NWD dla wielomianów

Fakty

- Jeśli $f, g \in \mathbb{R}[X]$, to istnieją $a, b \in \mathbb{R}[X]$ takie, że $a \cdot f + b \cdot g = \mathrm{nwd}(f, g)$.
- Wielomiany a, b i $\mathrm{nwd}(f, g)$ znajdujemy, korzystając z rozszerzonego algorytmu Euklidesa.

Przykład

Niech

$$f := X^2 + 1 \qquad \text{i} \qquad g := X^3 + 2.$$

Wtedy

$$g = X \cdot f + (-X + 2), \qquad [r_0 := X - 2]$$

$$f = (X + 2) \cdot r_0 + 5, \qquad [r_1 := 1],$$

$$r_0 = (X - 2) \cdot r_1 + 0.$$

Zatem

$$\mathrm{nwd}(f, g) = r_1 = 1.$$

Ponadto

$$r_1 = (-\tfrac{1}{5}X - \tfrac{2}{5}) \cdot r_0 + \tfrac{1}{5} \cdot f \qquad \text{i} \qquad r_0 = X \cdot f + (-1) \cdot g,$$

więc

$$\mathrm{nwd}(f, g) = r_1 = (-\tfrac{1}{5}X - \tfrac{2}{5}) \cdot r_0 + \tfrac{1}{5} \cdot f = (-\tfrac{1}{5}X - \tfrac{2}{5}) \cdot (X \cdot f + (-1) \cdot g) + \tfrac{1}{5} \cdot f$$

$$= (-\tfrac{1}{5}X^2 - \tfrac{2}{5}X + \tfrac{1}{5}) \cdot f + (\tfrac{1}{5}X + \tfrac{2}{5}) \cdot g.$$