ZESTAW I.
Indukcja matematyczna

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

a) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$,

c) $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$,

d) $2^n > n$,

e) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, dla $x \geqslant -1$.

Podzbiory liczb rzeczywistych

Zadanie 2. Zbadaj ograniczoność następujących zbiorów:

a) $A = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$,

b) $B = \{\sqrt[n]{5} : n \in \mathbb{N}\}$,

c) $C = \{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$,

d) $D = \{x \sin x : x \geqslant 0\}$,

e) $E = \{\sin \frac{1}{x} : x > 0\}$,

f) $F = \{x \sin \frac{1}{x} : x > 0\}$,

g) $G = \{\frac{2n+1}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$,

h) $H = \{\frac{m^2+n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 3. Wykaż, że następujące zbiory są ograniczone i sprawdź czy posiadają element największy i element najmniejszy

a) $A = (0, 2]$,

b) $B = (0, 3) \cup \{5\}$,

c) $C = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$,

d) $D = \{\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}, ...\}$,

e) $E = \{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$,

f) $F = \{\frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\sqrt{3}}{m} : m, n \in \mathbb{N}\}$,

g) $G = \{\frac{n}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$,

h) $H = \{\frac{2n+1}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$,

i) $I = \{x \in \mathbb{R} : ||x-1| - 1| \leqslant 1\}$.

Ciągi liczbowe

Zadanie 4. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu:

a) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n}$,

b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{3-n}{n}$,

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli $c_1 = 3$ i $c_{n+1} = \frac{c_n}{c_n+1}$,

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli $d_1 = 0$, $d_2 = -1$ i $d_{n+2} = d_{n+1} - 2d_n$.

Zadanie 5. Zbadaj ograniczoność ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli:

a) $a_n = \frac{n^2+2n+3}{n^2+1}$,

b) $a_n = \frac{n^3+2n^2+1}{n^2+n+5}$,

c) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$,

d) $a_n = 5 - 2\cos(3n)$,

e) $a_n = \log_3 n$,

f) $a_n = (-1)^n n^2$,

g) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n}$,

h) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.

Zadanie 6. Zbadaj monotoniczność ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli:

a) $a_n = 2n - \frac{1}{2}$,

b) $a_n = 7 - 3n$,

c) $a_n = 50n - n^2$,

d) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$,

e) $a_n = \frac{1}{4^n}$,

f) $a_n = \left(\frac{7}{6}\right)^n$,

g) $a_n = \frac{2^n n!}{n^n}$,

h) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{3}{\sqrt[3]{n+3}}$,

i) $a_n = \frac{3}{\sqrt{2n+1}} - 3n + 5$,

j) $a_n = (-n)^n$.

Zadanie 7. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{2n-1}{n+2}$ spełniają nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$, jeśli:

a) $g = 2$, $\varepsilon = 0,001$

b) $g = 1,5$, $\varepsilon = 0,1$.

Zadanie 8. Korzystając z definicji granicy ciągu uzasadnij, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2n^2-n^3}{n^3+1} = -1$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{n+1} 5 = 0$.

Zadanie 9. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnij, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (2 - 3n) = -\infty$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \sin(3n) = +\infty$.

Zadanie 10. Oblicz granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli:

a) $a_n = \frac{2n^2-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$,

b) $a_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n_1)^2(1-5n)}$,

c) $a_n = \frac{3n^3-5}{2n-1}$,

d) $a_n = \frac{(-0,9)^n}{3n+5}$,

e) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$,

f) $a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1}$,

g) $a_n = 3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 15}$,

h) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}$,

i) $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n^2 + 1}$,

j) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$,

k) $a_n = \frac{2\cdot 3^{2n+2}-10(-2)^{3n}}{5\cdot 9^{n-1}+3\cdot 5^n}$,

l) $a_n = \frac{n^2+7^{n+1}}{8n^5-2\cdot 7^n}$,

m) $a_n = \frac{n!-2^{3n}+n^8}{7\cdot 9^n+5n!}$,

n) $a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$,

o) $a_n = \frac{1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}}{1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$,

p) $a_n = \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$,

q) $a_n = \sqrt[n]{2n^3}$,

r) $a_n = \left(\frac{3^{2n+1}}{n^6}\right)^{\frac{1}{3n}} - \left(\frac{n^5}{2^{3n+1}}\right)^{\frac{1}{2n}}$,

s) $a_n = \frac{\sqrt[n]{5^7}-1}{\sqrt[n]{5^{11}}-1}$.

Zadanie 11. Oblicz granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-3n}$,

b) $a_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$,

c) $a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{5n}$,

d) $a_n = \left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+3n}\right)^{5-3n}$,

e) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n+1}$.

Zadanie 12. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granicę ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli

a) $a_n = \sqrt{3^n + 4^n + 5^n}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^3+3n^2+5}{n^3+2}}$,

c) $a_n = \sqrt[n]{4n^2 + 3n^3 + 2n^4}$,

d) $a_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$,

e) $a_n = \frac{[10^n\pi]}{10^n}$,

f) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots \frac{n}{n^2+n}$,

g) $a_n = \frac{2n^2}{3n^3+4}\cos(5n+6)$,

h) $a_n = \frac{10^n}{n!}$,

i) $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Zadanie 13. Wykaż, że ciągi określone rekurencyjnie są zbieżne i znajdź ich granice

a) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}$,

b) $b_1 = \sqrt{2},\ b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$,

c) $c_1 = 0,\ c_{n+1} = \frac{1+c_n^2}{2}$.

Zadanie 14. Korzystając z twierdzenia Stolza znajdź granice następujących ciągów:

a) $a_n = \frac{\log n}{n}$,

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

c) $a_n = \frac{1^3+3^3+\cdots+(2n+1)^3}{n^4}$.