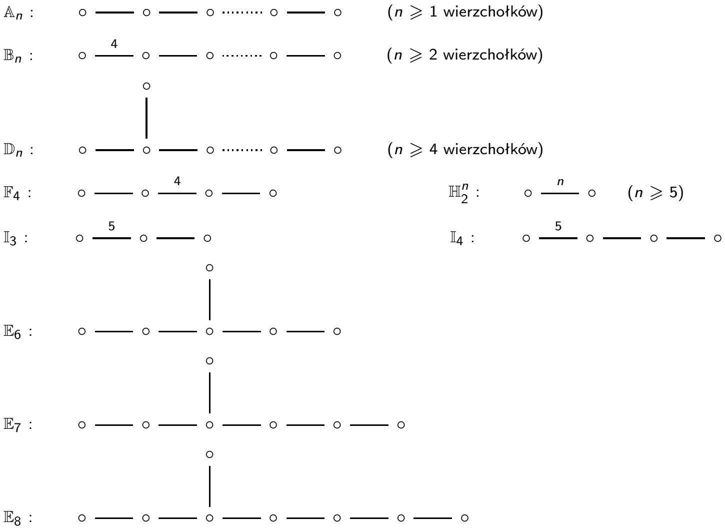
Twierdzenie

- *Jeśli W jest nieprzywiedlną grupą Coxetera, to Q_W jest jednym z poniższych grafów Coxetera-Dynkina.*
- *Dla każdego grafu Coxetera-Dynkina Q istnieje grupa Coxetera W taka, że $Q_W = Q$.*

Uwaga

Piszemy $i \overset{p_{ij}}{\text{———}} j$, *jeśli* $p_{ij} > 3$ *oraz* $i \text{———} j$, *jeśli* $p_{ij} = 3$.

Grafy Coxetera-Dynkina

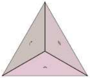


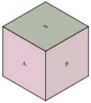
Idea dowodu

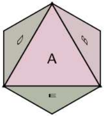
- Z grafem Coxetera stowarzysza się macierz symetryczną tzw. macierz Coxetera.
- Graf Coxetera nazywamy **dodatnio określonym**, jeśli odpowiadająca mu macierz jest dodatnio określona.
- Pokazuje się, że graf Coxetera grupy Coxetera jest dodatnio określony.
- Dowodzi się, że jedynymi dodatnio określonymi grafami Coxetera są te wymienione powyżej.
- Dla każdego z powyższych grafów Coxetera wskazuje się (konstruuje) odpowiednią grupę Coxetera.

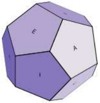
Wielościany/wielokomórki foremne wypukłe

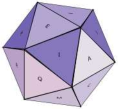
- wielokąty foremne wypukłe $\square_m$ w $\mathbb{R}^2$;
- bryły platońskie w $\mathbb{R}^3$;
- w $\mathbb{R}^4$:
    - 24-ścian (ścianami są trzywymiarowe ośmiościany);
    - 120-ścian (ścianami są trzywymiarowe dwunastościany);
    - 600-ścian (ścianami są trzywymiarowe czworościany);
- n-wymiarowe sympleksy w $\mathbb{R}^n$;
- n-wymiarowe kostki w $\mathbb{R}^n$;
- n-wymiarowe 2^n-wielokomórki;

$\mathcal{T}_4 =$ 

$\mathcal{T}_6 =$ 

$\mathcal{T}_8 =$ 

$\mathcal{T}_{12} =$ 

$\mathcal{T}_{20} =$ 

Bryły platońskie

Typ $\mathbb{H}_2^n$: $\circ \overset{n}{\text{——}} \circ$

Grafem Coxetera grupy $\mathcal{H}_n \cong \mathcal{O}(\square_n)$ jest $\mathbb{H}_2^n$.

Typ $\mathbb{A}_n$: $\circ \text{——} \circ \text{——} \circ \cdots\cdots \circ \text{——} \circ$

Grafem Coxetera grupy $\mathcal{S}_{n-1}$ jest $\mathbb{A}_n$.

- $\mathcal{S}_3 \cong \mathcal{H}_3 \cong \mathcal{O}(\square_3)$;
- $\mathcal{S}_4 \cong \mathcal{O}(\mathcal{T}_4)$ (permutuje wierzchołki czworościanu foremnego $\mathcal{T}_4$);
- $\mathcal{S}_{n+1} \cong \mathcal{O}(\Delta_n)$ (permutuje wierzchołki sympleksu Δ_n wymiaru n);

Typ $\mathbb{B}_n$: $\circ \overset{4}{\text{——}} \circ \text{——} \circ \cdots\cdots \circ \text{——} \circ$

Grupa Coxetera: $\mathcal{O}(I^n)$, gdzie I^n jest n-wymiarową kostką ($I^3 = \mathcal{T}_6$ oraz $\mathcal{O}(\mathcal{T}_6) = \mathcal{O}(\mathcal{T}_8)$).

Typ

$$\mathbb{D}_n: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & \circ & & & & & & \\ & & | & & & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & \cdots\cdots & \circ & — & \circ \end{array}$$

Grupa Coxetera: grupa symetrii n-wymiarowej demi-kostki.

Typ $\mathbb{I}_3: \quad \circ \overset{5}{—} \circ — \circ$

Grupa Coxetera: $\mathcal{O}(\mathcal{T}_{12}) = \mathcal{O}(\mathcal{T}_{20})$ jest $\mathbb{I}_3$.

Typ $\mathbb{I}_4: \quad \circ \overset{5}{—} \circ — \circ — \circ$

Grupa Coxetera: grupa symetrii foremnego 4-wymiarowego 120-ścianu (lub 600-ścianu).

Typ $\mathbb{F}_4$: $\circ - \circ \overset{4}{-} \circ - \circ$

Grupa Coxetera: grupa symetrii foremnego 4-wymiarowego 24-ścianu.

Typ $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$

$$\mathbb{E}_6 : \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \circ & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \end{array}$$

Grupy Coxetera: grupy symetrii półforemnych wielościanów opisanych w 1900 roku przez T. Gosseta. Są to tzw. 6-ic, 7-ic oraz 8-ic półforemne wielościany.