Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki
87-100 Toruń, ul. Chopina 12/18

Własności spektralne układów dynamicznych

Krzysztof Frączek

Toruń 1998

Praca doktorska wykonana
w Zakładzie Teorii Ergodycznej i Układów Dynamicznych
Wydziału Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Promotor: dr hab. Mariusz Lemańczyk
prof. nadzw. UMK

Spis treści

Wstęp

Przedstawiona rozprawa dotyczy zarówno pewnych ogólnych zagadnień spektralnych teorii ergodycznej (rozdziały 2 i 6), jak i dokładnej analizy spektralnej wybranej klasy przykładów (rozdziały 3 i 4 oraz dodatek i, w mniejszym stopniu, rozdział 5).

Klasyfikacja spektralna reprezentacji unitarnych przeliczalnej, dyskretnej grupy abelowej $\mathbb{G}$ (w przypadku $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, operatorów unitarnych) ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest dobrze znana i sprowadza się do wyliczenia dwóch niezmienników: maksymalnego typu spektralnego σ, tzn. pewnej skończonej miary borelowskiej na grupie dualnej $\widehat{\mathbb{G}}$ (w przypadku $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, na okręgu jednostkowym $\mathbb{T}$) oraz funkcji borelowskiej

$$M : \widehat{\mathbb{G}} \to \{1, 2, ..., \infty\}$$

określonej σ–prawie wszędzie, tzw. funkcji krotności spektralnej (w przypadku $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, M jest określona na $\mathbb{T}$). Mając zadane mierzalne i zachowujące miarę działanie $(\boldsymbol{T}_g)_{g \in \mathbb{G}}$ grupy $\mathbb{G}$ na przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathcal{B}, \mu)$, przechodzi się do jej reprezentacji Koopmana

$$\mathbb{G} \ni g \longmapsto U_g^{\boldsymbol{T}} : L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu)$$

danej wzorem

$$U_g^{\boldsymbol{T}} f(x) = f(\boldsymbol{T}_g x),$$

gdzie $L_0^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ funkcji o całce zero. Wówczas zagadnienie unitarnej klasyfikacji reprezentacji Koopmana sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, jakie pary (σ, M) pochodzą od działań ergodycznych. Ten klasyczny problem teorii ergodycznej pozostaje ciągle otwarty. Jego najbardziej znanym przypadkiem szczególnym jest tzw. problem Banacha: czy para $(\lambda, 1)$ ma realizację ergodyczną, gdzie λ jest miarą Haara grupy $\widehat{\mathbb{G}}$ (historycznie problem Banacha został sformułowany dla działania grupy $\mathbb{Z}$).

W słabszej wersji problem Banacha pojawił się w pracy H. Helsona i W. Parry'ego [23] w 1978 roku jako pytanie, czy możliwa jest skończona krotność składowej Lebesgue'a. Ta słabsza wersja problemu Banacha doczekała się częściowej odpowiedzi pozytywnej dla działania grupy $\mathbb{Z}$ w pracach J. Mathewiego, M.G. Nadkarniego [42], O.N. Agiejewa [1] i M. Lemańczyka [37], gdzie podano konstrukcje, w których składowa Lebesgue'a przyjmuje dowolną krotność parzystą. Wynik ten został niedawno uogólniony przez I. Filipowicz [8] na działanie grupy $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$. Dodajmy, że M. Guenais, w pracy [20] z 1997 roku, podaje przykład grupy torsyjnej oraz jej działania ergodycznego, którego składowa Haara ma krotność 1.

Inną osłabioną wersję problemu klasyfikacji spektralnej jest pytanie o możliwy zbiór istotnych wartości funkcji M. Ten problem został w dużej mierze rozwiązany w pracy Jakuba Kwiatkowskiego i M. Lemańczyka [36] z 1993 roku, gdzie dla zadanego podzbioru

$$A \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \ 1 \in A$$

skonstruowano automorfizm ergodyczny (słabo mieszający), dla którego zbiór istotnych wartości funkcji M jest równy A (praca [36] była poprzedzona serią prac E.A. Robinsona [48, 49] oraz pracą G.R. Goodsona, Jana Kwiatkowskiego, M. Lemańczyka i P. Liardeta [17], w których rozważano mniej ogólne zbiory). Wynik z pracy [36] został uogólniony przez I. Filipowicz [8] na działania grupy $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$.

Rozdział 2 prezentowanej rozprawy dotyczy właśnie ogólnego zagadnienia klasyfikacji spektralnej reprezentacji ergodycznych. Jednak nasze podejście do tego problemu jest inne. Wprowadzamy nową relację równoważności reprezentacji unitarnych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta, tzw. cykliczną równoważność (można rozpatrywać to pojęcie jako spektralny odpowiednik orbitalnej równoważności działań mierzalnych, patrz [7]).
Główne twierdzenie tego rozdziału stanowi, że całkowitym zbiorem niezmienników cyklicznej równoważności jest w zasadzie zbiór istotnych wartości funkcji krotności spektralnej. To pozwala nam użyć rezultatu z [36] dla stwierdzenia, że operator unitarny z ciągłym widmem, dla którego 1 jest istotną wartością funkcji krotności spektralnej jest cyklicznie równoważny pewnemu automorfizmowi słabo mieszającemu. Wiadomości na temat teorii reprezentacji grup abelowych, lokalnie zwartych, wykorzystane w tym rozdziale, zaczerpnięte są z książki [25]. Wyniki rozdziału 2 (w wersji $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$) zostały opublikowane w [10].

Dodajmy, że wszystkie konstrukcje, które pojawiły się w cytowanych powyżej pracach były tzw. grupowymi rozszerzeniami, najczęściej obrotów na grupach zwartych. Konstrukcje te sprowadzały się do znalezienia zależności między własnościami kocyklu i stowarzyszonego z nim rozszerzenia oraz budowy kocyklu spełniającego daną własność. Rozdział 1, napisany na podstawie książek [38, 45] oraz artykułu [22], stanowi wstęp do teorii reprezentacji unitarnych danych przez kocykle.

Klasa rozszerzeń grupowych obrotów na grupach zwartych wzbudza ostatnio duże zainteresowanie. Szczególnie ważnym przykładem są tzw. skośne produkty Anzaia [3], tzn. automorfizmy dwuwymiarowego torusa (zachowujące miarę Lebesgue'a), dane wzorem

$$T_\varphi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T} \times \mathbb{T}, \ \ T_\varphi(z, \omega) = (e^{2\pi i \alpha} z, \varphi(z)\omega),$$

gdzie α jest liczbę rzeczywistą niewymierną, zaś $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ funkcją mierzalną. Szczególnie ważne stało się badanie produktów Anzaia przy założeniu pewnej regularności funkcji φ. Wspomnijmy tu klasyczny rezultat Furstenberga [15] z 1961 roku, z którego wynikało, że jeśli φ jest funkcją Lipschitza homotopijnie nietrywialną, to automorfizm T_φ jest ergodyczny.
Operator U^{T_φ} obcięty do przestrzeni $L^2(dz)$, funkcji całkowalnych z kwadratem zależnych tylko od pierwszej współrzędnej, jest unitarnie równoważny operatorowi U^T, zatem ze spektralnego punktu widzenia interesujące jest tylko działanie operatora U^{T_φ} na przestrzeni $L^2(dz)^\perp$.
Innym klasycznym rezultatem dotyczącym skośnych produktów jest twierdzenie Kusznirenki ([35] lub [6] str.344), które ciągle przy założeniu homotopijnej nietrywialności $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ i dodatkowym (dość nienaturalnym) założeniu na pochodną φ mówi, że automorfizm T_φ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na $L^2(dz)^\perp$. Uogólnienie twierdzenia Kusznirenki znajduje się w pracy A. Iwanika, M. Lemańczyka, D. Rudolpha [30], gdzie przy założeniu, że φ jest funkcją absolutnie ciągłą, zaś pochodna $D\varphi$ ma wahanie ograniczone, pokazuje się, że T_φ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na $L^2(dz)^\perp$.

Uogólnieniem nietrywialności homotopijnej (stopień topologiczny φ różny od zera) w przypadku funkcji kawałkami absolutnie ciągłej jest warunek, że suma skoków funkcji jest różna od zera. Założenie, że suma skoków jest niezerowa, pozwala na użycie twierdzenia ergodycznego dla pochodnej funkcji, której całka nie znika. Ta własność była kluczowa w dowodach zawartych w [6, 30, 35]. Wykorzystując tę własność można także pokazać, że jeśli φ jest funkcją kawałkami absolutnie ciągła z niezerową sumą skoków, to T_φ ma ciągłe widmo na $L^2(dz)^\perp$. Sytuacja jest zupełnie inna, gdy suma skoków jest zero. Wówczas twierdzenie ergodyczne zastosowane dla funkcji pochodnej nie wnosi niczego istotnego i potrzebne są inne metody. W tej klasie funkcji nie istnieje ogólne twierdzenie klasyfikujące spektralnie odpowiadające produkty skośne. Zauważmy, że istnieją kocykle z sumą skoków zero, które nie są ergodyczne, chociażby $\mathbf{1}_{[0,k\alpha)}$ dla $k \in \mathbb{N}$. A. Iwanik w [27] (przy pomocy teorii aproksymacji) pokazał, że funkcje, dla których T_φ ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L^2(dz)^\perp$, stanowią zbiór rezydualny w przestrzeni

funkcji klasy C^r $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\})$ o zerowym stopniu topologicznym, gdy liczba α spełnia pewien warunek diofantyczny.
Rozdział 4 dotyczy problemu ergodyczności kocykli kawałkami absolutnie ciągłych z sumą skoków zero. Główny rezultat tego rozdziału mówi, że o ile przynajmniej jeden ze skoków jest niewymierny, to dla większości takich funkcji produkt skośny T_φ ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L^2(dz)^\perp$, gdy liczba α spełnia pewien warunek diofantyczny.

Rozdział 3 zawiera analizę własności spektralnych rozszerzeń $\mathbb{Z}^d$–obrotów na d–wymiarowym torusie, $d \geqslant 2$, tzn. $\mathbb{Z}^d$–działań postaci

$$\boldsymbol{T}_\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^{d+1} \to \mathbb{T}^{d+1},\ (\boldsymbol{T}_\phi)_{(\boldsymbol{m})}(\boldsymbol{z}, \omega) = (\Phi(\boldsymbol{m})\,\boldsymbol{z}, \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})\omega),$$

gdzie $\Phi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{T}^d$ jest homomorfizmem grupowym, zaś $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{T}^d$, $\omega \in \mathbb{T}$. Ponadto, $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ jest kocyklem, czyli

$$\phi_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{z}) = \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{z})\phi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{z})$$

dla każdego $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$. W rozdziale tym zostało wprowadzone pojęcie macierzy kręcenia $A(\phi)$ kocyklu ciągłego ϕ, które jest uogólnieniem stopnia topologicznego odwzorowania okręgu.
Interesującym problemem jest, czy tak jak w przypadku $d = 1$ (omówiony powyżej rezultat z pracy [30]), jeśli ϕ jest gładkim kocyklem oraz $\det A(\phi) \neq 0$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na przestrzeni $L_d^{2\perp}$ ortogonalnej do przestrzeni funkcji zależnych tylko od pierwszych d współrzędnych. Jedną z częściowych odpowiedzi zawartych w tym rozdziale jest twierdzenie mówiące, że dla kocykli ϕ klasy C^1 rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ jest mieszające na $L_d^{2\perp}$, a zatem i ergodyczne. Jednak okazuje się, że uzyskanie widma Lebesgue'a dla $d \geqslant 2$ nie łatwe, gdyż argumenty z dowodu w przypadku $d = 1$, wykorzystujące twierdzenie ergodyczne dla pochodnych ϕ tym razem zawodzą. Dla uzyskania widma Lebesgue'a wprowadzamy pojęcie $\mathbb{Z}^d$–obrotu skończonego typu, tzn. obrotu, który jest wolno aproksymowany przez obroty wymierne. Głównym rezultatem tego rozdziału jest twierdzenie stanowiące, że w przypadku $d = 2$, jeśli $\boldsymbol{T}$ jest obrotem skończonego typu, ϕ jest klasy C^4 oraz $\det A(\phi) \neq 0$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma przeliczalne widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na przestrzeni $L_d^{2\perp}$. Wiadomości na temat diofantycznych aproksymacji na torusie zostały zaczerpnięte z książki [34]. Rezultaty przedstawione w rozdziale 3 są zawarte w pracy [12].

Rozdział 5 jest związany z badaniem ergodyczności tzw. potoków cylindrycznych, czyli automorfizmów cylindra $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ postaci

$$T_f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \;\; T_f(x, y) = (x + \alpha, y + f(x)),$$

gdzie α jest liczbą rzeczywistą niewymierną, zaś $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funkcją mierzalną o całce zero. Produkt skośny T_f tym razem zachowuje miarę nieskończoną, a jego ergodyczność oznacza, że dla dowolnego zbioru niezmienniczego albo on sam, albo jego uzupełnienie ma miarę zero. Podstawowe wiadomości na temat własności ergodycznych potoków cylindrycznych są zaczerpnięte z książki [50].

Znany rezultat D. Paska z pracy [46] stanowi, że na to, aby potok cylindryczny T_f był ergodyczny wystarczy, żeby funkcja f była kawałkami absolutnie ciągła z niezerową sumą skoków. Natomiast niedawno M. Lemańczyk, F. Parreau, D. Volný [40] udowodnili, że klasa funkcji rozpatrywana w [46] posiada własność stabilności ergodycznej w przestrzeni funkcji o wahaniu ograniczonym o całce zero. Dla liczb α spełniających pewien warunek diofantyczny D. Pask w [47] pokazał, że jeśli funkcja f jest k-razy różniczkowalna oraz $D^k f$ jest funkcją kawałkami absolutnie ciągłą o niezerowej sumie skoków, to T_f jest również potokiem ergodycznym. Przypomnijmy, że prace [40, 46, 47] bazowały na tym, że suma skoków pewnej funkcji kawałkami absolutni ciągłej była niezerowa, co pozwalało na wykorzystanie twierdzenia ergodycznego dla odpowiedniej pochodnej, której całka była niezerowa. W rozdziale 5, w odróżnieniu od poprzedniej sytuacji, będziemy rozważać przypadek, gdy suma skoków pewnej pochodnej φ jest równa zero. Wówczas, tak jak w przypadku skośnych produktów Anzaia, nie ma ogólnego twierdzenia opisującego własności ergodyczne.
Główny rezultat rozdziału 5 stwierdza, że dla liczb α spełniających pewien warunek diofantyczny, jeśli funkcja f jest k-razy różniczkowalna oraz $D^k f$ jest funkcją kawałkami absolutnie ciągła z sumą skoków zero, to, o ile punkty nieciągłości są odpowiednio dobre, T_f jest potokiem ergodycznym. Ponadto, klasa funkcji rozważana w rozdziale 5 spełnia własność stabilności ergodycznej w przestrzeni funkcji k-razy różniczkowalnych z całką zero, których k-ta pochodna ma wahanie ograniczone. Wyniki przedstawione w rozdziale 5 są zawarte w pracy [14].

