Algebra
Zestaw 5
Skończone grupy abelowe

---

**1.** Grupę nazywamy elementarną, jeśli jest izomorficzna z grupą postaci $\mathbb{Z}_{p^n}$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą, zaś $n$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Przedstawić w postaci sumy prostej grup elementarnych następujące grupy:
(1) $\mathbb{Z}_{50}$.
(2) $\mathbb{Z}_{100}$.
(3) $\mathbb{Z}_{160}$.

**2.** Dla każdej z grup $G$ z zadania 1 znaleźć dodatnie liczby całkowite $d_1$, $\dots$, $d_k$ takie, że $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_k$ i

$$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k}.$$

**3.** Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu grupy abelowe rzędu $n$.
(1) $n = 20$.
(2) $n = 40$.
(3) $n = 70$.

**4.** Udowodnić, że jeśli w grupie abelowej $G$ istnieją elementy rzędu $m$ i $n$, to w grupie $G$ istnieje element rzędu $\operatorname{lcm}(m, n)$, gdzie $\operatorname{lcm}(m, n)$ oznacza najmniejszą wspólna wielokrotność liczb $m$ i $n$.

**5.** Udowodnić, że jeśli $p$ jest liczbą pierwszą, to grupa $\mathbb{Z}_p^\times$ jest cykliczna. W szczególności,

$$\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}_{p-1}.$$

**6.** Niech $p$ będzie nieparzystą liczbą pierwszą, $k$ dodatnią liczbą całkowitą i $a$ liczbą całkowitą. Udowodnić, że jeśli

$$a \equiv 1 \pmod{p^k} \qquad \text{i} \qquad a \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$$

to

$$a^p \equiv 1 \pmod{p^{k+1}} \qquad \text{i} \qquad a^p \not\equiv 1 \pmod{p^{k+2}}.$$

**7.** Niech $p$ będzie nieparzystą liczbą pierwszą i $n > 1$ liczbą całkowitą.

(1) Udowodnić, że liczba $p+1$ jest elementem rzędu $p^{n-1}$ w grupie $\mathbb{Z}_{p^n}^{\times}$.

(2) Udowodnić, że w grupie $\mathbb{Z}_{p^n}^{\times}$ istnieje element rzędu $p-1$ (*Wskazówka.* Można wykorzystać istnienie kanonicznego epimorfizmu $\mathbb{Z}_{p^n}^{\times} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$.)

(3) Udowodnić, że grupa $\mathbb{Z}_{p^n}^{\times}$ jest cykliczna.

**8.** Udowodnić, że

$$\mathbb{Z}_2^{\times} \simeq \mathbb{Z}_1 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{Z}_4^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

**9.** Niech $k > 1$ i $a$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnić, że jeśli

$$a \equiv 1 \pmod{2^k} \qquad \text{i} \qquad a \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$$

to

$$a^2 \equiv 1 \pmod{2^{k+1}} \qquad \text{i} \qquad a^2 \not\equiv 1 \pmod{2^{k+2}}.$$

**10.** Niech $n > 2$ będzie liczbą całkowitą.

(1) Udowodnić, że liczba 5 jest elementem rzędu $2^{n-2}$ w grupie $\mathbb{Z}_{2^n}^{\times}$.

(2) Udowodnić, że w grupie $\mathbb{Z}_{p^n}^{\times}$ istnieje element rzędu 2, który nie należy do podgrupy $\langle 5 \rangle$ grupy $\mathbb{Z}_{2^n}^{\times}$ generowanej przez liczbę 5 (*Wskazówka.* Zauważmy, że $\langle 5 \rangle \subseteq \{a \in \mathbb{Z}_{2^n}^{\times} : a \equiv 1 \pmod{4}\}$).

(3) Udowodnić, że

$$\mathbb{Z}_{2^n}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{2^{n-2}} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

**11.** Przedstawić w postaci sumy prostej grup elementarnych następujące grupy:

(1) $\mathbb{Z}_{100}^{\times}$.
(2) $\mathbb{Z}_{160}^{\times}$.
(3) $\mathbb{Z}_{180}^{\times}$.
(4) $\mathbb{Z}_{1375}^{\times}$.

**12.** Dla każdej z grup $G$ z zadania 11 znaleźć dodatnie liczby całkowite $d_1, \ldots, d_k$ takie, że $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_k$ i

$$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k}.$$

**13.** Udowodnić, że jeśli $G$ jest niecykliczną skończoną grupą abelową, to istnieje podgrupa grupy $G$ postaci $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ dla pewnej liczby pierwszej $p$.

**14.** Niech $p$ będzie liczbą pierwszą. Opisać wszystkie niecykliczne podgrupy grupy $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

**15.** Niech $g$ będzie elementem maksymalnego rzędu skończonej grupy abelowej $G$. Udowodnić, że istnieje podgrupa $H$ grupy $G$ taka, że $G = H \oplus \langle g \rangle$.