Algebra I

Wykład VI

Grzegorz Bobiński (UMK)

1.6 Twierdzenia o izomorfizmie

Uwaga

Jeśli $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ i $N \subseteq H$, to $N \trianglelefteq H$.
Ponadto, w powyższej sytuacji $H/N \leq G/N$.
Jeśli (dodatkowo) $H \trianglelefteq G$, to $H/N \trianglelefteq G/N$.
Analogicznie, jeśli $I, J \trianglelefteq R$, $I \subseteq J$, to $J/I \trianglelefteq R/I$.

Lemat 1.33

Niech $\varphi\colon X \to Y$ będzie homomorfizmem grup/pierścieni.

Jeśli $N \trianglelefteq X$ jest taki, że $N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, to istnieje jedyny homomorfizm $\varphi'\colon X/N \to Y$ taki, że $\varphi = \varphi' \circ \pi$, gdzie $\pi\colon X \to X/N$ jest naturalnym rzutowaniem.

Homomorfizm φ' dany jest wzorem

$$\varphi'([x]_{\sim_N}) := \varphi(x) \qquad (x \in X).$$

Ponadto

$$\operatorname{Ker}\varphi' = (\operatorname{Ker}\varphi)/N \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi.$$

Dowód

Udowodnimy lemat w wersji dla grup.

Pokażemy, że φ' jest poprawnie określona.

Przypuśćmy, że $[x]_{\sim_N} = [y]_{\sim_N}$ dla $x, y \in X$.

Wtedy $x^{-1} \cdot y \in N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, skąd

$$\varphi(y) = \varphi(x \cdot x^{-1} \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1} \cdot y) = \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x).$$

Łatwo widać, że φ' jest istotnie homomorfizmem, $\varphi = \varphi' \circ \pi$ oraz $\operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi$.

Ponadto,

$$\varphi'([x]_{\sim_N}) = 1 \iff \varphi(x) = 1 \iff x \in \operatorname{Ker}\varphi,$$

zatem $\operatorname{Ker}\varphi' = (\operatorname{Ker}\varphi)/N$.

Aby pokazać jedyność φ', przypuśćmy, że $\psi\colon X/N \to Y$ jest homomorfizmem takim, że $\varphi = \psi \circ \pi$.

Wtedy dla $x \in X$ mamy

$$\psi([x]_{\sim_N}) = \psi(\pi(x)) = \varphi(x) = \varphi'([x]_{\sim_N}). \qquad \square$$

Lemat 1.33

Niech $\varphi \colon X \to Y$ będzie homomorfizmem grup/pierścieni.
Jeśli $N \trianglelefteq X$ jest taki, że $N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, to istnieje jedyny homomorfizm $\varphi' \colon X/N \to Y$ taki, że $\varphi = \varphi' \circ \pi$, gdzie $\pi \colon X \to X/N$ jest naturalnym rzutowaniem.
Homomorfizm φ' dany jest wzorem

$$\varphi'([x]_{\sim_N}) := \varphi(x) \qquad (x \in X).$$

Ponadto

$$\operatorname{Ker}\varphi' = (\operatorname{Ker}\varphi)/N \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi.$$

Twierdzenie 1.34 (I Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $\varphi \colon X \to Y$ jest homomorfizmem grup/pierścieni, to funkcja

$$\psi \colon X/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi,\ [x]_{\sim_{\operatorname{Ker}\varphi}} \mapsto \varphi(x),$$

jest izomorfizmem.

Przypomnienie

(1.12)(3): $\varphi \colon X \to Y$ jest izomorfizmem $\iff$ $|\operatorname{Ker}\varphi| = 1$ i $\operatorname{Im}\varphi = Y$.

Dowód

(1.33) $\overset{N = \operatorname{Ker}\varphi}{\Longrightarrow}$ φ' jest homomorfizmem takim, że $\operatorname{Ker}\varphi' = \operatorname{Ker}\varphi/\operatorname{Ker}\varphi$ oraz $\operatorname{Im}\varphi' = \operatorname{Im}\varphi$.
(1.12)(3) $\Longrightarrow$ $\psi := \varphi|^{\operatorname{Im}\varphi}$ jest izomorfizmem. □

Twierdzenie 1.34 (I Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $\varphi\colon X \to Y$ jest homomorfizmem grup/pierścieni, to funkcja

$$\psi\colon X/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi,\ [x]_{\sim_{\operatorname{Ker}\varphi}} \mapsto \varphi(x),$$

jest izomorfizmem.

Przykłady

(1) Jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n,\ \ k \mapsto k \bmod n,$$

indukuje jest izomorfizm $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ (grup i pierścieni).

(2) Funkcja

$$\mathbb{R} \to \mathbb{T},\ \ x \mapsto \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x),$$

indukuje izomorfizm $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$.

(3) Jeśli F jest ciałem, to funkcja

$$\mathrm{GL}_n(F) \to F^{\times},\ \ A \mapsto \det A,$$

indukuje izomorfizm $\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \simeq F^{\times}$.

