Matematyka dyskretna I
Zestaw 1

1. Udowodnić nierówności $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. Wyliczyć $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

3. Zbadać, czy $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

4. Udowodnić równość $\lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \rfloor$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi przy czym $n > 0$.

5. Wykorzystując sito Eratostenesa wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze mniejsze niż 200.

6. Korzystając z tylko z definicji największego wspólnego dzielnika udowodnić, że jeśli $a = qb + r$, to $(a, b) = (b, r)$, .

W zadaniach 7–10 nie należy korzystać z Zasadniczego Twierdzenia Arytmetyki.

7. Policzyć (n, m) oraz znaleźć liczby całkowite p i q takie, że $(n, m) = pn + qm$.

- $n = 21$, $m = 55$.
- $n = 15$, $m = 303$.
- $n = 303$, $m = 159$.
- $n = 77$, $m = 371$.
- $n = 183$, $m = 305$.

8. Udowodnić, że $(ma, mb) = m(a, b)$.

9. Udowodnić, że $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$.

10. Udowodnić, że $(n^a - 1, n^b - 1) = n^{(a,b)} - 1$.

11. Niech $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ oraz $d = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \geq 0$. Udowodnić, że d dzieli a wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_1 \leq \alpha_1, \ \ldots, \ \gamma_k \leq \alpha_k$.

12. Niech $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ oraz $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \geq 0$. Udowodnić, że $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$.