Matematyka dyskretna I
Zestaw 3

1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczby $n!+1$ i $(n+1)!+1$ są względnie pierwsze.

2. Wyliczyć resztę z dzielenia 10^k przez n.

(1) $k = 6$ i $n = 13$.

(2) $k = 8$ i $n = 17$.

(3) $k = 9$ i $n = 19$.

3. Udowodnić, że jeśli $3 \nmid n$, to $3 \mid n^4 + n^2 + 1$.

4. Udowodnić, że jeśli $3 \mid 2^{2n} - 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

5. Udowodnić, że $\sum_{j=1}^{n-1} j \equiv 0 \pmod{n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

6. Udowodnić, że $\sum_{j=1}^{n-1} j^3 \equiv 0 \pmod{n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \not\equiv 2 \pmod{4}$.

Polecenie „rozwiązać kongruencję (układ kongruencji)" oznacza, że należy otrzymać odpowiedź postaci

$$x \equiv k_1 \pmod{n} \vee \cdots \vee x \equiv k_m \pmod{n}$$

dla pewnych liczb całkowitych $k_1, \ldots, k_m$ i n.

7. Rozwiązać następujące kongruencje.

(1) $3x \equiv 4 \pmod{7}$

(2) $27x \equiv 25 \pmod{256}$

(3) $2x \equiv 37 \pmod{21}$

(4) $10x \equiv 15 \pmod{35}$

(5) $3x \equiv 7 \pmod{18}$

8. Rozwiązać następujące układy kongruencji.

(1) $x \equiv 3 \pmod{4}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$, $x \equiv 1 \pmod{9}$

(2) $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 1 \pmod{8}$, $x \equiv 9 \pmod{11}$

(3) $2x \equiv 1 \pmod{3}$, $3x \equiv 1 \pmod{4}$, $5x \equiv 4 \pmod{7}$