Matematyka Dyskretna

Wykład X

Grzegorz Bobiński (UMK)

Przykład (ciąg Fibonacciego)

Definiujemy ciąg F wzorem

$$F(n) := \begin{cases} 0 & \text{jeśli } n = 0, \\ 1 & \text{jeśli } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{jeśli } n \geq 2, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Policzymy funkcję tworzącą $\mathcal{F}$ ciągu F.
Zauważmy, że $F(n) \cdot T^n = F(n-1) \cdot T^n + F(n-2) \cdot T^n$ dla każdego $n \geq 2$.
Stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} F(n) \cdot T^n = T + \sum_{n\geq 2}(F(n-1) \cdot T^n + F(n-2) \cdot T^n) \\ &= T + T \cdot \textstyle\sum_{n\geq 2} F(n-1) \cdot T^{n-1} + T^2 \cdot \sum_{n\geq 2} F(n-2) \cdot T^{n-2} = T + T \cdot \mathcal{F} + T^2 \cdot \mathcal{F}, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \tfrac{T}{1-T-T^2} = \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot T} - \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot T} \\ &= \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot T^n - \tfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot T^n, \end{aligned}$$

skąd

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Definicja

Rekurencją (liniową o stałych współczynnikach) rzędu r, $r \in \mathbb{N}_+$, nazywamy każdy układ równań postaci

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = f(n), \;\; n \in \mathbb{N},$$

gdzie $u_{r-1}, \ldots, u_0 \in \mathbb{C}$, $u_0 \neq 0$, oraz $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Rekurencję $(*)$ nazywamy jednorodną, jeśli $f = 0$ (tzn. $f(n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$).

Rekurencją jednorodną stowarzyszoną z rekurencją $(*)$ nazywamy rekurencję

$$X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wielomianem charakterystycznym rekurencji $(*)$ nazywamy wielomian

$$T^r + u_{r-1} \cdot T^{r-1} + \cdots + u_1 \cdot T + u_0 \in \mathbb{C}[T].$$

Mówimy, że ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji $(*)$, jeśli

$$a(n+r) + u_{r-1} \cdot a(n+r-1) + \cdots + u_0 \cdot a(n) = f(n)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga

Jeśli

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = f(n), \ n \in \mathbb{N},$$

jest rekurencją rzędu r oraz $x_0, \ldots, x_{r-1} \in \mathbb{C}$, to ciąg a dany wzorem

$$a(n) := \begin{cases} x_n & \text{jeśli } n \in [0, r-1], \\ f(n) - (u_{r-1} \cdot a(n+r-1) + \cdots + u_0 \cdot a(n)) & \text{jeśli } n \geq r, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

jest rozwiązaniem rekurencji $(*)$.

Każde rozwiązanie rekurencji $(*)$ jest tej postaci.

W szczególności, zbiór rozwiązań rekurencji $(*)$ ma wymiar r.

Uwaga

Zbiór $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania ciągów po współrzędnych oraz mnożeniem ciągów przez skalary po współrzędnych.

Twierdzenie 3.6

Niech

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \dots + u_0 \cdot X_n = f(n), \ n \in \mathbb{N},$$

będzie rekurencją.

(1) Jeśli rekurencja $(*)$ jest jednorodna, to zbiór rozwiązań rekurencji $(*)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(2) Jeśli ciągi a i b są rozwiązaniami rekurencji $(*)$, to ciąg $a - b$ jest rozwiązaniem stowarzyszonej rekurencji jednorodnej.

(3) Jeśli ciągi a i b są rozwiązaniami rekurencji $(*)$ oraz stowarzyszonej rekurencji jednorodnej, odpowiednio, to ciąg $a + b$ jest rozwiązaniem rekurencji $(*)$.

Dowód

Ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Jeśli

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \dots + u_0 \cdot X_n = f(n), \ n \in \mathbb{N},$$

jest rekurencją, to zbiór A rozwiązań tej rekurencji możemy znajdować następująco:

(1) znajdujemy zbiór A' rozwiązań stowarzyszonej rekurencji jednorodnej,

(2) znajdujemy jedno rozwiązanie a rekurencji $(*)$,

(3) $A = a + A'$, tzn. rozwiązaniami rekurencji $(*)$ są ciągi postaci $a + a'$, gdzie $a' \in A'$.

Twierdzenie 3.7

Niech F będzie wielomianem charakterystycznym rekurencji jednorodnej

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu r.

Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu F krotności $k_1, \ldots, k_l$, odpowiednio, to ciągi $(n^j \cdot \lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $i \in [1, l]$, $j \in [0, k_i - 1]$, tworzą bazę przestrzeni rozwiązań rekurencji $(*)$.

W szczególności, dla każdego rozwiązania a rekurencji $(*)$ istnieją $\mu_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i \in [1, l]$, $j \in [0, k_i - 1]$, takie, że

$$a(n) = \sum_{i\in[1,l]} \sum_{j\in[0,k_i-1]} \mu_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n.$$

Dowód

Zbiór rozwiązań rekurencji $(*)$ ma wymiar $r \implies$ wystarczy udowodnić, że powyższe ciągi generują przestrzeń rozwiązań rekurencji $(*)$.

Niech a będzie rozwiązaniem rekurencji $(*)$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie funkcję tworzącą ciągu a.

