Rozkład skończonych grup abelowych

Twierdzenie

Jeśli G jest skończoną grupą abelową, to istnieją (jednoznacznie wyznaczone) potęgi liczb pierwszych $q_1, \dots, q_k$ takie, że
$$G \simeq \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_k}.$$

Zadania

(I) Dla danej grupy G znajdowanie liczb $q_1, \dots, q_k$.

(II) Dla danej grupy G znajdowanie liczby $m_1, \dots, m_l$ takich, że
$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_l}$$
oraz $1 < m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_l$.

(III) Dla danej liczby n znaleźć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe o n elementach.

Zadania (I) i (II) dla $G = \mathbb{Z}_m$

Zadanie (I)

Stosujemy Chińskie Twierdzenie o Resztach.
Dokładniej, jeśli
$$m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$$
dla parami różnych liczby pierwszych $p_1, \ldots, p_k$ oraz dodatnich liczb całkowitych $l_1, \ldots, l_k$, to
$$\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \mathbb{Z}_{q_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_k},$$
gdzie
$$q_1 := p_1^{l_1}, \qquad q_2 := p_2^{l_2}, \qquad \ldots, \qquad q_k := p_k^{l_k},$$

Zadanie (II)

Trywialnie, $m_1 := m$.

Zadanie (I) dla $\mathbb{Z}_m^\times$

Metoda

(1) Chińskie Twierdzenie o Resztach dla $\mathbb{Z}_m^\times$ (otrzymujemy sumę grup postaci $\mathbb{Z}_q^\times$, gdzie q jest potęgą liczby pierwszej).

(2) Reguły dla grup $\mathbb{Z}_q^\times$ otrzymanych w kroku 1 (otrzymujemy sumę grup postaci $\mathbb{Z}_n$).

(3) Chińskie Twierdzenie o Resztach, czyli metoda z poprzedniego slajdu, dla grup $\mathbb{Z}_n$ otrzymanych w kroku 2.

Krok 1

Jeśli $m = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$ dla parami różnych liczby pierwszych $p_1, \ldots, p_k$ oraz dodatnich liczb całkowitych $l_1, \ldots, l_k$, to

$$\mathbb{Z}_m^\times \simeq \mathbb{Z}_{q_1}^\times \oplus \mathbb{Z}_{q_2}^\times \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_k}^\times,$$

gdzie $q_1 := p_1^{l_1}$, $q_2 := p_2^{l_2}$, $\ldots$, $q_k := p_k^{l_k}$.

Krok 2

Jeśli $q = p^l$ dla liczby pierwszej p oraz dodatniej liczby całkowitej l, to

$$\mathbb{Z}_q^\times \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_{(p-1)p^{l-1}} & \text{gdy } p > 2, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^{l-2}} & \text{gdy } p = 2 \text{ i } l > 2, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{gdy } p = 2 \text{ i } l = 2. \end{cases}$$

Gdy $q = 2$ (tj. $p = 2$ i $l = 1$), to $\mathbb{Z}_q^\times \simeq \mathbb{Z}_1$, a więc ją pomijamy.

Krok 1.

Ponieważ
$$810000 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4,$$
więc
$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{2^4}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_{3^4}^{\times} \oplus \mathbb{Z}_{5^4}^{\times}.$$

Krok 2.

Mamy izomorfizmy
$$\mathbb{Z}_{2^4}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2}, \qquad \mathbb{Z}_{3^4}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{2\cdot 3^3}, \qquad \mathbb{Z}_{5^4}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_{4\cdot 5^3},$$
więc
$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2\cdot 3^3} \oplus \mathbb{Z}_{4\cdot 5^3}.$$

Krok 3.

Mamy izomorfizmy
$$\mathbb{Z}_{2\cdot 3^3} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^3} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{Z}_{4\cdot 5^3} \simeq \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{5^3},$$
więc
$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{3^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{5^3}.$$

Zadanie (II) dla $\mathbb{Z}_m^\times$

Metoda

(1) Chińskie Twierdzenie o Resztach dla $\mathbb{Z}_m^\times$ (otrzymujemy sumę grup postaci $\mathbb{Z}_q^\times$, gdzie q jest potęgą liczby pierwszej).

