Zestaw 7

Reguła włączeń i wyłączeń

Głównym narzędziem, którym należy się posługiwać z Zestawie 7 jest zasada (wzór) włączeń i wyłączeń, którą teraz sformułujemy.

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi. Dla każdego niepustego zbioru indeksów $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ oznaczamy przez A_I przekrój $\bigcap_{i \in I} A_i$. Innymi słowy, jeśli $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, to

$$A_I = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}.$$

Zasada (wzór) włączeń i wyłączeń mówi, że

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|.$$

W mniej zwartej wersji powyższy wzór można zapisać następująco:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

W skrajnej wersji, gdy $n = 1$, wzór przyjmuje tautologiczną postać

$$|A_1| = |A_1|.$$

Dla $n = 2$ mamy pierwszą nietrywialną i prawdopodobnie dobrze znaną postać

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Gdy $n = 3$, to otrzymujemy

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \end{aligned}$$

podczas gdy dla $n = 4$, mamy

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ & \quad = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & \quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ & \quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4 \cap A_4| \\ & \quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

Wersja wzoru dla $n = 5$ ma 31 składników, więc nie będziemy jej już tutaj przytaczać. W sytuacji, gdy stosujemy wzór włączeń i wyłączeń dla „dużych” wartości n oczekujemy zwykle pewnej regularności od składników $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$. Jedną z możliwości jest, że

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = 0$$

dla „dużych” k, co pozwala pominąć część składników.

Aby stosować regułę włączeń i wyłączeń warunek opisujący zliczane obiekty powinien być alternatywą bardziej elementarnych warunków. Tak jest na przykład w Zadaniu 1, gdzie warunek „liczba podzielna przez przyjnajmniej jedną z liczb 2, 3 i 5” jest alternatywą warunków: „liczba podzielna przez 2”, „liczba podzielna przez 3”, „liczba podzielna przez 5”. Zatem, aby rozwiązać to zadanie, należy zastosować wzór włączeń i wyłączeń dla zbioru $A_2 \cup A_3 \cup A_5$, gdzie A_k oznacza zbiór liczb dodatnich nie większych niż 10000 i podzielnych przez k.

W zadaniach zdarza się jednak czasami, że interesujący nas warunek jest koniunkcją (a nie alternatywą) warunków elementarnych. Przykładem takiego zadania jest Zadanie 5, w której chcemy wybrać 5 kart tak, aby był wśród nich „co najmniej jeden as” i „co najmniej jeden król” i „co najmniej jedna dama”. Innymi słowy, chcemy policzyć liczbę elementów zbioru $B_1 \cap \cdots \cap B_n$, dla pewnych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$ (oczywiście, w powyższym przykładzie $n = 3$). Jeżeli nie jest jasne, jak policzyć liczbę elementów zbioru $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ bezpośrednio, można to zrobić poprzez rozważanie dopełnienia tego zbioru. W tym celu należy najpierw ustalić „naturalny” zbiór X, w którym mieszczą się wszystkie zbiory $B_1, \ldots, B_n$. W omawianym przykładzie zbiorem X jest zbiór wszystkich wyborów 5 kart z talii 52 kart. Następnie definiujemy zbiory $A_1 := X \setminus B_1, \ldots, B_n := X \setminus A_n$ oraz liczymy z reguły włączeń i wyłączeń liczbę elementów zbioru $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Jeśli się nam to uda, to z praw de Morgana wynika, że

$$|B_1 \cap \cdots \cap B_n| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Przy założeniu, że potrafimy znaleźć liczbę elementów zbioru X, znajdujemy w ten sposób rozwiązanie wyjściowego zadania.

Zilustrujemy teraz powyższe rozważania przykładem.