W rozdziale 6 wracamy do pewnych ogólnych rozważań, na temat teorii spektralnej. Związane one są z klasycznym twierdzeniem Aleksiejewa [2], które mówi, że dla dowolnego operatora unitarnego na przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ istnieje funkcja ograniczona, realizująca maksymalny typ spektralny operatora. W.M. Aleksiejew w [2] postawił również następujące pytanie: czy dowolny typ spektralny jest realizowany przez funkcję ograniczoną? Odpowiedź negatywna na tak sformułowane pytanie jest dobrze znana, przykładem są operatory pochodzące od układów Gaussa z widmem prostym (teoria układów gaussowskich jest zawarta w rozdziale 14 książki [6]). Natomiast interesującym problemem wydaje się być charakteryzacja typów, które są realizowane przez funkcje ograniczone. Wiadomo, że dla układów ergodycznych z widmem dyskretnym (obrotów na grupach zwartych) każdy typ jest realizowany przez funkcje ograniczone. W rozdziale 6 pokażemy, że dla rozszerzeń grupowych obrotów każdy typ z ciągu spektralnego jest realizowany przez funkcje ograniczone. Ponadto, w sytuacji ogólnej, spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jak regularne są funkcje realizujące maksymalny typ spektralny. ściśle rzecz biorąc, na przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będziemy narzucać założenia struktury rozmaitości różniczkowej i zbadamy, jak gładkie są funkcje realizujące maksymalny typ spektralny. Rezultaty dotyczące problemu regularności funkcji realizującej maksymalny typ spektralny są opublikowane w pracy [11].

Tematyka dodatku A jest związana z pytaniem A. Iwanika: jakie krotności spektralne są realizowane przez skośne produkty Anzaia. łatwo pokazać, że zbiory $\{1\}$ i $\{1, \infty\}$ są realizowane. Z ogólnej metody konstruowania kocyklu wyznaczającego automorfizm o zadanym zbiorze wartości krotności ([36]) wynika, że i zbiór $\{1, 2\}$ jest realizowany w klasie skośnych produktów Anzaia.

W dodatku A rozważamy skośne produkty w przypadku, gdy $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest funkcją absolutnie ciągłą, a jej pochodna jest funkcją kawałkami absolutnie ciągła z dwoma punktami nieciągłości i sumą skoków zero. Głównym rezultatem jest twierdzenie mówiące, że dla większości rozważnych funkcji skośny produkt T_φ ma widmo singularne i ciągłe na $L^2(dz)^\perp$ oraz maksymalna krotność spektralna jest co najwyżej 2. Ponadto, wśród rozważnych produktów skośnych są zarówno automorfizmy z widmem prostym, jak i z maksymalną krotnością spektralną równą 2.

1 Definicje i elementarne wiadomości

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie standardową probabilistyczną przestrzenią borelowską. Przez $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ oznaczmy grupę *automorfizmów* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *zachowujących miarę*, w skrócie grupę automorfizmów, tzn. $S \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$, jeśli

- odwzorowanie $S : X \to X$ jest odwracalne μ-p.w.,
- $S^{-1}\mathcal{B} = S\mathcal{B} = \mathcal{B}$,
- $\mu(S^{-1}A) = \mu(A) = \mu(SA)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}$.

Niech $\mathbb{G}$ będzie przeliczalną (dyskretną) grupą abelową. $\mathbb{G}$-*działaniem* na przestrzeni $(X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywamy dowolną reprezentację grupy $\mathbb{G}$ w grupie $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$, tzn. dowolne odwzorowanie $\boldsymbol{T} : \mathbb{G} \times X \to X$, dla którego oznaczając $\boldsymbol{T}_g(\cdot) = \boldsymbol{T}(g, \cdot)$ mamy

- $\boldsymbol{T}_g \in \mathrm{Aut}(X, \mathcal{B}, \mu)$ dla dowolnego $g \in \mathbb{G}$,
- $\boldsymbol{T}_{g_1 g_2} x = \boldsymbol{T}_{g_1} \boldsymbol{T}_{g_2} x$ dla dowolnych $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$,
- $\boldsymbol{T}_e x = x$

(dwie ostatnie równości zachodzą na zbiorach pełnej miary).

Najprostszą sytuację otrzymujemy, gdy $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$. Wówczas pojedynczy automorfizm $\boldsymbol{T}_1$ generuje działanie całej grupy liczb całkowitych. W przypadku grupy $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$ działanie generują komutujące ze sobą automorfizmy $T_i = \boldsymbol{T}_{(0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0)}$ dla $i = 1, \ldots, d$.

Definicja 1.1 Mówimy, że działanie $\boldsymbol{T}$ jest *ergodyczne,* gdy dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$ spełniającego warunek $\mu(\boldsymbol{T}_g A \triangle A)$=0 dla wszystkich $g \in \mathbb{G}$ albo $\mu(A) = 0$, albo $\mu(A) = 1$.

Definicja 1.2 Mówimy, że działanie $\boldsymbol{T}$ jest *wolne,* gdy

$$\mu(\{x \in X; \boldsymbol{T}_g x = x\}) = 0$$

dla wszystkich $g \in \mathbb{G}$, $g \neq e$.

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ będą dowolnymi przestrzeniami z miarami oraz niech $f : X \to Y$ będzie funkcją mierzalną. Przez $f_*\mu$ będziemy oznaczać miarę na przestrzeni $(Y, \mathcal{C})$ określoną wzorem $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}A)$ dla $A \in \mathcal{C}$. Załóżmy, że $(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ są standardowymi przestrzeniami borelowskimi z miarami skończonymi. Odwzorowanie $S : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{C}, \nu)$ nazywamy izomorfizmem *niesingularnym*, jeśli

- odwzorowanie $S : X \to Y$ jest odwracalne p.w.,

- $S^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{B}$ oraz $S\mathcal{B} = \mathcal{C}$,

- miary ν oraz $S_*\mu$ są równoważne.

Dla dowolnego izomorfizmu niesingularnego $S : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{C}, \nu)$ rozważmy odwzorowanie $\Phi : (\mathcal{C}, \nu) \to (\mathcal{B}, \mu)$ dane wzorem

$$\Phi(A) = S^{-1}(A)$$

dla $A \in \mathcal{C}$. Wówczas Φ spełnia następujące warunki:

(i) odwzorowanie $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ jest odwracalne,

(ii) $\Phi(A_1 \cap A_2) = \Phi(A_1) \cap \Phi(A_2)$ dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$,

(iii) $\Phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$ dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, ... \in \mathcal{C}$,

(iv) $\mu(\Phi(A)) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu(A) = 0$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{C}$.

Dowolne odwzorowanie $\Phi : (\mathcal{C}, \nu) \to (\mathcal{B}, \mu)$ spełniające warunki (i),(ii),(iii) oraz (iv) nazywamy izomorfizmem *σ-boolowskim*. Między izomorfizmami σ-boolowskimi i izomorfizmami niesingularnym istnieje ścisła zależność. Dla dowolnego izomorfizmu σ-boolowskiego $\Phi : (\mathcal{C}, \nu) \to (\mathcal{B}, \mu)$ istnieje izomorfizm niesingularny $S : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{C}, \nu)$ taki, że $\Phi(A) = S^{-1}(A)$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{C}$.

Badając własności dynamiczne działania grupy $\mathbb{G}$, często rozpatruje się związaną z tym działaniem reprezentację unitarną (Koopmana) grupy $\mathbb{G}$ w ośrodkowej przestrzeni Hilberta $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, funkcji całkowalnych z kwadratem, daną wzorem

$$U_g^{\boldsymbol{T}} f(x) = f(\boldsymbol{T}_g x),$$

gdzie $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Część własności dynamicznych działania można przetłumaczyć na własności reprezentacji Koopmana związanej z działaniem, np. $\boldsymbol{T}$ jest działaniem ergodycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jedynymi funkcjami niezmienniczymi reprezentacji są funkcji stałe, tzn. jeśli $U_g^{\boldsymbol{T}} f = f$ dla każdego $g \in \mathbb{G}$, to $f = c$ μ-p.w..

Uwaga. Pisząc równość pomiędzy zbiorami, funkcjami, ciałami zbiorów zazwyczaj będziemy ją rozumieć jako równość z dokładnością do zbiorów miary zero.

W przypadku, gdy $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, reprezentacja $U^{\boldsymbol{T}}$ generowana jest przez pojedynczy operator unitarny $U_1^{\boldsymbol{T}}$.

W rozprawie będziemy badać własności spektralne reprezentacji unitarnych pochodzących od $\mathbb{G}$-działań.

1.1 Teoria spektralna reprezentacji zadanych przez kocykle

Niech $\mathcal{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta. Przez $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ oznaczamy grupę operatorów unitarnych przestrzeni $\mathcal{H}$. Niech $U : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ będzie reprezentacją grupy $\mathbb{G}$ w przestrzeni $\mathcal{H}$. Charakter $\gamma \in \widehat{\mathbb{G}}$ nazywamy *wartością własną* reprezentacji U, jeśli istnieje niezerowy element $f \in \mathcal{H}$ taki, że

$$U_g f = \gamma(g) f$$

dla każdego $g \in \mathbb{G}$. Zbiór wszyskich wartości własnych reprezentacji U oznaczmy przez $\mathrm{Sp}(U)$. Dla dowolnego elementu $f \in \mathcal{H}$ niech

$$\mathbb{G}(f) = \mathrm{span}\{U_g f; g \in \mathbb{G}\}$$

będzie *przestrzenią cykliczną* generowaną przez f, czyli najmniejszą domkniętą przestrzenią niezmienniczą zawierającą f. Korzystając z twierdzenia Bochnera-Herglotza (patrz [25] tom 2, str.160) możemy zdefniować *miarę spektralną* σ_f elementu $f \in \mathcal{H}$ jako jedyną miarę borelowską na grupie $\widehat{\mathbb{G}}$ dualnej do $\mathbb{G}$ taką, że

$$\int_{\widehat{\mathbb{G}}} \gamma(g) d\sigma_f(\gamma) = (U_g f, f)$$

dla każdego $g \in \mathbb{G}$.

W dalszej części pracy będziemy potrzebowali następujących twierdzeń dotyczących spektralnego rozkładu reprezentacji unitarnych, które są łatwym przeniesieniem znanych rezultatów dla $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, patrz np. [38], [45].

Lemat 1.1 *Niech* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem elementów* $\mathcal{H}$ *takim, że* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *oraz* $\sigma_{f_m} \perp \sigma_{f_n}$ *dla* $m \neq n$. *Wówczas*

$$\mathbb{G}(f) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n) \text{ oraz } \sigma_f = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{f_n}.$$

Lemat 1.2 *Reprezentacja unitarna* $U : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathbb{G}(f))$ *jest unitarnie równoważna reprezentacji* $M : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_f))$ *danej wzorem*

$$M_g f(\chi) = \chi(g) f(\chi).$$

Lemat 1.3 *Niech* ν *będzie borelowską miarą na* $\widehat{\mathbb{G}}$ *dodatnią i skończoną. Wówczas*

$$\{f \in \mathcal{H}; \sigma_f \ll \nu\} \text{ oraz } \{f \in \mathcal{H}; \sigma_f \perp \nu\}$$

są domkniętymi przestrzeniami liniowymi U*-niezmienniczymi.*

Twierdzenie 1.4 (twierdzenie spektralne) *Istnieje ciąg* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *w* $\mathcal{H}$ *taki, że*

$$\mathcal{H} = \textstyle\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n) \quad \text{oraz} \quad \sigma_{f_1} \gg \sigma_{f_2} \gg \ldots .$$

Ponadto, dla dowolnego ciągu $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ *elementów* $\mathcal{H}$ *spełniającego powyższe dwa warunki, mamy* $\sigma_{f_n} \equiv \sigma_{f_n'}$ *dla każdego naturalnego* n.

Twierdzenie 1.5 *Niech* $U^{(i)}$ *będzie reprezentacją unitarną grupy* $\mathbb{G}$ *w ośrodkowej przestrzeni Hilberta* $\mathcal{H}^{(i)}$ *oraz niech*

$$\mathcal{H}^{(i)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n^{(i)}),\ \sigma_{f_1^{(i)}} \gg \sigma_{f_2^{(i)}} \gg \ldots$$

będzie rozkładem spektralnym reprezentacji $U^{(i)}$, $i = 1, 2$. *Wówczas reprezentacje* $U^{(1)}$ *i* $U^{(2)}$ *są unitarnie izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sigma_{f_n^{(1)}} \equiv \sigma_{f_n^{(2)}}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$.

Maksymalnym typem spektralnym reprezentacji $U : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ będziemy nazywali typ spektralny miary σ_{f_1}, tzn. klasę miar równoważnych mierze σ_{f_1}. Natomiast ciąg typów miar $\sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}, \ldots$ nazywamy *ciągiem spektralnym* reprezentacji U.

Funkcją krotności spektralnej reprezentacji U będziemy nazywać funkcję borelowską

$$M_U : (\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_{f_1}) \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\ M_U(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(\chi),$$

gdzie $A_1 = \widehat{\mathbb{G}}$ oraz $A_n = A_n(U) = \{\chi \in \widehat{\mathbb{G}}; \frac{d\sigma_{f_n}}{d\sigma_{f_1}}(\chi) > 0\}$. Wówczas

$$\widehat{\mathbb{G}} = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots .$$

Zbiór

$$E(U) = \{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}; \sigma_{f_1}\{\chi \in \widehat{\mathbb{G}}; M_U(\chi) = n\} > 0\}$$

nazywamy zbiorem *istotnych wartości* funkcji krotności spektralnej M_U.

