Algebra
Zestaw 1
Półgrupy, monoidy, grupy

Niech G będzie niepustym zbiorem z działaniem $\cdot\colon G \times G \to G$.

Definicja. Parę $(G, \cdot)$ (zwykle mówi się zbiór G) nazywamy *półgrupą*, jeśli działanie $\cdot$ jest *łączne*, tzn.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

dla dowolnych elementów a, b i c zbioru G.

Definicja. Półgrupę $(G, \cdot)$ nazywamy *monoidem*, jeśli dla działania $\cdot$ istnieje element *neutralny*, tzn. taki element e, że

$$a \cdot e = a = e \cdot a$$

dla wszystkich elementów a półgrupy G.

1. Podać przykład półgrupy, która nie jest monoidem.

2. Udowodnić, że jeśli para $(G, \cdot)$ jest monoidem, to element neutralny dla działania $\cdot$ jest wyznaczony jednoznacznie, tzn. jeśli istnieją elementy e' i e'' monoidu G takie, że

$$a \cdot e' = a = e' \cdot a \qquad \text{i} \qquad a \cdot e'' = a = e'' \cdot a$$

dla wszystkich elementów a monoidu G, to $e' = e''$.

Oznaczenie. Jeśli para $(G, \cdot)$ jest monoidem, to element neutralny dla działania $\cdot$ będziemy oznaczać symbolem $e_{(G,\cdot)}$ lub, krócej, e_G lub e.

Definicja. Monoid $(G, \cdot)$ nazywamy *grupą*, jeśli dla każdego elementu a monoidu G istnieje element do niego *odwrotny*, tzn. takie element a', że

$$a \cdot a' = e_{(G,\cdot)} = a' \cdot a.$$

3. Podać przykład monoidu, który nie jest grupą.

4. Udowodnić, że jeśli para $(G, \cdot)$ jest grupą, to dla każdego elementu a grupy G element odwrotny jest wyznaczony jednoznacznie, tzn. jeśli istnieją elementy a' i a'' grupy G takie, że

$$a \cdot a' = e_{(G,\cdot)} = a' \cdot a \qquad \text{i} \qquad a \cdot a'' = e_{(G,\cdot)} = a'' \cdot a,$$

to $a' = a''$.

Oznaczenie. Jeśli para $(G, \cdot)$ jest grupą i a jest elementem grupy G, to element odwrotny do elementu a oznaczamy symbolem a^{-1}.

5. Udowodnić, że jeśli para $(G, \cdot)$ jest grupą oraz a i a' są elementami grupy G takimi, że

$$a \cdot a' = e_{(G,\cdot)},$$

to $a' = a^{-1}$.

Definicja. Grupę $(G, \cdot)$ nazywamy *abelową*, jeśli działanie $\cdot$ jest przemienne, tzn.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

dla dowolnych elementów a i b grupy G.

Oznaczenie. Jeśli działanie oznaczamy symbolem $+$, to piszemy zwykle 0 zamiast e oraz $-a$ zamiast a^{-1} i nazywamy element $-a$ elementem *przeciwnym* do elementu a.

6. Które z poniższych zbiorów są grupami (półgrupami, monoidami) względem zwykłego dodawania (mnożenia) liczb:

(1) zbiór liczb naturalnych,

(2) zbiór liczb całkowitych,

(3) zbiór liczb wymiernych,

(4) zbiór liczb niewymiernych.

7. Które następujących zbiorów macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach w ustalonym ciele K tworzą grupę (półgrupę, monoid) względem dodawania (mnożenia) macierzy:

(1) zbiór wszystkich macierzy,

(2) zbiór macierzy nieosobliwych, tzn. macierzy o wyznaczniku różnym od 0,

(3) zbiór macierzy o wyznaczniku równym 1,

(4) zbiór macierzy o wyznaczniku równym 0,

(5) zbiór macierzy o wyznaczniku równym 2.

8. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur:

(1) trójkąta równobocznego,

(2) prostokąta niebędącego kwadratem,

(3) rombu niebędącego kwadratem,

(4) kwadratu,

(5) prostopadłościanu, którego żadna ściana nie jest kwadratem,

(6) prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem, ale żadna ściana boczna nie jest kwadratem,

(7) sześcianu.

9. Niech $(G, \cdot)$ będzie półgrupą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(1) Dla dowolnych elementów a i b półgrupy G istnieją elementy x i y półgrupy G takie, że $a \cdot x = b$ i $y \cdot a = b$.

(2) Półgrupa $(G, \cdot)$ jest grupą.

(3) Dla dowolnych elementów a i b półgrupy G istnieją jedyne elementy x i y półgrupy G takie, że $a \cdot x = b$ i $y \cdot a = b$.

10. Niech $(G, \cdot)$ będzie półgrupą taką, że $|G| < \infty$. Udowodnić, że półgrupa $(G, \cdot)$ jest grupą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

(1) dla dowolnych elementów a i b półgrupy G istnieje co najwyżej jeden element x półgrupy G taki, że $a \cdot x = b$,

(2) dla dowolnych elementów a i b półgrupy G istnieje co najwyżej jeden element y półgrupy G taki, że $y \cdot a = b$.

Podać przykład, że powyższe twierdzenie może nie być prawdziwe, gdy $|G| = \infty$.

11. Niech

$$G := \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}.$$

W zbiorze G definiujemy działanie $*$ wzorem

$$x * y := xy - x - y + 2 \qquad (x, y \in G).$$

Udowodnić, że działanie $*$ jest dobrze określone, oraz, że zbiór G wraz z działaniem $*$ jest grupą.

12. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i

$$X := \{a \in G : a^2 = e_{(G,\cdot)}\}.$$

Udowodnić, że jeśli $|X| \leq 2$, to

$$a \cdot b = b \cdot a$$

dla dowolnych elementów $a \in X$ i $b \in G$.

13. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą taka, że $|G| < \infty$.

(1) Udowodnić, że $|X|$ jest liczbą parzystą, gdzie

$$X := \{a \in G : a^2 \neq e_{(G,\cdot)}\}.$$

(2) Udowodnić, że jeśli $|G|$ jest liczbą parzystą, to istnieje element a grupy G taki, że $a \neq e_{(G,\cdot)}$ i $a^2 = e_{(G,\cdot)}$.

(3) Udowodnić, że jeśli $|G|$ jest liczbą parzystą, to istnieje element a grupy G taki, że a nie jest kwadratem, tzn.

$$a \notin \{b^2 : b \in G\}.$$

14. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą taką, że

$$a^2 = e_{(G,\cdot)}$$

dla każdego elementu a grupy G. Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

15. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(1) Grupa $(G, \cdot)$ jest abelowa.

(2) $(ab)^2 = a^2b^2$ dla dowolnych elementów a i b grupy G.

(3) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ dla dowolnych elementów a i b grupy G.

(4) Istnieje liczba całkowita n taka, że $(ab)^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1}$, $(ab)^n = a^nb^n$ i $(ab)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1}$ dla dowolnych elementów a i b grupy G.

16. Udowodnić, że jeśli $(G, \cdot)$ jest grupą oraz a i b są elementami grupy G takimi, że $b \cdot a \cdot b^{-1} = a^k$ dla pewnej liczby całkowitej n, to $b^n \cdot a \cdot b^{-n} = a^{k^n}$ dla każdej liczby naturalnej n.