Dzielniki normalne

Definicja

Podzbiór H nazywamy dzielnikiem normalnym grupy G, jeśli:

(1) H jest podgrupą grupy G;

(2) $ghg^{-1} \in H$ dla wszystkich $h \in H$ i $g \in G$.

W powyższej sytuacji piszemy $H \trianglelefteq G$.

„Metoda” znajdowania dzielników normalnych

(I) Znajdujemy podgrupy grupy G.

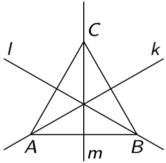
(II) Dla podgrup znalezionych w kroku (I) sprawdzamy warunek (2) z definicji dzielnika normalnego.

Uwagi praktyczne

- Warunek (2) wystarczy sprawdzić dla generatorów grupy G i podgrupy H.
- Warunek (2) jest zawsze spełniony, gdy grupa G jest abelowa.
- Warunek (2) jest spełniony, gdy $H = \{1\}, G$.
- Warunek (2) jest spełniony, gdy $[G : H] = 2$.
- Warunek (2) jest spełniony, gdy nie istnieje podgrupa $H' \neq H$ grupy G taka, że $[G : H'] = [G : H]$.

Wiemy, że grupa D_3 ma następujące podgrupy:

- $\{\mathrm{Id}\}$. ✓
- $\langle O_{120^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ}\}$. ✓
- $\langle S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$. ✗
- $\langle S_l \rangle = \{\mathrm{Id}, S_l\}$. ✗
- $\langle S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, S_m\}$. ✗
- $D_3 = \langle O_{120^\circ}, S_k \rangle$. ✓



Wiemy, że

- $\{\mathrm{Id}\} \trianglelefteq D_3$;
- $D_3 \trianglelefteq D_3$;
- $\langle O_{120^\circ} \rangle \trianglelefteq D_3$, gdyż $[D_3 : \langle O_{120^\circ} \rangle] = 2$.

$\langle S_k \rangle$:

[Musimy sprawdzić, czy $ghg^{-1} \in \langle S_k \rangle$ dla $g \in \{O_{120^\circ}, S_k\}$ i $h \in \{S_k\}$]

$O_{120^\circ} \circ S_k \circ O_{120^\circ}^{-1} = S_m \circ O_{240^\circ} = S_l \notin \langle S_k \rangle$. ✗

Zatem $\langle S_k \rangle \ntrianglelefteq D_3$.

Analogicznie $\langle S_l \rangle \ntrianglelefteq D_3$ i $\langle S_m \rangle \ntrianglelefteq D_3$.

Odpowiedź: Grupa D_3 ma 3 dzielniki normalne: $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\mathrm{Id}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ}\}$ i D_3.