Lemat 1.33

Niech $\varphi \colon X \to Y$ będzie homomorfizmem grup/pierścieni.
Jeśli $N \trianglelefteq X$ jest taki, że $N \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$, to istnieje jedyny homomorfizm $\varphi' \colon X/N \to Y$ taki, że $\varphi = \varphi' \circ \pi$, gdzie $\pi \colon X \to X/N$ jest naturalnym rzutowaniem.
Ponadto
$$\operatorname{Ker} \varphi' = (\operatorname{Ker} \varphi)/N \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im} \varphi' = \operatorname{Im} \varphi.$$

Twierdzenie 1.34 (I Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $\varphi \colon X \to Y$ jest homomorfizmem grup/pierścieni, to
$$X/\operatorname{Ker} \varphi \simeq \operatorname{Im} \varphi.$$

Twierdzenie 1.35 (III Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $M, N \trianglelefteq X$ i $N \subseteq M$, to
$$(X/N)/(M/N) \simeq X/M.$$

Dowód

Niech $\pi \colon X \to X/M$ będzie naturalnym rzutowaniem.
Wtedy $\operatorname{Im} \pi = X/M$ oraz $\operatorname{Ker} \pi = M$.
(1.33) $\implies$ istnieje homomorfizm $\pi' \colon X/N \to X/M$ taki, że $\operatorname{Ker} \pi' = M/N$ i $\operatorname{Im} \pi' = X/M$.
(1.34) $\implies$ teza. □

Twierdzenie 1.35 (III Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $M, N \trianglelefteq X$ i $N \subseteq M$, to

$$(X/N)/(M/N) \simeq X/M.$$

Przykład

Niech $m, n \in \mathbb{N}_+$.

Wtedy

$$\mathbb{Z}_{mn}/\{0, m, 2m, \dots, (n-1)m\} \simeq (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m.$$

A więc na przykład

$$\mathbb{Z}_6/\{0, 3\} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

Oznaczenie

Jeśli $X, Y \subseteq G$, to
$$XY = \{x \cdot y : x \in X \text{ i } y \in Y\}.$$

Uwaga

Jeśli $X \subseteq G$ i $N \trianglelefteq G$, to $XN = NX$.

Dowód

Przez symetrię pokażemy tylko, że $XN \subseteq NX$.
Niech $x \in X$ i $n \in N$.
Wtedy $xnx^{-1} \in N$ (bo $N \trianglelefteq G$), więc $x \cdot n = (xnx^{-1}) \cdot x \in NX$. □

Lemat 1.36

Jeśli $H \leq G$ i $N \trianglelefteq G$, to $H \cap N \trianglelefteq H$ oraz $HN \leq G$.

Przypomnienie

(1.9): $K \leq L \iff K \neq \varnothing$ i $k_1 \cdot k_2^{-1} \in K$ dla wszystkich $k_1, k_2 \in K$.

Szkic dowodu

Jeśli $h \in H$ i $n \in H \cap N$, to $hnh^{-1} \in H$ (bo $H \leq G$) i $hnh^{-1} \in N$ (bo $N \trianglelefteq G$).
Jeśli $h_1, h_2 \in H$ i $n_1, n_2 \in N$, to
$$(h_1 n_1) \cdot (h_2 n_2)^{-1} = h_1 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1} = h_1 h_2^{-1} \cdot h_2 (n_1 n_2^{-1}) h_2^{-1} \in HN. \quad \square$$

Twierdzenie 1.37 (II Twierdzenie o Izomorfizmie – wersja dla grup)

Jeśli $H \leq G$ i $N \trianglelefteq G$, to

$$(HN/N) \simeq (H/H \cap N).$$

Twierdzenie 1.34 (I Twierdzenie o Izomorfizmie)

Jeśli $\varphi\colon X \to Y$ jest homomorfizmem grup/pierścieni, to

$$X/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi.$$

Dowód

Definiujemy $\varphi\colon H \to G/N$, $\varphi(h) := hN$, $h \in H$.
Wtedy $\operatorname{Ker}\varphi = H \cap N$.
Ponadto $\operatorname{Im}\varphi = HN/N$.
Istotnie, inkluzja $\operatorname{Im}\varphi \subseteq HN/N$ jest oczywista.
Z drugiej strony, jeśli $h \in H$ i $n \in N$, to

$$(h \cdot n)N = hN = \varphi(h).$$

Zatem teza wynika z (1.34). □

Twierdzenie 1.37 (II Twierdzenie o Izomorfizmie – wersja dla grup)

Jeśli $H \leq G$ i $N \trianglelefteq G$, to
$$(HN/N) \simeq (H/H \cap N).$$

Twierdzenie 1.38 (II Twierdzenie o Izomorfizmie – wersja dla pierścieni)

Jeśli $S \leq R$ i $I \trianglelefteq R$, to
$$(S + I)/I \simeq S/(S \cap I).$$

Dowód

Ćwiczenie. $\square$

Uwaga

Odpowiednikiem II Twierdzenia o Izomorfizmie dla skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych jest wzór
$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Twierdzenie 1.37 (II Twierdzenie o Izomorfizmie – wersja dla grup)

Jeśli $H \leq G$ i $N \trianglelefteq G$, to

$$(HN/N) \simeq (H/H \cap N).$$

Przykład

Grupę G nazywamy rozwiązalną, jeśli istnieje ciąg

$$\{1\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

podgrup grupy G taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$

$$H_{i-1} \trianglelefteq H_i \qquad \text{oraz} \qquad H_i/H_{i-1} \text{ jest abelowa.}$$

Pokażemy, że jeśli G jest rozwiązalna i $H \leq G$, to H jest rozwiązalna.
Istotnie, definiujemy

$$H_i' := H_i \cap H, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Wtedy oczywiście

$$\{1\} = H_0' \subseteq H_1' \subseteq \ldots \subseteq H_n' = H.$$

Ponadto

$$H_{i-1}' = H_{i-1} \cap H_i',$$

więc $H_{i-1}' \trianglelefteq H_i'$ oraz

$$H_i'/H_{i-1}' = H_i'/(H_i' \cap H_{i-1}) \simeq (H_i' H_{i-1})/H_{i-1} \leq H_i/H_{i-1},$$

zatem H_i'/H_{i-1}' jest grupą abelową.