Uwaga. Bezpośrednio z przyjętych definicji łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} n \in E(U) \cap \mathbb{N} &\iff \sigma_{f_n} \not\equiv \sigma_{f_{n+1}}, \\ \infty \in E(U) &\iff \exists_{\sigma \neq 0} \forall_{n \in \mathbb{N}}\, \sigma_{f_n} \gg \sigma. \end{aligned}$$

Kres górny zbioru $E(U)$ będziemy nazywać *maksymalną krotnością spektralną* reprezentacji U.

Niech $\sigma \neq 0$ będzie dowolną miarą absolutnie ciągłą względem maksymalnego typu spektralnego ν reprezentacji U. Ciąg $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}$ nazywamy maksymalnym dla σ, jeśli $\mathbb{G}(f_i) \perp \mathbb{G}(f_j)$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma_{f_i} = \sigma$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz w przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{G}(f_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{G}(f_n))^{\perp}$ nie ma elementu, którego miara spektralna jest równa σ.

Lemat 1.6 *Dowolne dwa ciągi maksymalne dla σ mają tę samą długość.*

Krotnością miary σ nazywamy długość maksymalnego ciągu dla σ.

Lemat 1.7 *Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wówczas $n \in E(U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara $\sigma \neq 0$ absolutnie ciągłą względem maksymalnego typu spektralnego, której krotność jest równa n.*

Będziemy mówili, że

- U ma *widmo Haara (dyskretne, singularne ciągłe)*, jeśli miara σ_{f_1} jest równoważna mierze Haara λ grupy $\widehat{\mathbb{G}}$ (dyskretnej, ciągłej singularnej względem miary Haara);

- U ma *widmo jednorodne o krotności* k, jeśli $E(U) = \{k\}$, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- U ma *widmo proste*, gdy $E(U) = \{1\}$.

Jednym z najprostszych przykładów $\mathbb{G}$-działań są $\mathbb{G}$-obroty. Niech X będzie zwartą, metryczną grupą abelową, $\mathcal{B}$ σ–algebrą zbiorów borelowskich na X, zaś μ miarą Haara grupy X. $\mathbb{G}$–*obrotem* na grupie X będziemy nazywać $\mathbb{G}$-działanie na przestrzeni $(X, \mathcal{B}, \mu)$ określone wzorem

$$\boldsymbol{T}_g x = \Phi(g)x,$$

gdzie $\Phi : \mathbb{G} \to X$ jest homomorfizmem grupowym. Naturalnym rozszerzeniem znanego rezultatu dotyczącego $\mathbb{Z}$-obrotów jest następujący:

Lemat 1.8 *$\mathbb{G}$-obrót jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\Phi(\mathbb{G})} = X$. Ponadto, $\mathbb{G}$-obrót jest wolny wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest monomorfizmem.*

Innym przykładem $\mathbb{G}$-działań są rozszerzenia grupowe $\mathbb{G}$-obrotów. Niech H będzie lokalnie zwartą, metryczną grupą abelową, $\mathcal{C}$ σ–algebrą zbiorów borelowskich na H, zaś m miarą Haara grupy H.

Definicja 1.3 *H-kocyklem* $\mathbb{G}$-obrotu $\boldsymbol{T}$ nazywamy mierzalne odwzorowanie $\phi : \mathbb{G} \times X \to H$, dla którego pisząc $\phi_g(\cdot)$ zamiast $\phi(g, \cdot)$ otrzymujemy

$$\phi_{g_1 g_2}(\cdot) = \phi_{g_1}(\boldsymbol{T}_{g_2} \cdot)\, \phi_{g_2}(\cdot)$$

dla dowolnych $g_1, g_2 \in \mathbb{G}$.

Uwaga. Gdy grupy X, H posiadają dodatkowe struktury, np. różniczkowe, to będziemy mówili, że kocykl jest odpowiednio regularny, jeśli dla każdego $g \in \mathbb{G}$ odwzorowanie ϕ_g jest odpowiednio regularne.

W przypadku $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$, kocykl ϕ jest generowany przez funkcję mierzalną ϕ_1 w następujący sposób

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \phi_1(x)\phi_1(\boldsymbol{T}_1 x)...\phi_1(\boldsymbol{T}_1^{n-1} x) & \text{dla} \quad n > 0 \\ e & \text{dla} \quad n = 0 \\ (\phi_1(\boldsymbol{T}_1^{n} x)\phi_1(\boldsymbol{T}_1^{n+1} x)...\phi_1(\boldsymbol{T}_1^{-1} x))^{-1} & \text{dla} \quad n < 0. \end{cases}$$

W dalszym ciągu samą funkcję ϕ_1 będziemy również nazywać kocyklem.

Załóżmy, że H jest zwartą grupą abelową, zaś m jest miarą probabilistyczną. Będziemy rozważać $\mathbb{G}$-działanie

$$\boldsymbol{T}_{\phi} : \mathbb{G} \times (X \times H, \overline{\mathcal{B}}, \mu \times m) \to (X \times H, \overline{\mathcal{B}}, \mu \times m)$$

dane wzorem

$$(\boldsymbol{T}_{\phi})_g(x, h) = (\boldsymbol{T}_g x, \phi_g(x)h),$$

gdzie $\overline{\mathcal{B}}$ jest produktową σ–algebrą. $\mathbb{G}$-działanie $\boldsymbol{T}_{\phi}$ nazywamy H*–rozszerzeniem* działania $\boldsymbol{T}$.

Rozważmy reprezentację unitarną $U^{\boldsymbol{T}_{\phi}}$ grupy $\mathbb{G}$ w przestrzeni $L^2(X \times H, \mu \times m)$ odpowiadającą $\mathbb{G}$-działaniu $\boldsymbol{T}_{\phi}$, tzn.

$$U_g^{\boldsymbol{T}_{\phi}} f(x, h) = f(\boldsymbol{T}_g x, \phi_g(x)h).$$

Korzystając z twierdzenia Petera-Weyla otrzymujemy, że

$$L^2(X \times H, \mu \times m) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{H}} \mathcal{H}_{\chi},$$

gdzie

$$\mathcal{H}_{\chi} = \{f \in L^2(X \times H, \mu \times m); f(x, h) = \xi(x)\chi(h), \xi \in L^2(X, \mu)\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{H}_{\chi}$ są domkniętymi podprzestrzeniami $U^{\boldsymbol{T}_{\phi}}$-niezmienniczymi przestrzeni $L^2(X \times H, \mu \times m)$. Zatem możemy rozpatrywać także reprezentacje $U^{\boldsymbol{T}_{\phi}} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\chi})$.

Lemat 1.9 *Reprezentacja $U^{\boldsymbol{T}_{\phi}} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\chi})$ jest unitarnie izomorficzna reprezentacji $U_{\chi} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ określonej wzorem*

$$((U_{\chi})_g \xi)(x) = \chi(\phi_g(x))\xi(\boldsymbol{T}_g x).$$

Dowód. Zdefiniujmy izomorfizm reprezentacji $V : \mathcal{H}_{\chi} \to L^2(X, \mu)$ kładąc

$$Vf = \xi \text{ dla } f(x, h) = \xi(x)\chi(h).$$

Wówczas V jest izometrią przestrzeni $\mathcal{H}_{\chi}$ na przestrzeń $L^2(X, \mu)$, a ponieważ

$$U_g^{\boldsymbol{T}_{\phi}} f(x, h) = f(\boldsymbol{T}_g x, \phi_g(x)h) = \chi(\phi_g(x))\xi(\boldsymbol{T}_g x)\chi(h)$$

więc

$$(VU_g^{\boldsymbol{T}^\phi} f)(x) = \chi(\phi_g(x))\xi(\boldsymbol{T}_g x) = ((U_\chi)_g \xi)(x) = ((U_\chi)_g Vf)(x).\blacksquare$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{T}$ jest $\mathbb{G}$-obrotem ergodycznym i wolnym. Niech $F : \mathbb{G}\times X \to \mathbb{T}$ będzie $\mathbb{T}$-kocyklem, gdzie $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Rozważmy reprezentację unitarną $U : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ zadaną wzorem

$$(U_g f)(x) = F_g(x) f(\boldsymbol{T}_g x).$$

Zauważmy, że reprezentacje U_χ są reprezentacjami tego typu. Udowodnimy, że reprezentacja U nie może mieć mieszanego widma, tzn. jej widmo jest albo dyskretne, albo singularne ciągłe, albo Haara. W tym celu, rozważmy reprezentację unitarną M grupy dualnej $\widehat{X}$ w przestrzeni $L^2(X, \mu)$ daną wzorem

$$M_\chi f(x) = \chi(x) f(x).$$

Wówczas

$$(U_g M_\chi f)(x) = F_g(x)(M_\chi f)(\boldsymbol{T}_g x) = F_g(x)\chi(\boldsymbol{T}_g x) f(\boldsymbol{T}_g x)$$

oraz

$$(M_\chi U_g f)(x) = \chi(x)(U_g f)(x) = F_g(x)\chi(x) f(\boldsymbol{T}_g x).$$

Zatem

$$U_g M_\chi = \chi(\Phi(g)) M_\chi U_g. \tag{1}$$

Lemat 1.10 (Wienera) *Niech $\mathcal{H}_0 \subseteq L^2(X, \mu)$ będzie domkniętą M-niezmienniczą podprzestrzenią $L^2(X, \mu)$. Wówczas istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}$ taki, że*

$$\mathcal{H}_0 = \mathbf{1}_B L^2(X, \mu) = \{f \in L^2(X, \mu); f \mid B^c = 0\},$$

gdzie $\mathbf{1}_B$ jest funkcją charakterystyczną zbioru B.

Dowód. Niech $1 = f + g$, gdzie $f \in \mathcal{H}_0$, $g \in \mathcal{H}_0^\perp$. Ponieważ $\mathcal{H}_0$ jest przestrzenią niezmienniczą względem reprezentacji M, więc dla każdego $\chi \in \widehat{X}$ mamy $M_\chi f \in \mathcal{H}_0$, a stąd

$$0 = (M_\chi f, g) = \int_X \chi(x) f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Zatem $f(x)\overline{g(x)} = 0$ μ-p.w.. Stąd wynika, że istnieje zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}$ taki, że $f = \mathbf{1}_B$ i $g = \mathbf{1}_{B^c}$.
Postępując analogicznie dla dowolnego $h \in \mathcal{H}_0$ otrzymujemy, że $h \cdot \bar{g} = 0$, skąd $h \in \mathbf{1}_B L^2(X, \mu)$. Zatem $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathbf{1}_B L^2(X, \mu)$ i analogicznie $\mathcal{H}_0^\perp \subseteq \mathbf{1}_{B^c} L^2(X, \mu)$, więc

$$L^2(X, \mu) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp \subseteq \mathbf{1}_B L^2(X, \mu) \oplus \mathbf{1}_{B^c} L^2(X, \mu) = L^2(X, \mu),$$

stąd $\mathcal{H}_0 = \mathbf{1}_B L^2(X, \mu)$. ■

Lemat 1.11 *Jeśli $\mathcal{H}_0$ jest domkniętą podprzestrzenią $L^2(X, \mu)$ niezmienniczą względem reprezentacji M oraz U, to $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ lub $\mathcal{H}_0 = L^2(X, \mu)$.*

Dowód. Na mocy lematu 1.10, $\mathcal{H}_0 = \mathbf{1}_B L^2(X, \mu)$ dla pewnego $B \in \mathcal{B}$. Z U-niezmienniczości przestrzeni $\mathcal{H}_0$ dla dowolnego $g \in \mathbb{G}$ mamy

$$U_g \mathbf{1}_B = F_g \mathbf{1}_{\boldsymbol{T}_g^{-1} B} \in \mathcal{H}_0.$$

Ponieważ $|F_g(x)| = 1$, więc $\boldsymbol{T}_g^{-1} B \subseteq B$. Na mocy ergodyczności $\boldsymbol{T}$ otrzymujemy, że $\mu(B) = 0$ lub $\mu(B) = 1$, a zatem $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ lub $\mathcal{H}_0 = L^2(X, \mu)$. ■

Twierdzenie 1.12 *Maksymalny typ spektralny reprezentacji U jest albo dyskretny, albo ciągły singularny, albo Haara.*

Dowód. Przez $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ oznaczmy zbiory funkcji z $L^2(X, \mu)$, których miary spektralne są odpowiednio dyskretne, ciągłe singularne i absolutnie ciągłe względem miary Haara λ. Na mocy lematu 1.3, każdy ze zbiorów $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ jest domkniętą podprzestrzenią U-niezmienniczą przestrzeni $L^2(X, \mu)$ oraz

$$L^2(X, \mu) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

Dla dowolnych $\chi \in \widehat{X}$, $f \in L^2(X, \mu)$ oraz $g \in \mathbb{G}$ mamy

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{\mathbb{G}}} \gamma(g) d\sigma_{M_\chi f}(\gamma) &= (U_g M_\chi f, M_\chi f) = \chi(\Phi(g))(M_\chi U_g f, M_\chi f) \\
&= \chi(\Phi(g))(U_g f, f) = \int_{\widehat{\mathbb{G}}} (\chi \circ \Phi \cdot \gamma)(g) d\sigma_f(\gamma) \\
&= \int_{\widehat{\mathbb{G}}} \gamma(g) d((R_\chi)_* \sigma_f)(\gamma),
\end{aligned}$$

gdzie

$$R_\chi : \widehat{\mathbb{G}} \to \widehat{\mathbb{G}},\ R_\chi(\gamma) = \widehat{\Phi}(\chi)\gamma = \chi \circ \Phi \cdot \gamma.$$

Zatem $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ są również podprzestrzeniami M-niezmienniczymi. Na mocy lematu 1.11, albo $\mathcal{H}_0 = L^2(X,\mu)$, albo $\mathcal{H}_1 = L^2(X,\mu)$, albo $\mathcal{H}_2 = L^2(X,\mu)$.

Aby zakończyć dowód lematu wystarczy pokazać, że jeśli $\mathcal{H}_2 = L^2(X,\mu)$, to maksymalny typ spektralny σ_f reprezentacji U jest równoważny mierze Haara. Najpierw zauważmy, że $\widehat{\Phi}(\widehat{X})$ jest gęstą podgrupą $\widehat{\mathbb{G}}$. Istotnie, załóżmy, że grupa $\widehat{\Phi}(\widehat{X})$ nie jest gęsta w $\widehat{\mathbb{G}}$. Wówczas istnieje element $g \in \mathbb{G}$, $g \neq e$ taki, że dla $\xi_g \in \widehat{\widehat{\mathbb{G}}}$, $\xi_g(\gamma) = \gamma(g)$ mamy, że $\xi_g|\widehat{\Phi}(\widehat{X}) = 1$. Zatem dla każdego $\chi \in \widehat{X}$ otrzymujemy

$$1 = \xi_g(\widehat{\Phi}(\chi)) = \xi_g(\chi\Phi) = \chi \circ \Phi(g),$$

skąd $\Phi(g) = e$, a ponieważ Φ jest monomorfizmem, więc $g = e$.

