Algebra I

Wykład IX

Grzegorz Bobiński (UMK)

2.3 Dziedziny Euklidesa

Definicja

Dziedzinę R nazywamy dziedziną Euklidesa, jeśli istnieje funkcja $\alpha\colon R \to \mathbb{N}$ taka, że

$$\forall_{\substack{s,t\in R\\ t\neq 0}} \exists_{q,r\in R}\ s = q\cdot t + r \wedge \alpha(r) < \alpha(t).$$

Przykład

$\mathbb{Z}$ jest dziedziną Euklidesa.

Twierdzenie 2.17

Każda dziedzina Euklidesa jest PID.

Twierdzenie 2.17

Każda dziedzina Euklidesa jest PID.

Dowód

Niech R wraz z funkcją $\alpha\colon R \to \mathbb{N}$ będzie dziedziną Euklidesa.
Niech $I \trianglelefteq R$.
1°. $I = \{0\}$.
Wtedy $I = (0)$.
2°. $I \neq \{0\}$.
Wybierzmy $t \in I \setminus \{0\}$ taki, że

$$\alpha(t) = \min\{\alpha(s) : s \in I \setminus \{0\}\}.$$

Pokażemy, że $(t) = I$.
Oczywiście $(t) \subseteq I$.
Ustalmy $s \in I$.
Istnieją $q, r \in R$ takie, że $s = q \cdot t + r$ i $\alpha(r) < \alpha(t)$.
Zauważmy, że $r = s - q \cdot t \in I$.
Z wyboru t wynika, że $r = 0$.
Stąd $s = q \cdot t \in (t)$. □

Twierdzenie 2.17

Każda dziedzina Euklidesa jest PID.

Wniosek 2.18

Każda dziedzina Euklidesa jest UFD.

Przypomnienie

(2.16): PID $\Longrightarrow$ UFD.

Dowód

(2.17)+(2.16). □

Twierdzenie 2.19 (Algorytm dzielenia dla wielomianów)

Niech F będzie ciałem.
Jeśli $f, g \in F[X]$ oraz $g \neq 0$, to istnieją (jednoznacznie wyznaczone) wielomiany $q, r \in F[X]$ takie, że

$$f = q \cdot g + r \qquad \text{i} \qquad \deg r < \deg g.$$

Dowód (Istnienie)

Indukcja na $\deg f$.

Jeśli $\deg f < \deg g$ (np. $f = 0$), to $q := 0$ i $r := f$.

Jeśli $n := \deg f \geq \deg g =: m$, to istnieje $\lambda \in F$ takie, że $\deg(f - \lambda \cdot X^{n-m} \cdot g) < \deg f$.

Z założenia indukcyjnego istnieją $q_0, r \in F[X]$ takie, że

$$f - \lambda \cdot X^{n-m} \cdot g = q_0 \cdot g + r \qquad \text{i} \qquad \deg r < \deg g.$$

Biorąc $q := \lambda \cdot X^{n-m} + q_0$, otrzymujemy tezę.

Twierdzenie 2.19 (Algorytm dzielenia dla wielomianów)

Niech F będzie ciałem.
Jeśli $f, g \in F[X]$ oraz $g \neq 0$, to istnieją (jednoznacznie wyznaczone) wielomiany q i r takie, że

$$f = q \cdot g + r \qquad \text{i} \qquad \deg r < \deg g.$$

Dowód (Jednoznaczność)

Jeśli $f = q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2$ i $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$, to

$$g \cdot (q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$$

Gdyby $q_1 \neq q_2$, to $\deg(q_1 - q_2) \geq 0$, więc

$$\begin{aligned} \deg(r_2 - r_1) = \deg(g \cdot (q_1 - q_2)) &= \deg g + \deg(q_1 - q_2) \\ &\geq \deg g > \max\{\deg r_1, \deg r_2\} \geq \deg(r_2 - r_1), \end{aligned}$$

sprzeczność.
Zatem $q_1 = q_2$, więc

$$r_2 - r_1 = g \cdot (q_1 - q_2) = g \cdot 0 = 0,$$

tzn. $r_1 = r_2$. $\square$

Wniosek 2.20

Jeśli F jest ciałem, to $F[X]$ jest dziedziną Euklidesa.

Dowód

Funkcja $\alpha\colon F[X] \to \mathbb{N}$ dana wzorem

$$\alpha(f) := 2^{\deg f} \qquad (f \in F[X]),$$

spełnia warunki definicji. $\square$

Wniosek 2.21

Jeśli F jest ciałem, to $F[X]$ jest UFD.

Dowód

(2.20)+(2.18). $\square$

Uwaga

Można pokazać, że jeśli R jest UFD, to $R[X]$ jest UFD.
W szczególności, jeśli F jest ciałem, to $F[X_1, \dots, X_n]$ jest UFD.