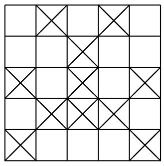
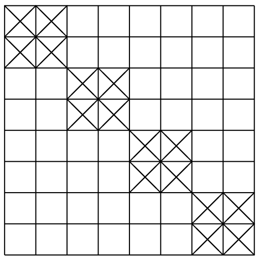
Matematyka dyskretna II
Zestaw 5 – Funkcje generujące

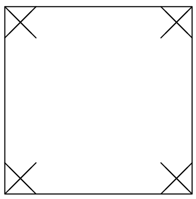
1. Wyliczyć wielomian wieżowy następującej szachownicy.



2. Na ile sposobów można postawić 8 nie atakujących się wież na następującej szachownicy?



3. Na ile sposobów można postawić n nie atakujących się wież na następującej $n \times n$ szachownicy?

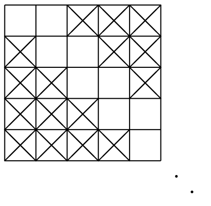


4. Niech $R_{n,m}$ oznacza wielomian wieżowy dla $n \times m$ szachownicy bez pól zabronionych. Udowodnić, że

(a) $R_{n,m} = R_{n-1,m} + mtR_{n-1,m-1}$;

(b) $R'_{n,m} = nmR_{n-1,m-1}$.

5. Niech r_n oznacza wielomian wieżowy następującej $n \times n$ szachownicy.



Znaleźć zależność rekurencyjną angażującą r_{n+2}, r_{n+1} i r_n. Pokazać, że

$$r_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} t + \cdots + \binom{2n-k}{k} t^k + \cdots + \binom{n}{n} t^n.$$

6. Wyznaczyć liczbę p_n takich permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n+1\}$, że $\pi_k \neq k$ oraz $\pi_k \neq 2n - k + 2$ dla każdego k.

7. Wyznaczyć liczbę p_n takich permutacji π zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, że $\pi_k \neq k$ oraz $\pi_k \neq 2n - k + 1$ dla każdego k.

8. W urnie znajduje się nieograniczona ilość kul białych, niebieskich i czarnych, przy czym kule jednokolorowe są nierozróżnialne. Znaleźć funkcje generujące następujących ciągów:

(a) $a_n :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul;

(b) $b_n :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul, przy założeniu, że losujemy co najmniej dwie kule białe i co najwyżej dwie kule czarne;

(c) $c_n :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul, przy założeniu, że losujemy parzystą ilość kul niebieskich oraz podzielną przez trzy ilość kul czarnych.

9. Znaleźć współczynniki w rozwinięciu następujących funkcji:

(a) $\frac{t^2-3t}{(1-t)^4}$;

(b) $\frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$;

(c) $\frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)}$;

10. Znaleźć związek pomiędzy funkcjami generującymi ciągów (a_n) i (b_n) w następujących przypadkach:

(a) $a_{n+1} = b_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$;

(b) $a_n = nb_n$;

(c) $a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$, $n \geq 0$.

11. Rozwiązać następujące rekurencje:

(a) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 8$;

(b) $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$;

(c) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;

(d) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 8$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

(e) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4n + 12$, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$;

(f) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n - 4$, $a_0 = -1$, $a_1 = 5$;

(g) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

12. Znaleźć funkcje generujące ciągów z poprzedniego zadania.

13. Znaleźć funkcję generującą, prostszą rekurencję i wzór jawny ciągu (a_n) spełniającego warunek.

(a) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + 1$, $n \geq 0$;

(b) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)a_i + 1$, $n \geq 0$;

(c) $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-i-1} a_i + 1$, $n \geq 0$;

14. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które nie zawierają trzech jedynek na sąsiednich miejscach. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

15. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają parzystą liczbę jedynek i każde dwie jedynki rozdzielone są przynajmniej jednym zerem. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$. Policzyć wartość s_{10}.

16. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają podciąg 01. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

17. Niech s_n oznacza ilość ciągów binarnych długości n, które zawierają podzielną przez 4 liczbę jedynek. Znaleźć wzór rekurencyjny dla ciągu (s_n) i wzór zwarty dla szeregu generującego $\sum_{n=0}^{\infty} s_n t^n$.

18. Znaleźć ilość rozwiązań równania

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = n, \ n \geq 0,$$

w liczbach całkowitych dodatnich.

19. Niech s_n oznacza liczbę ciągów $(x_1, \ldots, x_k)$ takich, że $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$. Udowodnić, że $s_n = s_{n-1} + s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Pokazać, że funkcja generująca $S(t)$ tego ciągu spełnia równanie $(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2)$.

20. Niech a_n oznacza ilość sposobów na jaki możemy otrzymać sumę n oczek przy wielokrotnym rzucie kostką. Wyznaczyć funkcję generującą ciągu (a_n).

21. Niech u_n oznacza ilość tych najkrótszych dróg o początku w punkcie $(0,0)$ i końcu w punkcie (n,n) biegnących po liniach łączących punkty kratowe, które znajdują się nad prostą $y = x$. Podobnie niech v_n oznacza ilość tych z powyższych dróg, które nie mają punktów wspólnych z prostą $y = x$ różnych od $(0,0)$ i (n,n). Udowodnić, że $v_n = u_{n-1}$ i $u_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.