Załóżmy, że maksymalny typ spektralny σ_f nie jest równoważny mierze Haara λ. Wówczas istnieje zbiór borelowski $A \subset \widehat{\mathbb{G}}$ taki, że

$$\lambda(A) > 0 \text{ oraz } \sigma_f(A) = 0.$$

Ponieważ

$$\sigma_{M_\chi f} \ll \sigma_f \text{ oraz } \sigma_{M_\chi f}(A) = \sigma_f((\widehat{\Phi}(\chi))^{-1}A)$$

dla każdego $\chi \in \widehat{X}$, więc

$$\sigma_f(\sum_{\chi \in \widehat{X}} \widehat{\Phi}(\chi)A) = 0.$$

Z drugiej strony z gęstości $\widehat{\Phi}(\widehat{X})$ w $\widehat{\mathbb{G}}$ otrzymujemy, że

$$\lambda(\sum_{\chi \in \widehat{X}} \widehat{\Phi}(\chi)A) = 1.$$

Stąd wynika, że maksymalny typ spektralny jest singularny, co przeczy naszemu założeniu, a zatem $\sigma_f \equiv \lambda$. ■

Lemat 1.13 *Reprezentacja U ma widmo jednorodne.*

Dowód. Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Przez $\mathcal{H}^n$ oznaczmy zbiór funkcji $f \in L^2(X, \mu)$, dla których istnieje ciąg funkcji $f_1, ..., f_n \in L^2(X, \mu)$ taki, że dla każdej pary liczb $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$ mamy $\mathbb{G}(f_i) \perp \mathbb{G}(f_j)$ oraz $\sigma_{f_i} = \sigma_f$ dla $i = 1, ..., n$. Niech ν będzie maksymalnym typem spektralnym reprezentacji U. Korzystając z lematu 1.6, lematu 1.7 oraz twierdzenia spektralnego łatwo pokazać, że jeśli dla $n \in \mathbb{N}$ położymy

$$\nu_n = \nu|_{A_{n_0}(U)},$$

gdzie $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ jest najmniejszym elementem nie mniejszym niż n takim, że $n_0 \in E(U)$ oraz położymy

$$\nu_\infty = \nu|_{\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(U)},$$

to

$$\mathcal{H}^n = \{f \in L^2(X, \mu); \sigma_f \ll \nu_n\}.$$

Na mocy lematu 1.3, $\mathcal{H}^n$ jest domkniętą podprzestrzenią U-niezmienniczą. Przestrzeń $\mathcal{H}^n$ jest również M-niezmiennicza. Istotnie, załóżmy, że $f \in \mathcal{H}^n$, czyli istnieje ciąg funkcji $f_1, ..., f_n \in L^2(X, \mu)$ taki, że $\mathbb{G}(f_i) \perp \mathbb{G}(f_j)$ dla $i \neq j$ oraz $\sigma_{f_i} = \sigma_f$. Wówczas dla dowolnego charakteru $\chi \in \widehat{X}$,

$$\mathbb{G}(M_\chi f_i) = M_\chi(\mathbb{G}(f_i)) \perp M_\chi(\mathbb{G}(f_j)) = \mathbb{G}(M_\chi f_j)$$

dla $i \neq j$ oraz

$$\sigma_{M_\chi f_i} = (R_\chi)_* \sigma_{f_i} = (R_\chi)_* \sigma_f = \sigma_{M_\chi f}.$$

Zatem $M_\chi f \in \mathcal{H}^n$ dla dowolnego charakteru $\chi \in \widehat{X}$.

Na mocy lematu Wienera, $\mathcal{H}^n = L^2(X, \mu)$ albo $\mathcal{H}^n = \{0\}$. Niech

$$k = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N}; \mathcal{H}^n \neq \{0\}\} & \text{gdy} \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^n = \{0\} \\ \infty & \text{gdy} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^n \neq \{0\}. \end{cases}$$

Wówczas $\mathcal{H}^k = L^2(X, \mu)$. Korzystając z lematu 1.7 otrzymujemy, że $E(U) = \{k\}$, czyli reprezentacja U ma widmo jednorodne o krotności k. ■

Lemat 1.14 *Jeśli dla* $f \in L^2(X, \mu)$ *mamy* $\sum_{g \in \mathbb{G}} |(U_g f, f)|^2 < +\infty$, *to* $\sigma_f \ll \lambda$.

Dowód. Rozważmy funkcję $\varphi \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \lambda)$ określoną wzorem

$$\varphi(\gamma) = \sum_{g \in \mathbb{G}} (U_g f, f)\overline{\gamma(g)}.$$

Wówczas dla dowolnego $h \in \mathbb{G}$

$$\int_{\widehat{\mathbb{G}}} \gamma(h)\varphi(\gamma) d\lambda(\gamma) = (U_h f, f) = \int_{\widehat{\mathbb{G}}} \gamma(h) d\sigma_f(\gamma),$$

a zatem $\frac{d\sigma_f}{d\lambda} = \varphi$. ∎

Podstawiając w poprzednim lemacie $f = 1$ i korzystając z lematu 1.12 oraz lematu 1.13 otrzymujemy

Wniosek 1.1 *Jeśli dla reprezentacji unitarnej U szereg*

$$\sum_{g \in \mathbb{G}} | \int_X F_g(x) d\mu(x)|^2$$

jest sumowalny, to U ma jednorodne widmo Haara.

Lemat 1.15 *Niech $F^{(i)} : \mathbb{G} \times X \to \mathbb{T}$ będzie $\mathbb{T}$–kocyklem, $i = 1, 2$. Rozważmy reprezentację $U^{(i)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(X, \mu))$ określoną wzorem*

$$(U_g^{(i)} f)(x) = F_g^{(i)}(x) f(\boldsymbol{T}_g x)$$

oraz niech $\sigma^{(i)}$ oznacza maksymalny typ spektralny reprezentacji $U^{(i)}$, $i = 1, 2$. Wówczas miary $\sigma^{(1)}$ oraz $\sigma^{(2)}$ są albo równoważne, albo ortogonalne.

Dowód. Rozważmy domkniętą $U^{(1)}$–niezmienniczą podprzestrzeń

$$\mathcal{H} = \{f \in L^2(X, \mu); \sigma_f^{(1)} \ll \sigma^{(2)}\}$$

przestrzeni $L^2(X, \mu)$. Pokażemy, że $\mathcal{H}$ jest również podprzestrzenią M–niezmienniczą. Niech $f \in \mathcal{H}$. Istnieje wtedy element $h \in L^2(X, \mu)$ taki, że $\sigma_f^{(1)} = \sigma_h^{(2)}$, czyli

$$(U_g^{(1)} f, f) = (U_g^{(2)} h, h)$$

dla każdego $g \in \mathbb{G}$. Wówczas dla dowolnego charakteru $\chi \in \widehat{X}$ mamy

$$\begin{aligned}(U_g^{(1)} M_\chi f, M_\chi f) &= \chi(\Phi(g))(U_g^{(1)} f, f) = \chi(\Phi(g))(U_g^{(2)} h, h) \\ &= (U_g^{(2)} M_\chi h, M_\chi h),\end{aligned}$$

a zatem $\sigma^{(1)}_{M_\chi f} = \sigma^{(2)}_{M_\chi h}$. Stąd $M_\chi f \in \mathcal{H}$ dla dowolnego charakteru $\chi \in \widehat{X}$. Na mocy lematu 1.11 albo $\mathcal{H} = \{0\}$, albo $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$, więc albo $\sigma^{(1)} \perp \sigma^{(2)}$, albo $\sigma^{(1)} \ll \sigma^{(2)}$. W przypadku, gdy $\sigma^{(1)} \ll \sigma^{(2)}$ przez symetrię rozumowania otrzymujemy $\sigma^{(1)} \gg \sigma^{(2)}$, a stąd $\sigma^{(1)} \equiv \sigma^{(2)}$. ∎

1.2 Podstawowe informacje dotyczące ułamków łańcuchowych

Ogólne wiadomości, na temat ułamków łańcuchowych, wykorzystane w tym rozdziale są zaczerpnięte z [31] oraz [44].

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha \in [0,1)$, niech

$$\alpha = [0; a_1, a_2, ...] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}}$$

będzie jej ułamkiem łańcuchowym, gdzie a_n są liczbami naturalnymi. Liczby a_n będziemy nazywać *ilorazami częściowymi* liczby α. Utwórzmy dwa ciągi $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}, \{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ zadane rekurencyjnie

$$q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},$$

$$p_0 = 0,\ p_1 = 1,\ p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}.$$

Ułamek p_n/q_n nazywamy *n-tym reduktem*, zaś liczbę naturalną q_n *n-tym mianownikiem* liczby α. Wówczas prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \tag{2}$$

Przez $\{t\}$ oznaczmy część ułamkową liczby rzeczywistej t oraz niech $\|t\|$ oznacza odległość liczby t od zbioru liczb całkowitych.

Przypomnijmy, że $\mathbb{T}$ oznaczał okrąg jednostkowy na płaszczyźnie liczb zespolonych. W rozprawie będziemy również stosowali zapis addytywny, tzn. grupę $\mathbb{T}$ będziemy utożsamiać z grupą $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lub z odcinkiem $[0,1)$, na którym dodawanie rozumiane jest jako dodawanie modulo 1. Przez λ oznaczmy unormowaną miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}$. Niech $< \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ będzie relacją zwykłej nierówności na odcinku $[0,1)$. Na grupie $\mathbb{T}$ zdefiniujmy relację $\tilde{<} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ w następujący sposób: $x \tilde{<} y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < y - x < 1/2$.

Niech $T : (\mathbb{T}, \lambda) \to (\mathbb{T}, \lambda)$ będzie obrotem $Tx = x + \alpha$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n,

$$q_{n+1}\|q_n\alpha\| + q_n\|q_{n+1}\alpha\| = 1. \tag{3}$$

Ponadto,

$$\{\ [0, \{q_n\alpha\})\ , ...,\ T^{q_{n+1}-1}[0, \{q_n\alpha\})\ ,\ [\{q_{n+1}\alpha\}, 1)\ , ...,\ T^{q_n-1}[\{q_{n+1}\alpha\}, 1)\ \}$$

dla n parzystych oraz

$$\{\ [\{q_n\alpha\},1)\ ,...,\ T^{q_{n+1}-1}[\{q_n\alpha\},1)\ ,\ [0,\{q_{n+1}\alpha\})\ ,...,\ T^{q_n-1}[0,\{q_{n+1}\alpha\})\ \}$$

dla n nieparzystych są rodzinami parami rozłącznych odcinków, które wypełniają cały zbiór $\mathbb{T}$. Stąd

$$\{\ [0,\{a_{n+1}q_n\alpha\})\ ,...,\ T^{q_n-1}[0,\{a_{n+1}q_n\alpha\})\ \}$$

dla n parzystych oraz

$$\{\ [\{a_{n+1}q_n\alpha\},1)\ ,...,\ T^{q_n-1}[\{a_{n+1}q_n\alpha\},1)\ \}$$

dla n nieparzystych są rodzinami parami rozłącznych odcinków. Prawdziwa jest również, dla $n \geqslant 2$, nierówność

$$\frac{1-2/a_{n+1}}{q_n} < \|a_{n+1}q_n\alpha\| < \frac{1}{q_n}.$$

Istotnie, korzystając z nierówności (2) otrzymujemy, że

$$a_{n+1}\|q_n\alpha\| < \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{1}{q_n}.$$

Ponieważ $q_n \geqslant 2$, więc

$$\|a_{n+1}q_n\alpha\| = a_{n+1}\|q_n\alpha\| < \frac{1}{q_n}.$$

Korzystając z (3) otrzymujemy, że

$$q_n a_{n+1}\|q_n\alpha\| = 1 - q_{n-1}\|q_n\alpha\| - q_n\|q_{n+1}\alpha\|.$$

Ponadto, na mocy (2),

$$q_{n-1}\|q_n\alpha\| + q_n\|q_{n+1}\alpha\| < \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}} + \frac{q_n}{q_{n+2}} < 2\frac{q_n}{q_{n+1}} < \frac{2}{a_{n+1}},$$

a stąd

$$q_n\|a_{n+1}q_n\alpha\| > 1 - \frac{2}{a_{n+1}}.$$

Będziemy mówili, że α ma *nieograniczone ilorazy*, jeśli

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ lub równoważnie } \limsup_{n\to\infty} q_n\|q_n\alpha\| = \infty.$$

Twierdzenie 1.16 *(patrz [33].) Niech α będzie liczbą niewymierną oraz niech $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem mianowników liczby α. Załóżmy, że $\beta \in \mathbb{R}$. Wówczas $\{\beta\} = \{p\alpha\}$ dla pewnej liczby $p \in \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|q_n\beta\| \leqslant q_n\|q_n\alpha\|/4$ dla dostatecznie dużych n.*

2 Cykliczna równoważność reprezentacji unitarnych

Jednym z najważniejszych (otwartych) problemów teorii ergodycznej jest klasyfikacja automorfizmów ergodycznych ($\mathbb{Z}$-działań) ze względu na relację spektralnej równoważności, a dokładniej odpowiedź na pytanie, czy dla dowolnego operatora unitarnego, którego 1 jest jednokrotną wartością własną, istnieje automorfizm ergodyczny $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ taki, że operator unitarny

$$U^T : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu),\ U^T f = f \circ T$$

jest unitarnie równoważny danemu operatorowi. Równoważnie problem można sformułować w sposób następujący: czy dla dowolnego ciągu

$$\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg ...,\ \sigma_1(\{1\}) > 0,\ \sigma_2(\{1\}) = 0 \tag{4}$$

dodatnich skończonych miar borelowskich na okręgu istnieje automorfizm ergodyczny $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ taki, że ciąg spektralny operatora U^T jest zgodny z ciągiem (4).

W tym rozdziale zajmiemy się słabszą wersją tego problemu. Najpierw zdefiniujemy dla dowolnej przeliczalnej (dyskretnej) grupy abelowej $\mathbb{G}$ cykliczny izomorfizm reprezentacji grupy $\mathbb{G}$ (relacja ta będzie słabsza od relacji unitarnej równoważności), a następnie spróbujemy dokonać klasyfikacji ergodycznych układów dynamicznych względem tej nowej relacji.

