Matematyka dyskretna I
Zestaw 6

1. Udowodnić, że każdy skończony pierścień bez dzielników zera jest ciałem.

2. Udowodnić, że x_0 jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(k-1)}(x_0) = 0$ i $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

3. Dla jakiej wartości a liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $X^5 - aX^2 - aX + 1$ o krotności nie mniejszej niż 2?

4. Dla jakich a i b wielomian $ax^{n+1}+bx^n+1$ jest podzielny przez $(x-1)^2$?

5. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik d wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[X]$ oraz wyznaczyć wielomiany $u, v \in \mathbb{R}[X]$ takie, że $d = uf + vg$.
(a) $f = X^4 + X^2 + 1$, $g = X^2 + 1$.
(b) $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$, $g = X^3 - X^2 + X - 1$.
(c) $f = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$, $g = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$.

6. Rozwiązać następujące kongruencje (tzn. doprowadzić je do postaci $f \equiv g \pmod{h}$, gdzie g jest wielomianem stopnia mniejszego niż h).
(a) $(X^2 + 1)f \equiv X - 1 \pmod{X^4 + X^2 + 1}$.
(b) $(X^3 - X^2 + X - 1)f \equiv X^2 - 1 \pmod{X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1}$
(c) $(X^2 - 3X + 2)f \equiv X \pmod{X^4 - 1}$.

7. Wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ daje przy dzieleniu przez $X - 2$ resztę 1, zaś przy dzieleniu przez $X - 1$ resztę 2. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X - 1)(X - 2)$?

8. Wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ daje przy dzieleniu przez $X - 1$ resztę 1, zaś przy dzieleniu przez $X^2 + 1$ resztę 2. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X - 1)(X^2 + 1)$?