Algebra
Zestaw 4
Homomorfizmy grup

---

1. Udowodnić, że jeśli G jest grupą, to odwzorowanie

$$G \to G,\ x \mapsto x^{-1},$$

jest homomorfizmem grup wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest abelowa.

2. Udowodnić, że jeśli grupa G ma więcej niż dwa elementy, to grupa $\mathrm{Aut}(G)$ ma co najmniej dwa elementy.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i G grupą. Opisać bijekcję

$$\{\varphi : \varphi\colon \mathbb{Z}_n \to G \text{ jest homomorfizmem grup}\} \\ \leftrightarrow \{g \in G : \text{rząd elementu } g \text{ dzieli } n\}$$

taką, że homomorfizm odpowiadający elementowi g jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy rząd elementu g jest równy n.

4. Niech G będzie grupą abelową oraz H_1 i H_2 grupami. Opisać bijekcję

$$\{\varphi : \varphi\colon H_1 \oplus H_2 \to G \text{ jest homomorfizmem grup}\} \leftrightarrow \\ \{(\psi_1, \psi_2) : \psi_1\colon H_1 \to G \text{ i } \psi_2\colon H_2 \to G \text{ są homomorfizmami grup}\}$$

taką, że homomorfizm grup odpowiadający parze (ψ_1, ψ_2) jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy

(1) ψ_1 i ψ_2 są różnowartościowe,

(2) $\mathrm{Im}\,\psi_1 \cap \mathrm{Im}\,\psi_2 = \{e\}$.

5. Znaleźć wszystkie automorfizmy (endomorfizmy) grupy $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

6. Niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy H. Udowodnić, że jeśli $h \in H$, to funkcja

$$N \to N, g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1},$$

jest dobrze określonym automorfizmem grupy N, który oznaczamy $\sigma_{N,h}$. (Automorfizmy postaci $\sigma_{H,h}$ nazywamy wewnętrznymi.)

7. Niech G i H będą grupami. Przypuśćmy, że N jest dzielnikiem normalnym grupy G i h jest elementem grupy H takimi, że

$$N \cdot \langle h \rangle = H \qquad \text{i} \qquad N \cap \langle h \rangle = \{e\}.$$

Opisać bijekcję

$$\{\varphi : \varphi\colon H \to G \text{ jest homomorfizmem grup}\} \leftrightarrow$$
$$\{(\psi_1, \psi_2) : \psi_1\colon N \to G \text{ i } \psi_2\colon \langle h \rangle \to G \text{ są homomorfizmami grup}$$
$$\text{takimi, że } \psi_1 \circ \sigma_{N,h} = \sigma_{G,\psi_2(h)} \circ \psi_1\}$$

taką, że homomorfizm grup odpowiadający parze (ψ_1, ψ_2) jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy

(1) ψ_1 i ψ_2 są różnowartościowe,

(2) $\operatorname{Im} \psi_1 \cap \operatorname{Im} \psi_2 = \{e\}$.

8. Znaleźć wszystkie automorfizmy (endomorfizmy) grupy S_3. Które ze znalezionych automorfizmów są wewnętrzne?

9. Znaleźć wszystkie automorfizmy (endomorfizmy) grupy D_4. Które ze znalezionych automorfizmów są wewnętrzne?

10. Znaleźć wszystkie automorfizmy (endomorfizmy) grupy A_4. Które ze znalezionych automorfizmów są wewnętrzne?

11. Znaleźć wszystkie automorfizmy (endomorfizmy) grupy $\mathbb{Z}$. Które ze znalezionych automorfizmów są wewnętrzne?

12. Udowodnić, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n^*$.

13. Opisać wszystkie homomorfizmy $D_4 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to D_4$.

14. Udowodnić, że jeśli $|G| = n$ dla grupy G i całkowitej liczby dodatniej n, to $|\operatorname{Aut}(G)|$ dzieli liczbę $(n-1)!$.

15. Niech σ będzie automorfizmem grupy skończonej G takim, że

$$\{g \in G : \sigma(g) = g\} = \{e\}.$$

(1) Udowodnić, że
$$G = \{g^{-1} \cdot \sigma(g) : g \in G\}.$$

(2) Udowodnić, że jeśli $\sigma^2 = \mathrm{Id}_G$, to grupa G jest abelowa. (*Wskazówka*: Korzystając z części pierwszej, udowodnić, że $\sigma(g) = g^{-1}$ dla każdego elementu $g \in G$.)