Lemat 2.1 *Niech $U^{(i)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^{(i)})$ będzie reprezentacją unitarną grupy $\mathbb{G}$, $i = 1, 2$. Wówczas dla dowolnego operatora unitarnego $V : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla każdego $f \in \mathcal{H}^{(1)}$ mamy $\mathbb{G}(Vf) = V\mathbb{G}(f)$,*

(ii) *jeżeli $\mathcal{H}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{U}^{(1)}$–niezmienniczą przestrzeni $\mathcal{H}^{(1)}$, to $V\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{U}^{(2)}$–niezmienniczą przestrzeni $\mathcal{H}^{(2)}$ oraz jeśli $\mathcal{H}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{U}^{(2)}$–niezmienniczą przestrzeni $\mathcal{H}^{(2)}$, to $V^{-1}\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{U}^{(1)}$–niezmienniczą przestrzeni $\mathcal{H}^{(1)}$.*

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $\mathcal{H}$ będzie $\mathcal{U}^{(1)}$-niezmienniczą domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}^{(1)}$ oraz niech f będzie dowolnym elementem $V\mathcal{H}$. Ponieważ

$\mathbb{G}(f) = V\mathbb{G}(V^{-1}f)$, więc dla dowolnego $g \in \mathbb{G}$,

$$\mathcal{U}_g^{(2)} f \in \mathbb{G}(f) = V\mathbb{G}(V^{-1}f) \subset V\mathcal{H},$$

a stąd $V\mathcal{H}$ jest $\mathcal{U}^{(2)}$-niezmiennicza. Podobnie można pokazać pozostałą część warunku (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Niech f będzie dowolnym elementem $\mathcal{H}^{(1)}$. Przestrzeń $\mathbb{G}(f)$ jest $\mathcal{U}^{(1)}$-niezmiennicza, a zatem $V\mathbb{G}(f)$ jest $\mathcal{U}^{(2)}$-niezmiennicza. Ponieważ $Vf \in V\mathbb{G}(f)$, więc

$$\mathbb{G}(Vf) \subset V\mathbb{G}(f).$$

Podobnie, $f \in V^{-1}\mathbb{G}(Vf)$ i przestrzeń $V^{-1}\mathbb{G}(Vf)$ jest $\mathcal{U}^{(1)}$-niezmiennicza, a zatem

$$\mathbb{G}(f) \subset V^{-1}\mathbb{G}(Vf), \text{ czyli } V\mathbb{G}(f) \subset \mathbb{G}(Vf),$$

więc $V\mathbb{G}(f) = \mathbb{G}(Vf)$. ■

Definicja 2.1 Mówimy, że operator unitarny $V : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ ustala *cykliczny izomorfizm* reprezentacji unitarnych $\mathcal{U}^{(1)}$ i $\mathcal{U}^{(2)}$ jeśli spełniony jest warunek (i) (lub równoważnie warunek (ii)) lematu 2.1.

Uwaga. Jeśli operator unitarny V ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji $\mathcal{U}^{(1)}$ i $\mathcal{U}^{(2)}$ oraz $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{(1)}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{U}^{(1)}$–niezmienniczą, to $V : \mathcal{H} \to V(\mathcal{H})$ ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji $\mathcal{U}^{(1)}|\mathcal{H}$ i $\mathcal{U}^{(2)}|V(\mathcal{H})$. Ponadto, oczywistym jest, że jeśli reprezentacje są unitarnie izomorficzne, to są cyklicznie izomorficzne.

Lemat 2.2 *Niech $U^{(i)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^{(i)})$ będzie reprezentacją unitarną grupy $\mathbb{G}$, $i = 1, 2$. Załóżmy, że $V : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$. Niech*

$$\mathcal{H}^{(1)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n), \quad \sigma_{f_1} \gg \sigma_{f_2} \gg ...$$

będzie rozkładem spektralnym reprezentacji $U^{(1)}$. Wówczas

$$\mathcal{H}^{(2)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(Vf_n), \quad \sigma_{Vf_1} \gg \sigma_{Vf_2} \gg ... \, .$$

Ponadto, $\sigma_{f_n} \equiv \sigma_{f_{n+1}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{Vf_n} \equiv \sigma_{Vf_{n+1}}$. W szczególności $E(U^{(1)}) = E(U^{(2)})$.

Dowód. Ponieważ V ustala cykliczny izomorfizm, więc

$$\mathcal{H}^{(2)} = V(\mathcal{H}^{(1)}) = V(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V\mathbb{G}(f_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(Vf_n).$$

Najpierw zauważmy, że $\mathbb{G}(Vf_1)$ jest maksymalną przestrzenią cykliczną. Istotnie, jeśli załóżmy, że istnieje element $g \in \mathcal{H}^{(2)}$ taki, że $\mathbb{G}(Vf_1) \subsetneq \mathbb{G}(g)$, to $\mathbb{G}(f_1) \subsetneq \mathbb{G}(V^{-1}g)$, co przeczy maksymalności przestrzeni cyklicznej $\mathbb{G}(f_1)$. Zatem σ_{Vf_1} jest maksymalnym typem spektralnym reprezentacji $U^{(2)}$.

Podobnie, ponieważ $V : \mathbb{G}(f_1)^{\perp} \to \mathbb{G}(Vf_1)^{\perp}$ ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji $U^{(1)}|_{\mathbb{G}(f_1)^{\perp}}$ i $U^{(2)}|_{\mathbb{G}(Vf_1)^{\perp}}$, więc σ_{Vf_2} jest maksymalnym typem spektralnym reprezentacji $U^{(2)}|_{\mathbb{G}(Vf_2)^{\perp}}$. W ten sam sposób otrzymujemy, że dla dowolnego naturalnego n, σ_{Vf_n} jest maksymalnym typem spektralnym reprezentacji $U^{(2)}$ obciętej do przestrzeni $\mathbb{G}(Vf_n) \oplus \mathbb{G}(Vf_{n+1}) \oplus \ldots$. Zatem $\sigma_{Vf_1} \gg \sigma_{Vf_2} \gg \ldots$.

Pokażemy teraz, że $\sigma_{f_n} \equiv \sigma_{f_{n+1}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{Vf_n} \equiv \sigma_{Vf_{n+1}}$. Załóżmy, że miary σ_{f_n}, $\sigma_{f_{n+1}}$ nie są równoważne. Wówczas

$$\mathbb{G}(f_n) \oplus \mathbb{G}(f_{n+1}) = \mathbb{G}(f'_n) \oplus \mathbb{G}(f''_n) \oplus \mathbb{G}(f_{n+1}),$$

gdzie $\sigma_{f''_n} \neq 0$, $\sigma_{f''_n} \perp \sigma_{f_{n+1}}$ oraz $\sigma_{f'_n} \ll \sigma_{f_{n+1}}$. Zatem

$$\mathbb{G}(Vf_n) \oplus \mathbb{G}(Vf_{n+1}) = \mathbb{G}(Vf'_n) \oplus \mathbb{G}(Vf''_n) \oplus \mathbb{G}(Vf_{n+1}),$$

przy czym $\mathbb{G}(f''_n) \oplus \mathbb{G}(f_{n+1})$ jest przestrzenią cykliczną, stąd

$$V(\mathbb{G}(f''_n) \oplus \mathbb{G}(f_{n+1})) = \mathbb{G}(Vf''_n) \oplus \mathbb{G}(Vf_{n+1})$$

jest przestrzenią cykliczną, a zatem miary $\sigma_{Vf''_n}$, $\sigma_{Vf_{n+1}}$ są ortogonalne. Stąd wynika, że miary σ_{Vf_n}, $\sigma_{Vf_{n+1}}$ nie są równoważne. ■

Z powyższego lematu wynika, że zbiór istotnych wartości funkcji krotności spektralnej reprezentacji unitarnej jest niezmiennikiem cyklicznego izomorfizmu. Zauważmy także, że jeśli $f \in \mathcal{H}^{(1)}$ jest wektorem własnym reprezentacji $U^{(1)}$, czyli $\dim \mathbb{G}(f) = 1$ oraz V ustala cykliczny izomorfizm, to $\dim \mathbb{G}(Vf) = 1$, a zatem Vf jest wektorem własnym reprezentacji $U^{(2)}$. Niech $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^{(1)}$ będą wektorami własnymi odpowiadającymi różnym wartościom własnym $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{G}$. Wówczas również $Vf_1, Vf_2 \in \mathcal{H}^{(2)}$ są wektormi własnymi odpowiadającymi różnym wartościom własnym. Istotnie, załóżmy, że Vf_1, Vf_2 odpowiadają tej samej wartości własnej. Wówczas $V(f_1 + f_2)$

jest wektorem własnym, a zatem $f_1 + f_2$ jest również wektorem własnym. Ponieważ $\chi_1 \neq \chi_2$, więc $f_1, f_2 \in \mathbb{G}(f_1 + f_2)$. Stąd $\dim \mathbb{G}(f_1 + f_2) \geqslant 2$, a zatem sprzeczność. To daje nam następny niezmiennik, mianowicie moc zbioru wartości własnych.

Wyznaczymy teraz pełny zbiór niezmienników dla cyklicznej równoważności.

Dowolną miarę σ możemy przedstawić jednoznacznie jako sumę $\sigma = \sigma^c + \sigma^d$, gdzie σ^c jest miarą ciągłą, zaś σ^d miarą dyskretną. Niech $\sigma_{f_1} \gg \sigma_{f_2} \gg ...$ będzie ciągiem spektralnym reprezentacji U. Wówczas mamy $\sigma^c_{f_1} \gg \sigma^c_{f_2} \gg ....$ Przez *c-funkcję krotności spektralnej* M^c_U reprezentacji U będziemy rozumieli funkcję borelowską $M^c_U : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ daną wzorem

$$M^c_U(\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{C_n}(\chi),$$

gdzie $C_1 = \widehat{\mathbb{G}}$ oraz $C_n = C_n(U) = \{\chi \in \widehat{\mathbb{G}}; \frac{d\sigma^c_{f_n}}{d\sigma^c_{f_1}}(\chi) > 0\}$. Zbiór

$$E^c(U) = \{n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}; \sigma^c_{f_1}\{\chi \in \widehat{\mathbb{G}}; M^c_U(\chi) = n\} > 0\}$$

jest wówczas zbiorem istotnych wartości funkcji M^c_U.

Niech $D(U) : \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ będzie funkcją daną wzorem $D(U)(n) = \mathrm{card}\, D_n$, gdzie

$$D_n = D_n(U) = \begin{cases} \{\chi \in A_n \setminus A_{n+1}; \sigma_{f_1}(\{\chi\}) > 0\} & \text{gdy} \quad n \in \mathbb{N} \\ \{\chi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n; \sigma_{f_1}(\{\chi\}) > 0\} & \text{gdy} \quad n = +\infty. \end{cases}$$

Na podstawie podanych definicji łatwo zauważyć, że

$$A_n \setminus A_{n+1} = (C_n \setminus C_{n+1}) \cup D_n \tag{5}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \cup D_\infty. \tag{6}$$

Naszym celem będzie pokazanie, że $E^c(U)$ i $D(U)$ stanowią pełny zbiór niezmienników dla cyklicznej równoważności.

Lemat 2.3 *Niech σ, ν będą skończonymi miarami borelowskimi na grupie dualnej $\widehat{\mathbb{G}}$. Rozważmy reprezentacje unitarne $U^{(1)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma))$ i $U^{(2)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu))$ dane wzorem*

$$U^{(1)}_g f(\chi) = U^{(2)}_g f(\chi) = \chi(g) f(\chi).$$

Jeśli $V : L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma) \to L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu)$ *ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji* $U^{(1)}$ *i* $U^{(2)}$*, to istnieje izomorfizm niesingularny* $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \nu) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \sigma)$ *oraz funkcja* $h \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu)$ *taka, że*

$$Vf = h \cdot f \circ S$$

dla każdego $f \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$.

Dowód. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}$, $\mathbf{1}_A L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$ jest $U^{(1)}$–niezmienniczą podprzestrzenią $L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$. Ponieważ V ustala cykliczny izomorfizm, więc $V\mathbf{1}_A L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$ jest $U^{(2)}$–niezmienniczą podprzestrzenią $L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \mu)$. Na mocy lematu Wienera, istnieje zbiór borelowski $\Phi(A)$ taki, że

$$V\mathbf{1}_A L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma) = \mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu).$$

Ponieważ $V(\{0\}) = \{0\}$ oraz $V^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, więc $\sigma(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu(\Phi(A)) = 0$. W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie $\Phi : (\mathcal{B}, \sigma) \to (\mathcal{B}, \nu)$. Dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{B}$, jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $\mathbf{1}_A L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma) \perp \mathbf{1}_B L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$ stąd,

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu) \perp \mathbf{1}_{\Phi(B)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu),$$

a zatem $\Phi(A) \cap \Phi(B) = \emptyset$. Jeśli $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, przy czym zbiory $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami rozłączne, to

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\Phi(A)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu) &= V(\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)) = V(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)) \\ &= \bigoplus_{n=1}^{\infty} V(\mathbf{1}_{A_n} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\Phi(A_n)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu) \\ &= \mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu), \end{aligned}$$

a zatem $\Phi(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$. Stosując standardowe argumenty otrzymujemy powyższą równość bez założenia, że zbiory $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są parami rozłączne. Ponieważ $V(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)) = L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu)$, więc $\Phi(\widehat{\mathbb{G}}) = \widehat{\mathbb{G}}$. Stąd $\widehat{\mathbb{G}} = \Phi(A) \cup \Phi(A^c)$, czyli $\Phi(A)^c = \Phi(A^c)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}$.

Z powyższych rozważań wynika, że $\Phi : (\mathcal{B}, \sigma) \to (\mathcal{B}, \nu)$ jest izomorfizmem σ–boolowskim. Zatem istnieje izomorfizm niesingularny $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \nu) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \sigma)$ taki, że $\Phi(A) = S^{-1}(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{B}$. Połóżmy $h = V(1)$ i ustalmy $A \in \mathcal{B}$. Ponieważ $1 = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c}$, więc $h = V(\mathbf{1}_A) + V(\mathbf{1}_{A^c})$. Jednak funkcje $V(\mathbf{1}_A)$ i $V(\mathbf{1}_{A^c})$ mają rozłączne nośniki, co pociąga za sobą fakt, że funkcja $V(\mathbf{1}_A)$ musi być równa funkcji h na swoim nośniku, a zatem

$$V(\mathbf{1}_A) = h \cdot \mathbf{1}_{\Phi(A)} = h \cdot \mathbf{1}_A \circ S.$$

Ponieważ powyższa równość jest prawdziwa dla wszystkich funkcji charakterystycznych, więc prawdziwa jest także dla kombinacji liniowych tych funkcji, a zatem i dla wszystkich funkcji $f \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$.

