MATEMATYKA DYSKRETNA
ZESTAW 8
REKURENCJA I

---

1. Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;

(b) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

(c) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 6$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$.

(d) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 8$;

(e) $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$;

2. Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

(a) $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + n + 2$, $a_0 = 0$;

(b) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

(c) $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + 2n - 2$, $a_0 = 1$.

(d) $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = -6n + 1$, $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

(e) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$;

(f) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4n + 12$, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$;

(g) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

3. Udowodnić następujące własności ciągu Fibonacciego:

(a) $F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n-1}$;

(b) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$;

(c) $F_{n+m} = F_n \cdot F_{m+1} + F_{n-1} \cdot F_m$.

4. Na ile sposobów można pokonać n stopni, jeżeli możemy poruszać się o 1 bądź 2 stopnie do góry?

5. Ile można utworzyć n-elementowych ciągów złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedynki nie stały obok siebie?

6. Ile można utworzyć n-elementowych ciągów złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedynki ani żadne dwie dwójki nie stały obok siebie?

7. Niech D_n oznacza ilość permutacji n-elementowych bez punktów stałych. Udowodnić, że

$$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2})$$

dla $n > 1$ i wywnioskować stąd, że

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

dla $n > 0$.

8. Na ile maksymalnie części można podzielić płaszczyznę przy pomocy n okręgów?

9. Wyznaczyć wzór na sumę czwartych potęg liczb naturalnych od 1 do n.

10. Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

(a) $(n-1) \cdot a_n - n \cdot a_{n-1} = 3 \cdot n^2 \cdot (n-1)$, $a_1 = 3$;

(b) $a_{n+2} = 5 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot a_{n+1} - 6 \cdot \frac{n}{n+2} \cdot a_n$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6,5$.