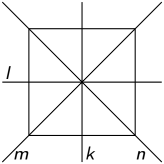
# Dzielniki normalne grupy $D_4$ I

Wiemy, że grupy $D_4$ ma następujące podgrupy:

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle O_{90^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}\}$. ✓
- $\langle O_{180^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$.
- $\langle S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$.
- $\langle S_l \rangle = \{\mathrm{Id}, S_l\}$.
- $\langle S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, S_m\}$.
- $\langle S_n \rangle = \{\mathrm{Id}, S_n\}$.
- $\langle O_{180^\circ}, S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_k, S_l\}$. ✓
- $\langle O_{180^\circ}, S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_m, S_n\}$. ✓
- $D_4 = \langle S_k, S_m \rangle$. ✓

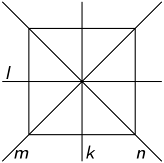



Wiemy, że

- $\{\mathrm{Id}\} \trianglelefteq D_4$;
- $D_4 \trianglelefteq D_4$;
- $\langle O_{90^\circ} \rangle, \langle O_{180^\circ}, S_k \rangle, \langle O_{180^\circ}, S_m \rangle \trianglelefteq D_4$, gdyż są to podgrupy indeksu 2.

# Dzielniki normalne grupy $D_4$ II

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle O_{90^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}\}$. ✓
- $\langle O_{180^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$. ✓
- $\langle S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$. ✗
- $\langle S_l \rangle = \{\mathrm{Id}, S_l\}$. ✗
- $\langle S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, S_m\}$. ✗
- $\langle S_n \rangle = \{\mathrm{Id}, S_n\}$. ✗
- $\langle O_{180^\circ}, S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_k, S_l\}$. ✓
- $\langle O_{180^\circ}, S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_m, S_n\}$. ✓
- $D_4 = \langle S_k, S_m \rangle$. ✓




$\langle O_{180^\circ} \rangle$: [Musimy sprawdzić, czy $ghg^{-1} \in \langle O_{180^\circ} \rangle$ dla $g \in \{S_k, S_m\}$ i $h \in \{O_{180^\circ}\}$]

$S_k \circ O_{180^\circ} \circ S_k^{-1} = S_l \circ S_k = O_{180^\circ} \in \langle O_{180^\circ} \rangle$. ✓
$S_m \circ O_{180^\circ} \circ S_m^{-1} = S_n \circ S_m = O_{180^\circ} \in \langle O_{180^\circ} \rangle$. ✓
Zatem $\langle O_{180^\circ} \rangle \trianglelefteq D_4$.

$\langle S_k \rangle$: [Musimy sprawdzić, czy $ghg^{-1} \in \langle S_k \rangle$ dla $g \in \{S_k, S_m\}$ i $h \in \{S_k\}$]

$S_k \circ S_k \circ S_k^{-1} = S_k \in \langle S_k \rangle$. ✓
$S_m \circ S_k \circ S_m^{-1} = O_{270^\circ} \circ S_m = S_l \notin \langle S_k \rangle$. ✗
Zatem $\langle S_k \rangle \ntrianglelefteq D_4$.
Analogicznie $\langle S_l \rangle, \langle S_m \rangle, \langle S_m \rangle \ntrianglelefteq D_4$.
**Odpowiedź**: Grupa $D_4$ ma 6 dzielników normalnych: ....

# Dzielniki normalne grupy kwaternionów

$$Q = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}, \quad IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J, \quad JI = -K, \quad KJ = -I, \quad IK = -J.$$

Wiemy, że grupy $Q$ ma następujące podgrupy:

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle -\mathrm{Id} \rangle = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle I \rangle = \{\mathrm{Id}, I, -\mathrm{Id}, -I\}$. ✓
- $\langle J \rangle = \{\mathrm{Id}, J, -\mathrm{Id}, -J\}$. ✓
- $\langle K \rangle = \{\mathrm{Id}, K, -\mathrm{Id}, -K\}$. ✓
- $Q = \langle I, J \rangle$. ✓

Wiemy, że

- $\{\mathrm{Id}\} \trianglelefteq Q$;
- $Q \trianglelefteq Q$;
- $\langle I \rangle, \langle J \rangle, \langle K \rangle \trianglelefteq Q$, gdyż są to podgrupy indeksu 2.
- $\langle -\mathrm{Id} \rangle \trianglelefteq Q$, gdyż jest jedyną podgrupą o 2 elementach.