Przykład

Policzymy, ile jest dodatnich liczb całkowitych nie większych od 1000, które nie są podzielne przez żadną z liczb 4, 10 i 25. Jeśli B_k jest zbiorem liczb dodatnich całkowitych nie większych od 1000, które nie są podzielne przez k, to interesujący nas zbiór jest równy $B_4 \cap B_{10} \cap B_{25}$. Aby zastosować regułę włączeń i wyłączeń (i ponieważ nie ma metody „bezpośredniego" policzenia liczby elementów zbioru $B_4 \cap B_{10} \cap B_{25}$), musimy zastosować metodę z dopełnieniami. Naturalnym jest za zbiór X przyjąć zbiór wszystkich liczb całkowitych od 1 do 1000. Wtedy $A_k := X \setminus B_k$ jest zbiorem liczb całkowitych nie większych od 1000 i podzielnych przez k, a więc

$$|A_k| = \left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor.$$

Zauważmy, że $A_4 \cap A_{10} = A_{20}$ (podzielność przez 4 i 10 jest równoważna podzielności przez 20, gdyż 20 jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 4 i 10), $A_4 \cap A_{25} = A_{100}$, $A_{10} \cap A_{25} = A_{50}$ oraz $A_4 \cap A_{10} \cap A_{25} = A_{100}$. Zatem z reguły włączeń i wyłączeń wynika, że

$$\begin{aligned}
|A_4 \cup A_{10} \cup A_{25}| &= |A_4| + |A_{10}| + |A_{25}| \\
&\quad - |A_4 \cap A_{10}| - |A_4 \cap A_{25}| - |A_{10} \cap A_{25}| + |A_4 \cap A_{10} \cap A_{25}| \\
&= |A_4| + |A_{10}| + |A_{25}| - |A_{20}| - |A_{100}| - |A_{50}| + |A_{100}| \\
&= \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{100} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{50} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{100} \right\rfloor \\
&= 250 + 100 + 40 - 50 - 10 - 20 + 10 = 320.
\end{aligned}$$

Ponieważ oczywiście $|X| = 1000$, więc interesujący nas wynik jest równy

$$|B_4 \cap B_{10} \cap B_{25}| = |X| - |A_4 \cup A_{10} \cup A_{25}| = 1000 - 320 = 680.$$

Zadanie 2

W Zadaniu 2 oprócz reguły włączeń i wyłączeń należy wykorzystać udowodniony na wykładzie wzór na liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych nieujemnych. Zgodnie z tym wzorem rozwiązań takich jest

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

Wykorzystując metodę bijektywną, można uogólnić powyższą obserwację i pokazać, że jeśli $k_1 + \ldots + k_m \le n$, to mamy

$$\binom{n - (k_1 + \cdots + k_m) + (m-1)}{m-1}$$

rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich, że $x_1 \geq k_1, \ldots, x_m \geq k_m$. Oczywiście, jeśli $k_1 + \ldots + k_m > m$, to liczba takich rozwiązań jest równa 0.

Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleźć liczbę rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich, że $x_1 \geq k_1, \ldots, x_m \geq k_m$, które dodatkowo spełniają warunki $x_1 \leq l_1, \ldots, x_p \leq l_p$, gdzie $1 \leq p \leq m$ (z tego typu problemami mamy do czynienia w Zadaniu 2). Innymi słowy, interesuje nas liczba elementów zbioru $B_1 \cap \cdots B_p$, gdzie, dla $i = 1, \ldots, p$, B_i jest zbiorem tych rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich, że $x_1 \geq k_1, \ldots, x_m \geq k_m$, które dodatkowo spełniają warunek $x_i \leq l_i$. Z wcześniejszych rozważań wynika, że w tej sytuacji należy posłużyć się metodą z dopełnieniami. Zatem niech X będzie zbiorem wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich, że $x_1 \geq k_1, \ldots, x_m \geq k_m$. Jeśli $i \in \{1, \ldots, p\}$ oraz $A_i := X \setminus B_i$, to A_i jest zbiorem rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich że $x_i \geq l_i + 1$ oraz $x_j \geq k_j$, dla $j \neq i$. Zatem

$$|A_i| = \binom{n - (l_i + 1 + \sum_{j \neq i} k_j) + (m-1)}{m-1},$$

(lub $|A_i| = 0$, gdy $l_i + 1 + \sum_{j \neq i} k_j > n$). Podobnie, gdy $i_1 < i_2$, to $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ jest zbiorem rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_m = n$$

w liczbach całkowitych takich, że $x_{i_1} \geq l_{i_1} + 1$, $x_{i_2} \leq l_{i_2} + 1$ oraz $x_j \geq k_j$, gdy $i_1 \neq j \neq i_2$, a więc