Wtedy

$$\begin{aligned}(1+u_{r-1}T+\cdots+u_0T^r)\cdot\mathcal{A} &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)\cdot T^n + u_{r-1}\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)\cdot T^{n+1}+\cdots+u_0\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)\cdot T^{n+r} \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} a(n)\cdot T^n + u_{r-1}\cdot\sum_{n\geq 1} a(n-1)\cdot T^n + \cdots + u_0\cdot\sum_{n\geq r} a(n-r)\cdot T^n \\ &= \textstyle\big(\sum_{n=0}^{r-1} a(n)\cdot T^n + u_{r-1}\cdot\sum_{n=1}^{r-1} a(n-1)\cdot T^n + \cdots + u_1\cdot a(0)\cdot T^{r-1})\big) \\ &\qquad \textstyle + \sum_{n\geq r}(a(n) + u_1\cdot a(n-1) + \cdots + u_r\cdot a(n-r))\cdot T^n = G,\end{aligned}$$

przy czym $\deg G < r$.

Twierdzenie 3.7

Niech F będzie wielomianem charakterystycznym rekurencji jednorodnej

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

rzędu r.
Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu F krotności $k_1, \ldots, k_l$, odpowiednio, to dla każdego rozwiązania a rekurencji $(*)$ istnieją $\mu_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i \in [1, l]$, $j \in [0, k_i - 1]$, takie, że

$$a(n) = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [0, k_i - 1]} \mu_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n.$$

Dowód (c.d.)

Mamy $(1 + u_{r-1} T + \cdots + u_0 T^r) \cdot \mathcal{A} = G$, przy czym $\deg G < r$, więc

$$\mathcal{A} = \frac{G}{1 + u_{r-1} T + \cdots + u_0 T^r}.$$

Ponieważ $1 + u_{r-1} T + \cdots + u_0 T^r = T^r \cdot F(\frac{1}{T})$, więc $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_l^{-1}$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu $1 + u_{r-1} T + \cdots + u_0 T^r$ krotności $k_1, \ldots, k_l$, odpowiednio.
Stąd istnieją $A_{i,j}$, takie, że

$$\mathcal{A} = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [1, k_i]} \frac{A_{i,j}}{(1 - \lambda_i \cdot T)^j}.$$

Przypomnienie

(3.4): $\frac{1}{(1-\lambda \cdot T)^k} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \binom{k+n-1}{k-1} \cdot \lambda^n \cdot T^n$.

$$(3.4) \implies \mathcal{A} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [1, k_i]} A_{i,j} \cdot \binom{j+n-1}{j-1} \cdot \lambda_i^n \Big) \cdot T^n,$$

tzn. $a(n) = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [1, k_i]} A_{i,j} \cdot \binom{j+n-1}{j-1} \cdot \lambda_i^n$ dla każdego n.

Twierdzenie 3.7

Niech F będzie wielomianem charakterystycznym rekurencji jednorodnej

$$(*) \qquad X_{n+r} + u_{r-1} \cdot X_{n+r-1} + \cdots + u_0 \cdot X_n = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

rzędu r.
Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu F krotności $k_1, \ldots, k_l$, odpowiednio, to dla każdego rozwiązania a rekurencji $(*)$ istnieją $\mu_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i \in [1, l]$, $j \in [0, k_i - 1]$, takie, że

$$a(n) = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [0,k_i-1]} \mu_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n.$$

Dowód (c.d.)

Mamy

$$a(n) = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{j \in [1,k_i]} A_{i,j} \cdot \binom{j+n-1}{j-1} \cdot \lambda_i^n.$$

Istnieją $B_{j,p} \in \mathbb{C}$ takie, że

$$\binom{j+n-1}{j-1} = B_{j,j-1} \cdot n^{j-1} + \cdots + B_{j,1} \cdot n + B_{j,0}.$$

Stąd

$$a(n) = \sum_{i \in [1,l]} \sum_{p \in [0,k_i-1]} \Big(\sum_{j \in [l,k_i-1]} A_{i,j} \cdot B_{j,p} \Big) \cdot n^p \cdot \lambda_i^n. \quad \square$$

Przykład (wieże z Hanoi)

Dane są trzy pionowe pręty.

Na pierwszym z tych prętów jest nałożonych n, $n \in \mathbb{N}$, krążków różnego rozmiaru w ten sposób, że krążki mniejsze znajdują się nad krążkami większymi.

Ilu ruchów potrzeba, aby przełożyć wszystkie krążki na pręt trzeci, jeśli w jednym ruchu możemy przełożyć jeden krążek pomiędzy dowolnymi dwoma prętami, przy czym w żadnym momencie nie wolno kłaść krążka większego na mniejszego?

Rozwiązanie

Niech $a(n)$ będzie szukaną wielkością.

Wtedy $a(0) = 0$ i $a(n+1) = 2 \cdot a(n) + 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

W szczególności $a(1) = 1$.

Ponadto

$$a(n+2) - a(n+1) = (2 \cdot a(n+1) + 1) - (2 \cdot a(n) + 1) = 2 \cdot a(n+1) - 2 \cdot a(n).$$

Zatem ciąg a jest rozwiązaniem rekurencji jednorodnej

$$X_{n+2} - 3 \cdot X_{n+1} + 2 \cdot X_n = 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Wielomianem charakterystycznym tej rekurencji jest $T^2 - 3 \cdot T + 2$.

Pierwiastkami (jednokrotnymi) tego wielomianu 1 i 2.

Zatem istnieją $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ takie, że $a(n) = \mu_1 + \mu_2 \cdot 2^n$.

Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$, wyliczamy, że $\mu_1 = -1$ oraz $\mu_2 = 1$.

Ostatecznie $a(n) = 2^n - 1$.