Algebra I

Wykład XIII

Grzegorz Bobiński (UMK)

3.4 Jednoznaczność

Cel

Celem tego rozdziału jest udowodnienie, że jeśli G jest skończoną grupą abelową, to istnieją jednoznacznie wyznaczone $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, oraz $n_{i,j} \in \mathbb{N}_+$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, l_i\}$, takie, że

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}}.$$

$p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ oraz

$$n_{i,1} \leq n_{i,2} \leq \cdots \leq n_{i,l_i},$$

dla każdego i.

Na tym wykładzie zajmiemy się jednoznacznością.

Notacja

Jeśli G jest grupą abelową i $m \in \mathbb{Z}$, to
$$0 :_G m := \{g \in G : m \cdot g = 0\}.$$

Uwaga

W powyższej sytuacji $0 :_G m \leq G$.

Lemat 3.14

Niech $\varphi \colon G \to H$ będzie izomorfizmem grup abelowych.
Jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to
$$\varphi(0 :_G m) = 0 :_H m.$$
W szczególności, $0 :_G m \simeq 0 :_H m$.

Dowód

Łatwo widać, że $\varphi(0 :_G m) \subseteq 0 :_H m$.
Podobnie, $\varphi^{-1}(0 :_H m) \subseteq 0 :_G m$.
Stąd
$$0 :_H m = \varphi(\varphi^{-1}(0 :_H m)) \subseteq \varphi(0 :_G m). \quad \square$$

Notacja

Jeśli G jest grupą abelową oraz $m \in \mathbb{Z}$, to

$$m \cdot G := \{m \cdot g : g \in G\}.$$

Uwaga

W powyższej sytuacji $m \cdot G \leq G$.

Lemat 3.15

Niech $\varphi \colon G \to H$ będzie izomorfizmem grup abelowych.
Jeśli $m \in \mathbb{Z}$, to

$$\varphi(m \cdot G) = m \cdot H.$$

W szczególności, $m \cdot G \simeq m \cdot H$.

Dowód

Ćwiczenie. $\square$

Lemat 3.16

Niech $p \in \mathbb{P}$ i $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}_+$.
Jeśli $m \in \mathbb{N}$ i

$$G = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{p^{n_i}},$$

to

$$|p^m \cdot G| = \prod_{i=1}^{l} p^{\max(0, n_i - m)}.$$

Dowód

Wystarczy zauważyć, że jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to

$$|p^m \cdot \mathbb{Z}_{p^n}| = p^{\max(0, n - m)}. \quad \square$$

Stwierdzenie 3.17

Niech $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{P}$.
Dodatkowo, dla każdego $i = 1, \dots, n$, niech $n_{i,1} \leq \dots \leq n_{i,l_i} \in \mathbb{N}_+$ i $m_{i,1} \leq \dots \leq m_{i,k_i} \in \mathbb{N}_+$, $l_i, k_i \in \mathbb{N}$.
Jeśli

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}},$$

to $l_1 = k_1, \dots, l_n = k_n$ oraz $n_{i,j} = m_{i,j}$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, l_i$.

Dowód

Niech

$$G := \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \qquad \text{i} \qquad H := \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}}.$$

Ustalmy izomorfizm $\varphi \colon G \to H$.
Dla każdego $i = 1, \dots, n$ definiujemy

$$q_i := p_i^{\max(n_{i,l_i}, m_{i,k_i})},$$

(gdzie $n_{i,l_i} := 0$, gdy $l_i = 0$, oraz $m_{i,k_i} := 0$, gdy $k_i = 0$) oraz

$$G_i := 0 :_G q_i \qquad \text{i} \qquad H_i := 0 :_H q_i.$$

Wtedy

$$G_i \simeq \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \qquad \text{i} \qquad H_i \simeq \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}}.$$

(3.14) $\implies \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \simeq \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}}$.

Dowód (c.d)

Mamy
$$\bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \simeq \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}}.$$

Chcemy pokazać, że
$$k_i = l_i, \qquad n_{i,1} = m_{i,1}, \qquad n_{i,2} = m_{i,2}, \qquad \ldots, \qquad n_{i,k_i} = m_{i,k_i}.$$

Równoważnie, $r_{i,u} = s_{i,u}$ dla $u \in \mathbb{N}_+$, gdzie
$$r_{i,u} := |\{j : n_{i,j} = u\}| \qquad \text{i} \qquad s_{i,u} := |\{j : m_{i,j} = u\}|.$$

(3.16) $\implies$ dla $v \in \mathbb{N}$ mamy
$$|p_i^v \cdot \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}}| = p_i^{\sum_{u>v}(u-v)r_{i,u}} \qquad \text{i} \qquad |p_i^v \cdot \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}}| = p_i^{\sum_{u>v}(u-v)s_{i,u}}.$$

(3.15) $\implies$ dla $v \in \mathbb{N}$ mamy
$$\sum_{u>v}(u-v)r_{i,u} = \sum_{u>v}(u-v)s_{i,u}.$$

Oczywiście, $r_{i,u} = 0 = s_{i,u}$, dla $u > w := \max(n_{i,l_i}, m_{i,k_i})$.

W szczególności, powyższą równość możemy zapisać
$$\sum_{u=v+1}^{w} (u-v)(r_{i,u} - s_{i,u}) = 0.$$

Nietrywialne równania dostajemy dla $v = 0, \ldots, w-1$.

W efekcie dostajemy trójkątny układ w równań z w niewiadomymi $x_u := r_{i,u} - s_{i,u}$, $u = 1, \ldots, w$, i jedynkami na przekątnej. Rozwiązując ten układ, otrzymujemy, że $x_u = 0$ dla $u = 1, \ldots, w$, skąd wynika teza. □

Wniosek 3.13

Jeśli G jest skończoną grupą abelową, to istnieją $p_1 < \cdots < p_n \in \mathbb{P}$, $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}_+$, oraz $n_{ij} \in \mathbb{N}_+$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, l_i$, takie, że

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p^{n_{ij}}}.$$

Stwierdzenie 3.17

Niech $p_1 < \cdots < p_n \in \mathbb{P}$.

Dodatkowo, dla każdego $i = 1, \ldots, n$, niech $n_{i,1} \leq \cdots \leq n_{i,l_i} \in \mathbb{N}_+$ i $m_{i,1} \leq \cdots \leq m_{i,k_i} \in \mathbb{N}_+$, $l_i, k_i \in \mathbb{N}$.

Jeśli

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{k_i} \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,j}}},$$

to $l_1 = k_1$, …, $l_n = k_n$ oraz $n_{i,j} = m_{i,j}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, l_i$.

Twierdzenie 3.18

Jeśli G jest skończoną grupą abelową, to istnieją jednoznacznie wyznaczone: $n \in \mathbb{N}$, $p_1 < \cdots < p_k \in \mathbb{P}$, $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}_+$, oraz $n_{i,1} \leq \cdots \leq n_{i,l_i} \in \mathbb{N}_+$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, takie, że

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} \mathbb{Z}_{p_i^{n_{i,j}}}. \quad \square$$