Algebra
Zestaw 2
Podgrupy

---

1. Wyznaczyć kratę podgrup grupy $\mathbb{Z}_8$.

2. Wyznaczyć kratę podgrup grupy $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$.

3. Wyznaczyć kratę podgrup grupy D_4.

4. Wyznaczyć kratę podgrup grupy A_4.

5. Niech Q będzie podgrupą grupy $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generowaną przez macierze:

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć kratę podgrup grupy Q.

6. Wyznaczyć warstwy grupy $\mathbb{Z}_{12}$ względem następujących podgrup:
(1) $\{0, 6\}$,
(2) $\{0, 4, 8\}$,
(3) $\{0, 3, 6, 9\}$,
(4) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

7. Wyznaczyć warstwy grupy $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ względem następujących podgrup:
(1) $\{1, 17\}$,
(2) $\{1, 13, 25\}$,
(3) $\{1, 17, 19, 35\}$,
(4) $\{1, 5, 13, 17, 25, 29\}$.

8. Wyznaczyć warstwy lewostronne grupy A_4 względem następujących podgrup:
(1) $\{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)\}$,
(2) $\{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$,
(3) $\{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

9. Niech $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ oraz niech M będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ takich, że istnieją liczby zespolone a, b, c i d takie, że $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ oraz

$$f(x) := \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

dla wszystkich liczb zespolonych x. Udowodnić, że zbiór M tworzy podgrupę grupy $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{C}})$ wszystkich bijekcji zbioru $\overline{\mathbb{C}}$.

10. Dla elementu a grupy G przez $C_G(a)$ oznaczamy podzbiór grupy G złożony ze wszystkich elementów b takich, że

$$b \cdot a = a \cdot b.$$

Udowodnić, że zbiór $C_G(a)$ jest podgrupą grupy G (którą nazywamy *centralizatorem* elementu x).

11. Znaleźć następujące centralizatory:

(1) $C_{S_4}((1,2))$.

(2) $C_{S_4}((1,2)(3,4))$.

(3) $C_{S_4}((1,2,3,4))$.

(4) $C_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}\left(\left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right]\right)$, gdzie λ i μ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

(5) $C_M(x \mapsto \lambda \cdot x)$, gdzie M jest grupą z Zadania 9, zaś λ jest ustaloną liczbą zespoloną.

(6) $C_M(x \mapsto x + \lambda)$, gdzie M jest grupą z Zadania 9, zaś λ jest ustaloną liczbą zespoloną.

12. Niech U będzie skończonym niepustym podzbiorem grupy G. Udowodnić, że zbiór U jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot b \in U$ dla dowolnych elementów a i b zbioru U.

13. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G. Udowodnić, że zbiór $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy $H_1 \subseteq H_2$ lub $H_2 \subseteq H_1$.

14. Udowodnić, że grupa jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończenie wiele podgrup.

15. Znaleźć rzędy elementów a, b i $a \cdot b$ w grupie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(1) $a = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ i $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

(2) $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ i $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

16. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G. Udowodnić, że

$$|H_1 \cdot H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|},$$

gdzie

$$H_1 \cdot H_2 := \{a \cdot b : a \in H_1 \text{ i } b \in H_2\}.$$