Matematyka dyskretna
Zestaw 4
Funkcja Eulera

---

1. Wyliczyć $\varphi(1000)$, $\varphi(125)$, $\varphi(180)$, $\varphi(360)$, $\varphi(1001)$.

2. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których $\varphi(n) = m$, gdzie
(1) $m = 14$;
(2) $m = 8$;
(3) $m = 12$.

3. Udowodnić, że $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$ dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m i k.

4. Udowodnić, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla wszystkich liczb całkowitych $n > 2$.

5. Udowodnić, że jeśli m i n są liczbami całkowitymi oraz $d = \gcd(m, n)$, to

$$\varphi(mn) = \frac{d \cdot \varphi(m) \cdot \varphi(n)}{\varphi(d)}.$$

6. Udowodnić, że jeśli d i n są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $d \mid n$, to $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.

7. Udowodnić, że $a^{13} \equiv a \pmod 7$ dla każdej liczby całkowitej a spełniającej warunek $\gcd(a, 7) = 1$.

8. Udowodnić, że $a^{13} \equiv a \pmod{65}$ dla każdej liczby całkowitej a spełniającej warunek $\gcd(a, 65) = 1$.

9. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 3^{1000}.

10. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 2^{1000}.