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \binom{n - (l_{i_1} + 1 + l_{i_2} + 1 + \sum_{i_1 \neq j \neq i_2} k_j) + (m-1)}{m-1}$$

(o ile $l_{i_1}+1+l_{i_2}+1+\sum_{i_1\neq j\neq i_2} k_j \leq n$). Ogólnie, jeśli $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq p$, to

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_q}| = \binom{n - (\sum_{r=1}^{q}(l_{i_r}+1) + \sum_{j\notin\{i_1,\ldots,i_q} k_j) + (m-1)}{m-1}$$

(lub 0). Korzystając z powyższych wzorów i reguły włączeń i wyłączeń, możemy policzyć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup \cdots \cup A_p$. Ponieważ

$$|X| = \binom{n - (k_1 + \cdots + k_m) + (m-1)}{m-1}$$

oraz

$$|B_1 \cap \cdots \cap B_p| = |X| - |A_1 \cup \cdots \cup A_p|,$$

to daje nam rozwiązanie wyjściowego problemu.

Przykład

Policzymy ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$$

w liczbach całkowitych takich, że $-10 \leq x_i \leq 10i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Niech X będzie zbiorem rozwiązań powyższego równania takich, że $x_i \geq -10$, dla $i = 1, 2, 3, 4$. Wtedy

$$|X| = \binom{50 - 4\cdot(-10) + 3}{3} = \binom{93}{3} = 129766.$$

Dla $i = 1, 2, 3, 4$ niech A_i będzie zbiorem tych rozwiązań ze zbioru X, dla których dodatkowo $x_i \geq 10i + 1$. Interesująca nas liczba to

$$|X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|.$$

Aby policzyć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ z reguły wyłączeń i wyłączeń, zauważmy, że

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \binom{50 - (11 + 3\cdot(-10)) + 3}{3} = \binom{72}{3} = 59640,\\
|A_2| &= \binom{50 - (21 + 3\cdot(-10)) + 3}{3} = \binom{62}{3} = 37820,\\
|A_3| &= \binom{50 - (31 + 3\cdot(-10)) + 3}{3} = \binom{52}{3} = 22100,
\end{aligned}$$

i

$$|A_4| = \binom{50-(41+3\cdot(-10))+3}{3} = \binom{42}{3} = 11480.$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
|A_1 \cap A_2| &= \binom{50-(11+21+2\cdot(-10))+3}{3} = \binom{41}{3} = 10660,\\
|A_1 \cap A_3| &= \binom{50-(11+31+2\cdot(-10))+3}{3} = \binom{31}{3} = 4495,\\
|A_1 \cap A_4| &= \binom{50-(11+41+2\cdot(-10))+3}{3} = \binom{21}{3} = 1130,\\
|A_2 \cap A_3| &= \binom{50-(21+31+2\cdot(-10))+3}{3} = \binom{21}{3} = 1130,
\end{aligned}$$

i

$$|A_2 \cap A_4| = \binom{50-(21+41+2\cdot(-10))+3}{3} = \binom{12}{3} = 165.$$

Ponadto, $|A_3 \cap A_4| = 0$, gdyż $31+41+2\cdot(-10) > 50$. Analogicznie,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$

oraz $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$. W efekcie otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & (59640+37820+22100+11480)\\
& -(10660+4495+1130+1130+165) = 113460.
\end{aligned}$$

Ostatecznie, poszukiwana liczba rozwiązań to

$$129766 - 113460 = 16306.$$