Ponieważ V jest izometrią, więc dla każdego $A \in \mathcal{B}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma(SA) &= \int_{\widehat{\mathbb{G}}} |\mathbf{1}_A S^{-1}|^2 d\sigma = \|\mathbf{1}_A S^{-1}\|^2_{L^2(\sigma)} \\ &= \|V(\mathbf{1}_A S^{-1})\|^2_{L^2(\nu)} = \|h \cdot \mathbf{1}_A\|^2_{L^2(\nu)} = \int_A |h|^2 d\nu. \end{aligned}$$

Stąd $|h|^2 = \frac{d\sigma \circ S}{d\nu}$. ■

Dla danego ciągu

$$\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \dots$$

miar borelowskich na $\widehat{\mathbb{G}}$, rozważmy reprezentację unitarną U grupy $\mathbb{G}$ w przestrzeni $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$ daną wzorem

$$U_g(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(g)\xi_n(\chi_n)$$

dla każdego $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n) \in \mathcal{H}$.

Niech $\psi : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{C}$ będzie odwzorowaniem mierzalnym i ograniczonym. Rozważmy operator liniowy i ograniczony $\psi(U) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dany wzorem

$$\psi(U)(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(\chi_n)\xi_n(\chi_n).$$

Lemat 2.4 *Jeśli $\mathcal{H}_0$ jest domkniętą U–niezmienniczą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, to $\mathcal{H}_0$ jest również podprzestrzenią niezmienniczą dla operatora $\psi(U)$.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że jeśli $\lim_{m\to\infty} \psi_m(\chi) = \psi(\chi)$ dla każdego $\chi \in \widehat{\mathbb{G}}$ oraz $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji wspólnie ograniczonych na $\widehat{\mathbb{G}}$, to

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(U) = \psi(U)$$

w silnej topologii operatorów, tzn.

$$\lim_{m\to\infty} \|\psi_m(U)f - \psi(U)f\| = 0$$

dla każdego $f \in \mathcal{H}$. Niech $f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \in \mathcal{H}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|\psi_m(U)f - \psi(U)f\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\widehat{\mathbb{G}}} |\psi_m(\chi_n) - \psi(\chi_n)|^2 |\xi_n(\chi_n)|^2 d\sigma_n(\chi_n) \\ &= \int_{\widehat{\mathbb{G}}} |\psi_m(\chi) - \psi(\chi)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n(\chi)|^2 d\sigma_n(\chi). \end{aligned}$$

Ponieważ miara $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 d\sigma_n$ jest skończona, więc korzystając z twierdzenia Lebesgue'a otrzymujemy, że

$$\lim_{m\to\infty} \|\psi_m(U)f - \psi(U)f\|^2 = 0.$$

Niech $\mathcal{H}_0$ będzie domkniętą podprzestrzenią U–niezmienniczą przestrzeni $\mathcal{H}$. Załóżmy, że $f = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \in \mathcal{H}_0$.

1. Załóżmy najpierw, że ψ jest kombinacją liniową charakterów grupy $\widehat{\mathbb{G}}$, czyli daje się przedstawić w postaci

$$\psi(\chi) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi(h_i),$$

gdzie $a_i \in \mathbb{C}$, $h_i \in \mathbb{G}$, $i = 1, ..., k$. Wówczas

$$\psi(U)f = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(h_i)\xi_n(\chi_n) = \sum_{i=1}^{k} a_i U_{h_i} f,$$

a stąd $\psi(U)f \in \mathcal{H}_0$.

2. Niech $\psi : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{C}$ będzie dowolnym odwzorowaniem mierzalnym i ograniczonym. Wówczas istnieje ciąg $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ wspólnie ograniczonych kombinacji liniowych charakterów grupy $\widehat{\mathbb{G}}$ taki, że $\lim_{m\to\infty} \psi_m(\chi) = \psi(\chi)$ dla każdego $\chi \in \widehat{\mathbb{G}}$. Z faktu udowodnionego na początku dowodu oraz z punktu 1 dowodu wynika, że

$$\psi(U)f = \lim_{m\to\infty} \psi_m(U)f \in \mathcal{H}_0. \blacksquare$$

Twierdzenie 2.5 *Niech* $U^{(i)} : \mathbb{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}^{(i)})$ *będzie reprezentacją unitarną grupy* $\mathbb{G}$ *w ośrodkowej przestrzeni Hilberta* $\mathcal{H}^{(i)}$, $i = 1, 2$. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *reprezentacje* $U^{(1)}$ *i* $U^{(2)}$ *są cyklicznie równoważne,*

(ii) *dla pewnego ciągu spektralnego miar* $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \ldots$ *reprezentacji* $U^{(1)}$ *i dla pewnego ciągu spektralnego miar* $\nu_1 \gg \nu_2 \gg \ldots$ *reprezentacji* $U^{(2)}$ *istnieje izomorfizm zachowujący miarę* $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \nu_1) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)$ *taki, że*

$$\nu_n = \sigma_n \circ S$$

dla każdego naturalnego n,

(iii) $E^c(U^{(1)}) = E^c(U^{(2)})$ *oraz* $D(U^{(1)}) = D(U^{(2)})$.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $V : \mathcal{H}^{(1)} \to \mathcal{H}^{(2)}$ określa cykliczny izomorfizm reprezentacji $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$ oraz niech $\mathcal{H}^{(1)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(f_n)$ będzie rozkładem spektralnym reprezentacji $U^{(1)}$ takim, że $\sigma_{f_n} = \sigma_{f_1}|_{A_n}$. Połóżmy $\sigma_n := \sigma_{f_n}$ dla każdego naturalnego n. Na mocy lematu 2.2 otrzymujemy, że $\mathcal{H}^{(2)} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}(Vf_n)$, przy czym jest to rozkład spektralny reprezentacji $U^{(2)}$. Oznaczmy $\nu_n = \sigma_{Vf_n}$ dla każdego naturalnego n. Niech $V_1 : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n) \to \mathcal{H}^{(1)}$ będzie unitarnym izomorfizmem reprezentacji U oraz $U^{(1)}$ takim, że $V_1(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)) = \mathbb{G}(f_n)$ oraz niech $V_2 : \mathcal{H}^{(2)} \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$ będzie unitarnym izomorfizmem reprezentacji $U^{(2)}$ oraz U takim, że $V_2\mathbb{G}(f_n) = L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$, gdzie przypomnijmy

$$U_g(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(g)\xi_n(\chi_n).$$

Wówczas operator $V' = V_2VV_1$ określa cykliczny izomorfizm reprezentacji U określonej na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$ i reprezentacji U określonej na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$. Ponadto, $V'(L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)) = L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$ dla każdego naturalnego n.

Na mocy lematu 2.3, dla każdego naturalnego n istnieje izomorfizm niesingularny $S_n : (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \nu_n) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \mathcal{B}, \sigma_n)$ oraz funkcja $h_n \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$ taka, że $V' |_{L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)} \xi = h_n \cdot \xi \circ S_n$. Stąd otrzymujemy, że

$$V'(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\chi_n) \cdot \xi_n(S_n\chi_n)$$

dla $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$.

Dla dowolnych liczb naturalnych $k \neq l$, rozważmy podprzestrzeń U-niezmienniczą

$$\mathcal{H}_{k,l} = \{\xi(\chi_k) + \xi(\chi_l); \xi \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)\}$$

przestrzeni $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$. Wówczas

$$V'\mathcal{H}_{k,l} = \{h_k(\chi_k)\xi(S_k\chi_k) + h_l(\chi_l)\xi(S_l\chi_l); \xi \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)\}.$$

Ponieważ $V'\mathcal{H}_{k,l}$ jest podprzestrzenią U–niezmienniczą, więc dla każdego $\xi \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)$ oraz $g \in \mathbb{G}$ istnieje funkcja $\xi^{(g)} \in L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)$ taka, że

$$\begin{aligned} &\chi_k(g)h_k(\chi_k)\xi(S_k\chi_k) + \chi_l(g)h_l(\chi_l)\xi(S_l\chi_l) \\ &= h_k(\chi_k)\xi^{(g)}(S_k\chi_k) + h_l(\chi_l)\xi^{(g)}(S_l\chi_l). \end{aligned}$$

Naturalne włożenia przestrzeni $L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_k)$ oraz $L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_l)$ są ortogonalne w $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$, a zatem

$$\begin{array}{ll} \chi(g)h_k(\chi)\xi(S_k\chi) = h_k(\chi)\xi^{(g)}(S_k\chi) & \text{dla } \chi \in \widehat{\mathbb{G}} \quad \nu_k - \text{p.w.}, \\ \chi(g)h_l(\chi)\xi(S_l\chi) = h_l(\chi)\xi^{(g)}(S_l\chi) & \text{dla } \chi \in \widehat{\mathbb{G}} \quad \nu_l - \text{p.w..} \end{array}$$

Na mocy lematu 2.3, $h_k \neq 0$ ν_k–p.w. oraz $h_l \neq 0$ ν_l–p.w., więc

$$S_k^{-1}(\chi)(g)\xi(\chi) = \xi^{(g)}(\chi) \text{ oraz } S_l^{-1}(\chi)(g)\xi(\chi) = \xi^{(g)}(\chi) \text{ p.w.}$$

(dla odpowiednich miar) dla wszystkich $g \in \mathbb{G}$. Podstawiając $\xi = 1$ otrzymujemy $S_k^{-1}(\chi)(g) = \xi^{(g)}(\chi) = S_l^{-1}(\chi)(g)$, czyli $S = S_k = S_l$ dla wszystkich $k \neq l$. Zatem $\nu_n \equiv \sigma_n \circ S$ dla każdego naturalnego n. Zastępując teraz ν_n przez $\sigma_n \circ S$ otrzymujemy warunek (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg ...$ będzie ciągiem spektralnym reprezentacji $U^{(1)}$ oraz $\nu_1 \gg \nu_2 \gg ...$ ciągiem spektralnym reprezentacji $U^{(2)}$. Załóżmy, że istnieje izomorfizm zachowujący miarę $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \nu_1) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)$ taki, że $\nu_n = \sigma_n \circ S$ dla każdego naturalnego n.

Rozważmy operator unitarny $V' : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n) \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$ określony wzorem

$$V'(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(S\chi_n).$$

Najpierw pokażemy, że V' określa cykliczny izomorfizm reprezentacji U określonej na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$ i reprezentacji U określonej na $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$.

Niech $\mathcal{H}_0$ będzie domkniętą podprzestrzenią U–niezmienniczą przestrzeni $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_n)$. Pokażemy, że $V'\mathcal{H}_0$ jest również U–niezmiennicza.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(\chi_n) \in V'\mathcal{H}_0$. Wówczas istnieje element $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\chi_n) \in \mathcal{H}_0$ taki, że $\zeta_n = \xi_n \circ S$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $g \in \mathbb{G}$, zdefiniujmy odwzorowanie $\psi_g : \widehat{\mathbb{G}} \to \mathbb{T}$ wzorem

$$\psi_g(\chi) = S^{-1}\chi(g).$$

Na mocy lematu 2.4,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_g(\chi_n)\xi_n(\chi_n) \in \mathcal{H}_0,$$

a zatem

$$U_g(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(\chi_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(g)\xi_n(S\chi_n) = V'(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_g(\chi_n)\xi_n(\chi_n)) \in V'\mathcal{H}_0.$$

W ten sam sposób możemy pokazać, że jeśli $\mathcal{H}_1$ jest podprzestrzenią U–niezmienniczą przestrzeni $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\widehat{\mathbb{G}}, \nu_n)$, to $V'^{-1}\mathcal{H}_1$ jest również podprzestrzenią U–niezmienniczą. Stąd wynika, że $V = V_2^{-1}V'V_1^{-1}$ ustala cykliczny izomorfizm reprezentacji $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Jeżeli dla ciągu spektralnego $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg ...$ reprezentacji $U^{(1)}$ oraz ciągu spekralnego $\nu_1 \gg \nu_2 \gg ...$ reprezentacji $U^{(2)}$ istnieje izomorfizm zachowujący miarę $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \nu_1) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \sigma_1)$ taki, że $\nu_n = \sigma_n \circ S$ dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$A_n(U^{(2)}) = S^{-1}A_n(U^{(1)}),\ C_n(U^{(2)}) = S^{-1}C_n(U^{(1)}) \text{ oraz } \nu_1^d = \sigma_1^d \circ S.$$

Zatem

$$\begin{aligned} C_n(U^{(2)}) \setminus C_{n+1}(U^{(2)}) &= S^{-1}(C_n(U^{(1)}) \setminus C_{n+1}(U^{(1)})), \\ \nu_1^d \mid_{A_n(U^{(2)}) \setminus A_{n+1}(U^{(2)})} &= \sigma_1^d \mid_{A_n(U^{(1)}) \setminus A_{n+1}(U^{(1)})} \circ S \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U^{(2)}) &= S^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U^{(1)})), \\ \nu_1^d \mid_{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U^{(2)})} &= \sigma_1^d \mid_{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U^{(1)})} \circ S. \end{aligned}$$

Stąd $E^c(U^{(1)}) = E^c(U^{(2)})$ oraz $D(U^{(1)}) = D(U^{(2)})$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Niech σ i ν będą maksymalnymi typami spektralnymi odpowiednio reprezentacji $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$. Ponieważ $E^c(U^{(1)}) = E^c(U^{(2)})$ i $D(U^{(1)}) = D(U^{(2)})$, więc

$$\nu(C_n(U^{(2)}) \setminus C_{n+1}(U^{(2)})) > 0 \Longleftrightarrow \sigma(C_n(U^{(1)}) \setminus C_{n+1}(U^{(1)})) > 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U^{(2)})) > 0 \Longleftrightarrow \sigma(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(U^{(1)})) > 0,$$

a ponadto card $D_n(U^{(1)}) =$ card $D_n(U^{(2)})$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Na mocy (5) oraz (6), dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje izomorfizm niesingularny

$$S_n : (A_n(U^{(2)}) \setminus A_{n+1}(U^{(2)}), \nu) \to (A_n(U^{(1)}) \setminus A_{n+1}(U^{(1)}), \sigma)$$

oraz izomorfizm niesingularny

$$S_\infty : (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U^{(2)}), \nu) \to (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U^{(1)}), \sigma)$$

