Algebra I

Wykład II

Grzegorz Bobiński (UMK)

Definicja

Niech $X = (X, *)$ i $Y = (Y, \star)$ będą półgrupami.
Homomorfizmem z półgrupy X do półgrupy Y nazywamy każdą funkcję $\varphi\colon X \to Y$ taką, że

$$\forall_{x_1, x_2 \in X}\ \varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \star \varphi(x_2).$$

Sformułowanie: „$\varphi\colon X \to Y$ jest homomorfizmem półgrup/monoidów/grup" oznacza, że X i Y są półgrupami/monoidami/grupami oraz φ jest homomorfizmem z półgrupy X do półgrupy Y (pamiętajmy, że każdy monoid/grupa jest też półgrupą).
Jeśli R i S są pierścieniami, to funkcję $\varphi\colon R \to S$ nazywamy homomorfizmem pierścieni, jeśli φ jest homomorfizmem grup addytywnych oraz monoidów multiplikatywnych pierścieni R i S.

Terminologia

Sformułowanie „X jest strukturą algebraiczną" oznacza, że X jest pierścieniem, grupą, monoidem lub półgrupą.

Stwierdzenie 1.4

(1) Jeśli X jest strukturą algebraiczną, to Id_X jest homomorfizmem.

(2) Jeśli $\varphi\colon X \to Y$ i $\psi\colon Y \to Z$ są homomorfizmami, to $\psi \circ \varphi$ też jest homomorfizmem.

Dowód

Ćwiczenie. $\square$

Przykłady

- Jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $k \mapsto k \bmod n$, jest homomorfizmem grup i pierścieni.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$, $x \mapsto e^x$, jest homomorfizmem grup. $[e^{x+y} = e^x \cdot e^y]$
- Jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to $S_n \to \mathbb{T}_2$, $\sigma \mapsto \operatorname{sgn} \sigma$, jest homomorfizmem grup.
  $[\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)]$
- Jeśli F jest ciałem oraz $n \in \mathbb{N}_+$, to $\mathbb{M}_n(F) \to F$, $A \mapsto \operatorname{Tr} A$, jest homomorfizmem grup.
  $[\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)]$
- Jeśli F jest ciałem oraz $n \in \mathbb{N}_+$, to $\mathrm{GL}_n(F) \to F^\times$, $A \mapsto \det A$, jest homomorfizmem grup.
  $[\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)]$
- Jeśli R jest pierścieniem oraz $r \in R$, to $R[X] \to R$, $f \mapsto f(r)$, jest homomorfizmem pierścieni.
- Jeśli R jest pierścieniem, $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $i \in \{1, \dots, n\}$, to $\iota_i \colon R \to R^n$,
  $r \mapsto (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$, jest homomorfizmem pierścieni.

Stwierdzenie 1.5

Jeśli $\varphi\colon G \to H$ jest homomorfizmem grup, to

$$\varphi(1_G) = 1_H$$

oraz

$$\forall_{g\in G}\ \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}.$$

Dowód

$$\varphi(1_G) = \varphi(1_G)\cdot 1_H = \varphi(1_G)\cdot\varphi(1_G)\cdot(\varphi(1_G))^{-1}$$
$$= \varphi(1_G\cdot 1_G)\cdot(\varphi(1_G))^{-1} = \varphi(1_G)\cdot(\varphi(1_G))^{-1} = 1_H.$$

Ustalmy $g \in G$. Wtedy

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g^{-1})\cdot 1_H = \varphi(g^{-1})\cdot\varphi(g)\cdot(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1}\cdot g)\cdot(\varphi(g))^{-1}$$
$$= \varphi(1_G)\cdot(\varphi(g))^{-1} = 1_H\cdot(\varphi(g))^{-1} = (\varphi(g))^{-1}. \quad \square$$

Uwaga

Niech $\varphi\colon R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni.
Wtedy φ jest homomorfizmem grup addytywnych pierścieni R i S.
Stąd

$$\varphi(0_R) = 0_S \qquad \text{i} \qquad \forall_{r\in R}\ \varphi(-r) = -\varphi(r).$$

Nie musi natomiast zachodzić równość $\varphi(1_R) = 1_S$.

Ćwiczenie

Podać przykład homomorfizmu pierścieni (monoidów) $\varphi\colon X \to Y$ takiego, że $\varphi(1_X) \neq 1_Y$.

Definicja

Homomorfizm $\varphi\colon X \to Y$ nazywamy izomorfizmem, jeśli istnieje homomorfizm $\psi\colon Y \to X$ taki, że

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X \qquad \text{i} \qquad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y .$$

Jeśli φ jest izomorfizmem i $X = Y$, to φ nazywamy automorfizmem.

Jeśli istnieje izomorfizm $X \to Y$, to mówimy, że struktury algebraiczne X i Y są izomorficzne i piszemy $X \simeq Y$.

Przykłady

- $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_+ := (\mathbb{R}_+, \cdot)$ – odpowiedni izomorfizm dany jest wzorem

  $$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}_+,$$

  a izomorfizm odwrotny

  $$\mathbb{R}_+ \ni y \mapsto \ln y \in \mathbb{R}.$$

- $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{T}_n$ – odpowiedni izomorfizm dany jest wzorem

  $$\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto \varepsilon_n^k \in \mathbb{T}_n,$$

  gdzie ε_n jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z 1, np.

  $$\varepsilon_n := \cos(2\pi/n) + \imath \sin(2\pi/n).$$

Definicja

Homomorfizm $\varphi \colon X \to Y$ nazywam monomorfizmem, jeśli φ jest injekcją.
Homomorfizm φ nazywamy epimorfizmem, jeśli φ jest surjekcją.

Stwierdzenie 1.6

Homomorfizm $\varphi \colon X \to Y$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest monomorfizmem i epimorfizmem.

Dowód

$\Rightarrow$: Oczywiste.

$\Leftarrow$: Załóżmy, że φ jest monomorfizmem i epimorfizmem.

Wtedy φ jest bijekcją, więc istnieje funkcja $\psi \colon Y \to X$ taka, że

$$\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_X \qquad \text{i} \qquad \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_Y .$$

Musimy pokazać, ψ jest homomorfizmem.

W tym celu ustalmy odpowiadające sobie działania $*$ i $\star$ w zbiorach X i Y, odpowiednio, oraz elementy y_1 i y_2 zbioru Y.

Niech

$$x_1 := \psi(y_1) \qquad \text{i} \qquad x_2 := \psi(y_2).$$

Wtedy również

$$\varphi(x_1) = y_1 \qquad \text{i} \qquad \varphi(x_2) = y_2.$$

Stąd

$$\psi(y_1 \star y_2) = \psi(\varphi(x_1) \star \varphi(x_2)) = \psi(\varphi(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 = \psi(y_1) * \psi(y_2). \quad \square$$