**Odpowiedź**: Grupa $Q$ ma 6 dzielników normalnych: ....

$A_4 = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.
Wiemy, że $A_4$ ma następujące podgrupy:

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle(1,2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$.
- $\langle(1,2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,4), (1,4,2)\}$.
- $\langle(1,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3,4), (1,4,3)\}$.
- $\langle(2,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (2,3,4), (2,4,3)\}$.
- $\langle(1,2)(3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)\}$.
- $\langle(1,3)(2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3)(2,4)\}$.
- $\langle(1,4)(2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4)(2,3)\}$.
- $\langle(1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4)\}$. ✓
- $A_4 = \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$. ✓

Wiemy, że

- $\{\mathrm{Id}\} \trianglelefteq A_4$;
- $A_4 \trianglelefteq A_4$;
- $\langle(1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\rangle$, gdyż jest jedyną podgrupą o 4 elementach.

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle (1,2,3) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$. ✗
- $\langle (1,2,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,4), (1,4,2)\}$. ✗
- $\langle (1,3,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3,4), (1,4,3)\}$. ✗
- $\langle (2,3,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (2,3,4), (2,4,3)\}$. ✗
- $\langle (1,2)(3,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)\}$. ✗
- $\langle (1,3)(2,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3)(2,4)\}$. ✗
- $\langle (1,4)(2,3) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4)(2,3)\}$. ✗
- $\langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4)\}$. ✓
- $A_4 = \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$. ✓

$\langle (1,2,3) \rangle$: [Musimy sprawdzić, czy $ghg^{-1} \in \langle (1,2,3) \rangle$ dla $g \in \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$ i $h \in \{(1,2,3)\}$]

$(1,2,3) \circ (1,2,3) \circ (1,2,3)^{-1} = (1,2,3) \in \langle (1,2,3) \rangle$. ✓
$(1,2)(3,4) \circ (1,2,3) \circ [(1,2)(3,4)]^{-1} = (2,4,3) \circ (1,2)(3,4) = (1,4,2) \notin \langle (1,2,3) \rangle$. ✗
Zatem $\langle (1,2,3) \rangle \ntrianglelefteq A_4$.
Analogicznie $\langle (1,2,4) \rangle, \langle (1,3,4) \rangle, \langle (2,3,4) \rangle \ntrianglelefteq A_4$.

$\langle (1,2)(3,4) \rangle$: [Musimy sprawdzić, czy $ghg^{-1} \in \langle (1,2)(3,4) \rangle$ dla $g \in \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$ i $h \in \{(1,2)(3,4)\}$]

$(1,2,3) \circ (1,2)(3,4) \circ (1,2,3)^{-1} = (1,3,4) \circ (1,3,2) = (1,4)(2,3) \notin \langle (1,2)(3,4) \rangle$. ✗
Zatem $\langle (1,2)(3,4) \rangle \ntrianglelefteq A_4$.
Analogicznie $\langle (1,3)(2,4) \rangle, \langle (1,4)(2,3) \rangle \ntrianglelefteq A_4$.
**Odpowiedź**: Grupa $A_4$ ma 3 dzielniki normalne: ....

# Zadanie 9

**Zadanie**

$[G : H] = 2 \implies H \trianglelefteq G.$

Ponieważ $[G : H] = 2$, więc

$$gH = \begin{cases} H & g \in H, \\ G \setminus H & g \notin H, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad Hg = \begin{cases} H & g \in H, \\ G \setminus H & g \notin H. \end{cases}$$

Zatem $gH = Hg$ dla wszystkich $g \in G$.
Jeśli $g \in G$ i $h \in H$, to istnieje $k \in H$ takie, że $gh = kg$ (ponieważ $gH = Hg$).
Wtedy

$$ghg^{-1} = kgg^{-1} = k \in H. \quad \square$$

# Zadanie 11

## Zadanie

Niech
$$Z(G) := \{a \in G : ag = ga \text{ dla każdego } g \in G\}.$$
Pokazać, że $Z(G) \trianglelefteq G$.

$Z(G) \neq \varnothing$, gdyż $1 \in Z(G)$.
Istotnie,
$$1 \cdot g = g = g \cdot 1,$$
dla każdego $g \in G$.
Jeśli $a, b \in Z(G)$ i $g \in G$, to
$$(ab^{-1}) \cdot g = ab^{-1}gbb^{-1} = ab^{-1}bgb^{-1} = agb^{-1} = g \cdot (ab^{-1}),$$
więc $ab^{-1} \in Z(G)$. □