(miary σ i ν zawężamy do odpowiednich zbiorów). Zdefiniujmy izomorfizm niesingularny $S : (\widehat{\mathbb{G}}, \nu) \to (\widehat{\mathbb{G}}, \sigma)$ kładąc

$$S(\chi) = \begin{cases} S_n(\chi) & \text{dla} \quad \chi \in A_n(U^{(2)}) \setminus A_{n+1}(U^{(2)}), \\ S_\infty(\chi) & \text{dla} \qquad \chi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(U^{(2)}). \end{cases}$$

Wówczas otrzymujemy

$$\nu |_{A_n(U^{(2)})} \equiv \sigma |_{A_n(U^{(1)})} \circ S.$$

Połóżmy $\sigma_n := \sigma |_{A_n(U^{(1)})}$ oraz $\nu_n := \sigma |_{A_n(U^{(1)})} \circ S$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg ...$ i $\nu_1 \gg \nu_2 \gg ...$ są ciągami spektralnymi odpowiednio reprezentacji $U^{(1)}$ i $U^{(2)}$ oraz $\nu_n = \sigma_n \circ S$ dla $n \in \mathbb{N}$. ■

2.1 Klasyfikacja operatorów unitarnych z ciągłym widmem dla relacji cyklicznej równoważności

Niech $\boldsymbol{T}$ będzie $\mathbb{G}$–działaniem ergodycznym. Wówczas każda wartość własna reprezentacji $U^{\boldsymbol{T}}$ ma krotność 1. Zatem bezpośrednio z twierdzenia 2.5 otrzymujemy

Wniosek 2.1 *Niech $\boldsymbol{T}_i : \mathbb{G} \times (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i) \to (X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ będzie $\mathbb{G}$–działaniem ergodycznym, i=1,2. Wówczas reprezentacje $U^{\boldsymbol{T}_1}$ i $U^{\boldsymbol{T}_2}$ są cyklicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $E^c(U^{\boldsymbol{T}_1}) = E^c(U^{\boldsymbol{T}_2})$ oraz* card $\mathrm{Sp}(U^{\boldsymbol{T}_1})$ = card $\mathrm{Sp}(U^{\boldsymbol{T}_2})$.

$\mathbb{G}$–działanie $\boldsymbol{T} : \mathbb{G} \times (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ nazywamy *słabo mieszającym,* jeśli reprezentacja $U^{\boldsymbol{T}}$ ma ciągłe widmo na przestrzeni $L^2_0(X, \mathcal{B}, \mu)$, czyli $\mathrm{Sp}(U^{\boldsymbol{T}}) = \{1\}$.

Wniosek 2.2 *Jeśli działania $\boldsymbol{T}_1$ i $\boldsymbol{T}_2$ są słabo mieszające, to są one cyklicznie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $E^c(U^{\boldsymbol{T}_1}) = E^c(U^{\boldsymbol{T}_2})$.*

Rozważmy teraz sytuację $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$. W pracy [36] M. Lemańczyk i Jakub Kwiatkowski pokazali, że

Twierdzenie 2.6 *Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ takiego, że $1 \in A$ istnieje automorfizm ergodyczny $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ taki, że $E(U^T) = A$. Dodatkowo, T można tak skonstruować, aby był on słabo mieszający.*

Ponadto, automorfizmy słabo mieszające z pracy [36] mają singularne widmo oraz spełniają następującą własność:

$$E^c(U^T) = E(U^T) = A.$$

Niech $\tau : (Y, \mathcal{C}, \nu) \to (Y, \mathcal{C}, \nu)$ będzie automorfizmem z widmem Lebesgue'a przeliczalnie krotnym. Rozważmy automorfizm produktowy

$$T \times \tau : (X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \times \nu) \to (X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \times \nu),\ T \times \tau(x, y) = (Tx, \tau y).$$

Niech $L^2_0(X, \mu) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(f_n)$, gdzie $\sigma_{f_1} \gg \sigma_{f_2} \gg ...$ oraz niech $L^2_0(Y, \nu) = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}(g_m)$, gdzie $\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2} = ... = \lambda$. Dla dowolnych funkcji $f \in L^2(X, \mu)$ oraz $g \in L^2(Y, \nu)$ przez $f \otimes g \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ oznaczmy ich produkt tensorowy, tzn. $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$. Wówczas

$$\sigma_{f \otimes g} = \sigma_f * \sigma_g.$$

Na mocy twierdzenia Fubiniego,

$$L^2(X \times Y, \mu \times \nu) = \mathbb{Z}(1 \otimes 1) \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(f_n \otimes 1) \oplus \mathcal{H},$$

gdzie $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią domkniętą $L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ generowaną przez funkcje $\{f_n T^k \otimes g_m \tau^l; m, n \in \mathbb{N}, k, l \in \mathbb{Z}\}$ oraz $\{1 \otimes g_m \tau^l; m \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}\}$. Ponieważ splot dowolnej miary z miarą Lebesgue'a jest równoważny mierze Lebesgue'a, więc na mocy lematu 1.3, operator $U^{T \times \tau}$ ma widmo Lebesgue'a na przestrzeni $\mathcal{H}$. Ponadto, $\sigma_{1\otimes g_m} = \lambda$ dla $m \in \mathbb{N}$, a stąd $U^{T\times\tau}$ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na $\mathcal{H}$. Ponieważ $\sigma_{f_n\otimes 1} = \sigma_{f_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc

$$\sigma_1 + \lambda + \delta_0 \gg \sigma_2 + \lambda \gg \sigma_3 + \lambda \gg ...$$

jest ciągiem spektralnym automorfizmu $T \times \tau$. Wszystkie miary σ_n są singularne, a zatem

$$E^c(T \times \tau) = E(T \times \tau) = E(T) \cup \{+\infty\}.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ takiego, że $1 \in A$ istnieje automorfizm słabo mieszający T taki, że $E(U^T) = E^c(U^T) = A$. Zatem bezpośrednio z twierdzenia 2.5 otrzymujemy

Wniosek 2.3 *Niech $\mathcal{M}_{1,C}$ będzie zbiorem operatorów unitarnych przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, które mają ciągłe widmo oraz $1 \in E(U)$. Wówczas dowolny operator ze zbioru $\mathcal{M}_{1,C}$ jest cyklicznie równoważny pewnemu opertorowi Koopmana $U^T : L^2_0(X,\mu) \to L^2_0(X,\mu)$, gdzie $T : (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ jest automorfizmem słabo mieszającym.*

Twierdzenie 2.6 zostało uogólnione na $\mathbb{Z}^d$–działania w pracy [8]. Postępując analogicznie jak w przypadku działania grupy $\mathbb{Z}$ otrzymujemy

Wniosek 2.4 *Niech $\mathcal{M}^d_{1,C}$ będzie zbiorem reprezentacji unitarnych $U : \mathbb{Z}^d \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, które mają ciągłe widmo oraz $1 \in E(U)$. Wówczas dowolna reprezentacja ze zbioru $\mathcal{M}^d_{1,C}$ jest równoważna pewnej reprezentacji Koopmana $U^T : \mathbb{Z}^d \to \mathcal{U}(L^2_0(X,\mu))$, gdzie $\boldsymbol{T} : \mathbb{Z}^d \times (X,\mathcal{B},\mu) \to (X,\mathcal{B},\mu)$ jest $\mathbb{Z}^d$–działaniem słabo mieszającym.*

3 Rozszerzenia $\mathbb{Z}^d$-obrotów

Przez $\mathbb{T}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) będziemy oznaczać d-wymiarowy torus, tzn. grupę

$$\{(z_1, ..., z_d) \in \mathbb{C}^d; |z_1| = ... = |z_d| = 1\}.$$

W rozprawie będziemy również stosować zapis addytywny, tzn. grupę $\mathbb{T}^d$ będziemy utożsamiać z grupą $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $f : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to X$ będziemy utożsamiać z funkcją $\mathbb{Z}^d$–okresową określoną na $\mathbb{R}^d$, tzn. okresową o okresie 1 ze względu na każdą współrzędną. Przez λ^d oznaczmy unormowaną miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}^d$.

Niech $\Phi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{T}^d$ będzie grupowym homomorfizmem. Wówczas

$$\Phi(m_1, ..., m_d) = (e^{2\pi i(\alpha_{11}m_1+...+\alpha_{1d}m_d)}, ..., e^{2\pi i(\alpha_{d1}m_1+...+\alpha_{dd}m_d)}),$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{jk}]_{j,k=1...d}$ jest $d \times d$ macierzą rzeczywistą. Rozważmy $\mathbb{Z}^d$-obrót $\boldsymbol{T}$ na grupie $\mathbb{T}^d$ dany wzorem

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{z} = \Phi(\boldsymbol{m})\, \boldsymbol{z} = (e^{2\pi i(\alpha_{11}m_1+...+\alpha_{1d}m_d)} z_1, ..., e^{2\pi i(\alpha_{d1}m_1+...+\alpha_{dd}m_d)} z_d),$$

gdzie $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_d) \in \mathbb{T}^d$. Następujący lemat jest łatwym wnioskiem z lematu 1.8.

Lemat 3.1 *$\boldsymbol{T}$ jest obrotem ergodycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ mamy $\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{Z}^d$. $\boldsymbol{T}$ jest obrotem wolnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ mamy $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{m}^T \notin \mathbb{Z}^d$.* ■

Oznaczmy $\boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{T}_{(0,...,0,\overset{j}{1},0,...,0)}$ dla $j = 1, ..., d$. Dla dowolnej funkcji $\psi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, ..., d$ oznaczmy

$$\psi^{(n,j)}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \psi(\boldsymbol{z})\psi(\boldsymbol{T}_j\, \boldsymbol{z})...\psi(\boldsymbol{T}_j^{n-1}\, \boldsymbol{z}) & \text{gdy} \quad n > 0 \\ 1 & \text{gdy} \quad n = 0 \\ (\psi(\boldsymbol{T}_j^{n}\, \boldsymbol{z})\psi(\boldsymbol{T}_j^{n+1}\, \boldsymbol{z})...\psi(\boldsymbol{T}_j^{-1}\, \boldsymbol{z}))^{-1} & \text{gdy} \quad n < 0. \end{cases}$$

Niech $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ będzie $\mathbb{T}$-kocyklem (dla każdego $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d$, $\phi_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{z}) = \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{z})\phi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{z})$). Wówczas ϕ można przedstawić w postaci

$$\phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z}) = \phi_1^{(m_1,1)}(\boldsymbol{T}_2^{m_2}\, \boldsymbol{T}_3^{m_3} ... \boldsymbol{T}_d^{m_d}\, \boldsymbol{z})\phi_2^{(m_2,2)}(\boldsymbol{T}_3^{m_3} ... \boldsymbol{T}_d^{m_d}\, \boldsymbol{z})...\phi_d^{(m_d,d)}(\boldsymbol{z}),$$

gdzie $\phi_j = \phi_{(0,...,0,\overset{j}{1},0,...,0)}$ dla $j = 1, ..., d$. Ponadto, dla dowolnych $j, k = 1, ..., d$ prawdziwa jest równość

$$\phi_j(\boldsymbol{T}_k\, \boldsymbol{z})\phi_j(\boldsymbol{z})^{-1} = \phi_k(\boldsymbol{T}_j\, \boldsymbol{z})\phi_k(\boldsymbol{z})^{-1}. \tag{7}$$

Załóżmy, że ϕ jest dodatkowo ciągłym kocyklem. Przedstawmy funkcje $\phi_1, ...,$ ϕ_d w postaci

$$\begin{aligned}\phi_1(e^{2\pi i x_1}, ..., e^{2\pi i x_d}) &= e^{2\pi i(\varphi_1(x_1,...,x_d)+a_{11}x_1+...+a_{1d}x_d)} \\ &\dots \\ \phi_d(e^{2\pi i x_1}, ..., e^{2\pi i x_d}) &= e^{2\pi i(\varphi_d(x_1,...,x_d)+a_{d1}x_1+...+a_{dd}x_d)},\end{aligned}$$

gdzie $A(\phi) = [a_{jk}]_{j,k=1...d} \in M_d(\mathbb{Z})$ oraz $\varphi_1, ..., \varphi_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ są $\mathbb{Z}^d$-okresowymi funkcjami ciągłymi. W powyższej reprezentacji kocyklu ϕ, macierz $A(\phi)$ jest zdefiniowana jednoznacznie, zaś funkcje $\varphi_1, ..., \varphi_d$ są jednoznaczne z dokładnością do stałej całkowitej. Macierz $A(\phi)$ będziemy nazywać *macierzą kręcenia* kocyklu ϕ.

Niech $T_j : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ dla $j = 1, ..., d$ będzie przesunięciem danym wzorem

$$T_j(x_1, ..., x_d) = (x_1 + \alpha_{1j}, ..., x_d + \alpha_{dj}).$$

Rozważmy $\mathbb{Z}^d$–obrót T na grupie $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ określony następująco:

$$T_{\boldsymbol{m}} = T_1^{m_1} \circ ... \circ T_d^{m_d},\ \boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

Z (7) otrzymujemy

$$e^{(2\pi i(\varphi_j(T_k\,\boldsymbol{x})-\varphi_j(\boldsymbol{x})+\sum_{l=1}^d a_{jl}\alpha_{lk}))} = e^{(2\pi i(\varphi_k(T_j\,\boldsymbol{x})-\varphi_k(\boldsymbol{x})+\sum_{l=1}^d a_{kl}\alpha_{lj}))},$$

a zatem

$$\varphi_j(T_k\,\boldsymbol{x}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - (\varphi_k(T_j\,\boldsymbol{x}) - \varphi_k(\boldsymbol{x})) + (A\boldsymbol{\alpha})_{jk} - (A\boldsymbol{\alpha})_{kj} = d_{jk} \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\varphi_j(T_k\,\boldsymbol{x}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - (\varphi_k(T_j\,\boldsymbol{x}) - \varphi_k(\boldsymbol{x})))d\,\boldsymbol{x} = 0,$$

więc

$$\varphi_j(T_k\,\boldsymbol{x}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) = \varphi_k(T_j\,\boldsymbol{x}) - \varphi_k(\boldsymbol{x})$$

dla $j, k = 1, ..., d$ oraz

$$(A\boldsymbol{\alpha}) - (A\boldsymbol{\alpha})^T \in M_d(\mathbb{Z}). \tag{8}$$

Zatem odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_1^{(m_1,1)}(T_2^{m_2}T_3^{m_3}...T_d^{m_d}\,\boldsymbol{x}) + \varphi_2^{(m_2,2)}(T_3^{m_3}...T_d^{m_d}\,\boldsymbol{x}) + ... + \varphi_d^{(m_d,d)}(\boldsymbol{x})$$

jest $\mathbb{R}$-kocyklem, przy czym

$$\psi^{(n,j)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \psi(\boldsymbol{x}) + \psi(T_j\,\boldsymbol{x}) + ... + \psi(T_j^{n-1}\,\boldsymbol{x}) & \text{gdy} \quad n > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad n = 0 \\ -(\psi(T_j^n\,\boldsymbol{x}) + \psi(T_j^{n+1}\,\boldsymbol{x}) + ... + \psi(T_j^{-1}\,\boldsymbol{x})) & \text{gdy} \quad n < 0 \end{cases}$$

dla dowolnej funkcji mierzalnej $\psi : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$.

