Zadanie 1

(a)

Ponieważ

$$50 = 2 \cdot 5^2,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{50} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25}.$$

(b)

Ponieważ

$$100 = 2^2 \cdot 5^2,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{100} \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25}.$$

(c)

Ponieważ

$$160 = 2^5 \cdot 5,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{160} \simeq \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_5$$

Zadanie 11

(a)

Ponieważ

$$100 = 2^2 \cdot 5^2,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{100}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{2^2}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_{5^2}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{4\cdot 5} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

(b)

Ponieważ

$$160 = 2^5 \cdot 5,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{160}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{32}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_5^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4.$$

(c)

Ponieważ

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{180}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{2^2}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_{3^2}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_5^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2\cdot 3} \oplus \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4.$$

(d)

Ponieważ

$$1375 = 5^3 \cdot 11,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{1375}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{5^3}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_{11}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{4\cdot 5^2} \oplus \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

Zadanie 12

(a)

Ponieważ

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{180}^\times \simeq \mathbb{Z}_{2^2}^\times \oplus \mathbb{Z}_{3^2}^\times \oplus \mathbb{Z}_5^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2\cdot 3} \oplus \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}.$$

(b)

Ponieważ

$$49000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{49000}^\times \simeq \mathbb{Z}_{2^3}^\times \oplus \mathbb{Z}_{5^3}^\times \oplus \mathbb{Z}_{7^2}^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{100} \oplus \mathbb{Z}_{42} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2100}.$$

(c)

Ponieważ

$$1210000 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 11^2,$$

więc

$$\mathbb{Z}_{1210000}^\times \simeq \mathbb{Z}_{2^4}^\times \oplus \mathbb{Z}_{5^4}^\times \oplus \mathbb{Z}_{11^2}^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{500} \oplus \mathbb{Z}_{110} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{220} \oplus \mathbb{Z}_{500} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{5500}.$$

(d)

Ponieważ

$$592900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2,$$

więc

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{592900}^\times &\simeq \mathbb{Z}_{2^2}^\times \oplus \mathbb{Z}_{5^2}^\times \oplus \mathbb{Z}_{7^2}^\times \oplus \mathbb{Z}_{11^2}^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{110} \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{420} \oplus \mathbb{Z}_{110} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{4620}.\end{aligned}$$

(a)

Mamy

$$20 = 2^2 \cdot 5^1.$$

Podziałami liczby 2 są: (2) i (1, 1), natomiast jednym podziałem liczby 1 jest: (1).
Zatem (z dokładnością do izomorfizmu) są $2 \cdot 1 = 2$ grupy abelowe o 20 elementach:

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

(b)

Mamy

$$40 = 2^3 \cdot 5^1.$$

Podziałami liczby 3 są: (3), (2, 1) i (1, 1, 1), natomiast jednym podziałem liczby 1 jest: (1).
Zatem (z dokładnością do izomorfizmu) są $3 \cdot 1 = 3$ grupy abelowe o 40 elementach:

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_5, \qquad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$$

(c)

Mamy

$$70 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1.$$

Jednym podziałem liczby 1 jest: (1).
Zatem (z dokładnością do izomorfizmu) jest $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ grupa abelowe o 70 elementach:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7.$$

Mamy
$$4000 = 2^5 \cdot 5^3.$$
Podziałami liczby 5 są: (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) i (1, 1, 1, 1, 1), natomiast podziałami liczby 3 są: (3), (2, 1) i (1, 1, 1).

Zatem (z dokładnością do izomorfizmu) jest $7 \cdot 3 = 21$ grup abelowych o 4000 elementach:

$$\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_{125}, \quad \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{125}, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{125}, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{125},$$

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{125}, \quad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{125}, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{125},$$

$$\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_5.$$

$$\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5,$$

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5.$$