[Jak w Zadaniu (I)]

(2) Reguły dla grup $\mathbb{Z}_q^\times$ otrzymanych w kroku 1 (otrzymujemy sumę grup postaci $\mathbb{Z}_n$).

[Jak w Zadaniu (I)]

(3) Redukcja (patrz niżej).

Krok 3

Dane wejściowe:

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}.$$

Dopóki istnieje para indeksów $i < j$ taka, że $m_i \nmid m_j$ oraz $m_j \nmid m_i$, zastępujemy grupy $\mathbb{Z}_{m_i}$ i $\mathbb{Z}_{m_j}$ grupami $\mathbb{Z}_{\mathrm{NWD}(m_i, m_j)}$ oraz $\mathbb{Z}_{\mathrm{NWW}(m_i, m_j)}$ (lub tylko $\mathbb{Z}_{\mathrm{NWW}(m_i, m_j)}$, jeśli $\mathrm{NWD}(m_i, m_j) = 1$).

Na zakończenie porządkujemy uzyskane liczby.

Wiemy już, że

$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{2\cdot 3^3} \oplus \mathbb{Z}_{4\cdot 5^3}.$$

Ponieważ $2^2 \nmid 2 \cdot 3^3$ ani $2 \cdot 3^3 \nmid 2^2$, więc zastępujemy grupy $\mathbb{Z}_{2^2}$ i $\mathbb{Z}_{2\cdot 3^3}$ grupami $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_{2^2\cdot 3^3}$ i otrzymujemy

$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2\cdot 3^3} \oplus \mathbb{Z}_{4\cdot 5^3}.$$

Ponieważ $2^2 \cdot 3^3 \nmid 4 \cdot 5^3$ ani $4 \cdot 5^3 \nmid 2^2 \cdot 3^3$, więc zastępujemy grupy $\mathbb{Z}_{2^2\cdot 3^3}$ i $\mathbb{Z}_{4\cdot 5^3}$ grupami $\mathbb{Z}_{2^2}$ i $\mathbb{Z}_{4\cdot 3^3\cdot 5^3}$ i otrzymujemy

$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_{4\cdot 3^3\cdot 5^3}.$$

Zatem odpowiedź ma postać

$$\mathbb{Z}_{810000}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{13500}.$$

Zadanie (III)

Problem

Znaleźć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe o n elementach.

Metoda

(1) Niech

$$n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_k^{l_k}$$

dla parami różnych liczby pierwszych $p_1, \dots, p_k$ oraz dodatnich liczb całkowitych $l_1, \dots, l_k$.

(2) Dla każdego $i = 1, \dots, k$ znajdujemy wszystkie ciągi $(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_s)$ takie, że

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_s = l_i$,
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_s > 0$.

[Takie ciągi nazywane sa podziałami liczby l_i].

(3) Dla każdego ciągu $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)})$, gdzie $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{s_i}^{(i)})$ jest jednym z podziałów liczby l_i znaleziony w poprzednim kroku, mamy grupę

$$\mathbb{Z}_{p_1^{\lambda_1^{(1)}}} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{p_1^{\lambda_1^{(s_1)}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\lambda_k^{(1)}}} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{p_k^{\lambda_k^{(s_k)}}}.$$

W szczególności liczba grup abelowych o n elementach, to

$$P(l_1) \cdot P(l_2) \cdots P(l_k),$$

gdzie $P(l)$ jest liczbą podziałów liczby l.

Przykład: Grupy abelowe o 200 elementach

Krok 1.

Mamy $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

Krok 2(a).

Mamy następujące podziały liczby 3: (3), $(2,1)$, $(1,1,1)$.

Krok 2(b).

Mamy następujące podziały liczby 2: (2), $(1,1)$.

Krok 3.

Z dokładnością do izomorfizmu mamy następujące grupy o 200 elementach:

$$\mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_{5^2}\,, \qquad \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5\,, \qquad \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}\,,$$

$$\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5\,, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{5^2}\,, \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5\,.$$