Przez $L_d^2 \subset L^2(\mathbb{T}^{d+1}, \lambda^{d+1})$ oznaczmy podprzestrzeń funkcji zależnych tylko od pierwszych d współrzędnych. Niech $\boldsymbol{T}$ będzie dowolnym $\mathbb{Z}^d$–obrotem na $\mathbb{T}^d$ oraz niech $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ będzie dowolnym $\mathbb{T}$–kocyklem. Wówczas reprezentacja $U^{\boldsymbol{T}_\phi}$ na podprzestrzeni L_d^2 jest unitarnie równoważna reprezentacji $U^{\boldsymbol{T}}$, czyli ma czysto dyskretne widmo. Do całkowitego opisu reprezentacji $U^{\boldsymbol{T}_\phi}$ wystarczy zatem wiedzieć, jak działa ona na podprzestrzeni $L_d^{2\perp}$.

W przypadku $d = 1$, kocykl ϕ jest generowany przez funkcję ϕ_1. Wówczas macierz kręcenia kocyklu ϕ jest stopniem topologicznym funkcji ϕ_1. W tym przypadku znane są pewne zależności pomiędzy $A(\phi)$ i własnościami spektralnymi rozszerzenia $\boldsymbol{T}_\phi$.
Dla przykładu w pracy [30] udowodniono, że jeśli $A(\phi) \neq 0$ oraz ϕ jest kocyklem absolutnie ciągłym oraz ϕ' ma wahanie ograniczone, to $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na przestrzeni $L_d^{2\perp}$. W powyższej pracy autorzy pokazali również, że jeśli kocykl ϕ jest absolutnie ciągły, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ jest mieszające na przestrzeni $L_d^{2\perp}$. Inny warunek konieczny dla uzyskania widma Lebesgue'a przeliczalnie krotnego został przedstawiony w [28] w terminach asymptotycznych własności współczynników Fouriera kocyklu ϕ. Z drugiej strony w [16] P. Gabriel, M. Lemańczyk, P. Liardet pokazali, że jeśli $A(\phi) = 0$ oraz ϕ jest kocyklem absolutnie ciągłym, to $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo singularne.

W tym rozdziale będziemy badać własności spektralne rozszerzeń $\mathbb{Z}^d$-obrotów dla $d > 1$. Najpierw rozważmy najprostszy przypadek, gdy ϕ jest kocyklem afinicznym, tzn. funkcje $\varphi_1, ..., \varphi_d$ są stałe. Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem na działania grupy $\mathbb{Z}^d$ znanego rezultatu Anzaia ([3]).

Twierdzenie 3.2 *Niech $\boldsymbol{T}$ będzie $\mathbb{Z}^d$–obrotem na $\mathbb{T}^d$ ergodycznym i wolnym. Jeśli $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ jest kocyklem afinicznym oraz $\det A(\phi) \neq 0$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na $L_d^{2\perp}$.*

Dowód. Dla dowolnych $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$ oznaczmy

$$s_{\boldsymbol{m},q} = | \int_{\mathbb{T}^d} (\phi(\boldsymbol{z}))^d d\,\boldsymbol{z}\,| = | \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i q\,\boldsymbol{m}\,A(\phi)\,\boldsymbol{x}^T} d\,\boldsymbol{x}\,|.$$

Na mocy lematu 1.9 oraz wniosku 1.1 wystarczy pokazać, że dla każdego $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d} s^2_{\boldsymbol{m},q} < \infty.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej m oznaczmy $|m|_1 = \max(|m|, 1)$. łatwo zauważyć, że

$$s_{\boldsymbol{m},q} = \prod_{k=1}^{d} |\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q \sum_{j=1}^{d} m_j a_{jk} x} dx| = \frac{1}{|2q\pi \sum_{j=1}^{d} m_j a_{j1}|_1 ... |2q\pi \sum_{j=1}^{d} m_j a_{jd}|_1},$$

gdzie $A(\phi) = [a_{jk}]_{j,k=1,...,d}$ oraz $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d)$. Ponieważ $\det A(\phi) \neq 0$, więc

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d} s^2_{\boldsymbol{m},q} &\leqslant \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|\sum_{j=1}^{d} m_j a_{j1}|_1^2 ... |\sum_{j=1}^{d} m_j a_{jd}|_1^2} \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|m_1|_1^2 ... |m_d|_1^2} < \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

Spróbujemy uogólnić ten rezultat na większą klasę kocykli. Pokażemy, że jeśli kocykl ϕ jest słabo absolutnie ciągły oraz $\det A(\phi) \neq 0$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ jest mieszające na przestrzeni $L^{2\perp}_d$. Jednak okazuje się, że uzyskanie widma Lebesgue'a, dla szerszej klasy kocykli, w przypadku, gdy $d \geqslant 2$ nie jest łatwe, gdyż zawodzą argumenty (z dowodu dla $d = 1$) wykorzystujące twierdzenie ergodyczne dla pochodnych. Dla uzyskania widma Lebesgue'a wprowadzimy pojęcie $\mathbb{Z}^d$–obrotu skończonego typu (patrz [34]), tzn. obrotu, który jest wolno aproksymowany przez obroty wymierne. Dla $d = 2$ pokażemy, że jeśli $\det A(\phi) \neq 0$ oraz $\boldsymbol{T}$ jest $\mathbb{Z}^2$–obrotem skończonego typu, to nakładając pewne założenia na ϕ (np. ϕ klasy C^4) otrzymamy widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne.

W przypadku $\det A(\phi) = 0$ udowodnimy, że jeśli rząd$A(\phi) = 1$ (lub rząd$A(\phi) = 0$ oraz istnieje kierunek $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ taki, że automorfizm $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}$ nie jest ergodyczny) oraz ϕ jest kocyklem absolutnie ciągłym, to $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo singularne.

3.1 Mieszanie rozszerzeń $\mathbb{Z}^d$-obrotów

Definicja 3.1 Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ jest *słabo absolutnie ciągła* (w skrócie SAC), jeśli f jest ciągła oraz dla każdego punktu $(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ funkcja

$$f(x_1, ..., x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, ..., x_d) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

jest absolutnie ciągła oraz $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d)$ dla $j = 1, ..., d$.

Niech $\boldsymbol{T}$ będzie $\mathbb{Z}^d$–obrotem ergodycznym na $\mathbb{T}^d$. Mówimy, że $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ jest SAC kocyklem, jeśli $\varphi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ jest SAC kocyklem.

Uwaga. Operatory różniczkowania są przemienne z działaniem $\mathbb{Z}^d$–obrotu T, tzn. dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ oraz $j, l = 1, ..., d$,

$$(\frac{\partial}{\partial x_l} f)T_j = \frac{\partial}{\partial x_l}(fT_j) = \frac{\partial}{\partial x_l} fT_j.$$

Lemat 3.3 *Niech $\boldsymbol{T}$ będzie $\mathbb{Z}^d$–obrotem ergodycznym na $\mathbb{T}^d$. Jeśli $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ jest SAC kocyklem, to dla wszystkich $j, l = 1, ..., d$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \varphi_j^{(n,j)} = 0 \ w \ L^1(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d).$$

Dowód. Dla każdego $j = 1, ..., d$ zdefiniujmy operator

$$P_j : L^1(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d), \ P_j f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f^{(n,j)},$$

zbieżność jest w normie przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d)$. Operator jest dobrze określony, gdyż zbieżność powyższego ciągu wynika z twierdzenia ergodycznego Birkhoffa. Ponadto,

$$P_j f \circ T_j = P_j f, \ \int_{\mathbb{T}^d} P_j \, f \, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}^d} f \, d\boldsymbol{x} \ \text{ oraz } P_k(f \circ T_j) = P_k f \circ T_j$$

dla $j, k = 1, ..., d$. Ponieważ

$$\varphi_j \circ T_k - \varphi_j = \varphi_k \circ T_j - \varphi_k,$$

więc

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} \circ T_k - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} \circ T_j - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l},$$

a zatem

$$(P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}) \circ T_k - P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = (P_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}) \circ T_j - P_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = 0.$$

Stąd funkcja $P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l}$ jest T-niezmiennnicza, czyli stała. Ponieważ

$$\int_{\mathbb{T}^d} P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} d\,\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} d\,\boldsymbol{x} = 0,$$

więc otrzymujemy $P_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} = 0$. ■

Twierdzenie 3.4 *Niech* $\boldsymbol{T}$ *będzie* $\mathbb{Z}^d$*–obrotem ergodycznym na* $\mathbb{T}^d$ *oraz niech* $\phi : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ *będzie SAC kocyklem. Rozważmy* $\mathbb{T}$*–rozszerzenie działania* $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}_{\phi} : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}^d \times \mathbb{T},\ (\boldsymbol{T}_{\phi})_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z}, \omega) = (\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{z}, \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})\omega).$$

Jeżeli $\det A(\phi) \neq 0$*, to* $\boldsymbol{T}_{\phi}$ *jest działaniem mieszającym na przestrzeni* $L_d^{2\perp}$*, tzn. dla każdego* $f, g \in L_d^{2\perp}$ *mamy* $\lim_{\boldsymbol{m}\to\infty} (f(\boldsymbol{T}_{\phi})_{\boldsymbol{m}}, g) = 0$*, a zatem i ergodycznym.*

Dowód. Warunek mieszania wystarczy sprawdzić dla charakterów postaci $\chi_1(\boldsymbol{z}, \omega) = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}_1}\omega^q$, $\chi_2(\boldsymbol{z}, \omega) = \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}_2}\omega^q$, gdzie $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{Z}^d$ oraz $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ponieważ

$$\begin{aligned} |(\chi_1(\boldsymbol{T}_{\phi})_{\boldsymbol{m}}, \chi_2)| &= |\int_{\mathbb{T}^{d+1}} (\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}\, \boldsymbol{z})^{\boldsymbol{p}_1} \bar{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{p}_2} \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})^q \omega^q \bar{\omega}^q d\,\boldsymbol{z}\, d\omega| \\ &= |\int_{\mathbb{T}^d} \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})^q\, \boldsymbol{z}^{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)} d\,\boldsymbol{z}\,| \\ &= |\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i (q\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + (q\,\boldsymbol{m}\, A(\phi) + \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)\, \boldsymbol{x}^T)} d\,\boldsymbol{x}\,|, \end{aligned}$$

więc wystarczy pokazać, że

$$\lim_{\boldsymbol{m}\to\infty} |\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i (q\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + (q\,\boldsymbol{m}\, A(\phi) + \boldsymbol{p})\, \boldsymbol{x}^T)} d\,\boldsymbol{x}\,| = 0$$

dla każdego $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^d$ i $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dla uproszczenia rachunków załóżmy, że $\boldsymbol{p} = 0$. W przypadku $\boldsymbol{p} \neq 0$ dowód przybiega bardzo podobnie.

Zbiór $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ przedstawmy jako sumę (mnogościową) podzbiorów $V_1, ...,$ V_d, gdzie

$$V_l = \{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}; |\sum_{j=1}^{d} m_j a_{jl}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} |\sum_{j=1}^{d} m_j a_{jk}|\}$$

dla $l = 1, ..., d$. łatwo zauważyć, że każdy ze zbiorów V_l jest zbiorem nieskończonym. Wystarczy pokazać, że dla każdego $l = 1, ..., d$

$$\lim_{\boldsymbol{m} \to \infty, \boldsymbol{m} \in V_l} | \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i q (\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{m}\, A(\phi)\, \boldsymbol{x}^T)} d\, \boldsymbol{x}\, | = 0.$$

Najpierw pokażemy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego $l = 1, ..., d$, jeśli $\boldsymbol{m} \in V_l$, to

$$|m_k| \leqslant C |\sum_{j=1}^{d} m_j a_{jl}| \tag{9}$$

dla dowolnego $k = 1, ..., d$. Jeśli $\boldsymbol{m} \in V_l$, to wówczas $|c_k| \leqslant |c_l|$ dla każdego $k = 1, ..., d$, gdzie $c_i = \sum_{j=1}^{d} m_j a_{ji}$. Kładąc $A = A(\phi)$, ze wzoru Cramera otrzymujemy

$$\begin{aligned} |m_k| &= \frac{|c_1 \det A_{1k} + ... + c_d \det A_{dk}|}{|\det A|} \\ &\leqslant \frac{|\det A_{1k}| + ... + |\det A_{dk}|}{|\det A|} |c_l|. \end{aligned}$$

Zatem kładąc $C = \sum_{r,s=1}^{d} |\det A_{rs}| / |\det A|$ dostajemy (9). Dla $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^d$ oraz $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ połóżmy

$$s_{\boldsymbol{m},q} = | \int_{\mathbb{T}^d} (\phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z}))^q d\, \boldsymbol{z}\, | = | \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i q (\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{m}\, A(\phi)\, \boldsymbol{x}^T)} d\, \boldsymbol{x}\, |.$$

Stosując twierdzenie Fubiniego i całkowanie przez części dla całek Stieltjesa, dla każdego $\boldsymbol{m} \in V_l$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{m},q} &= | \int_{\mathbb{T}^{d-1}} e^{2\pi i q \sum_{j,k=1; k \neq l}^{d} m_j a_{jk} x_k} \\ &\quad (\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q (\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{d} m_j a_{jl} x_l)} dx_l) dx_1 ... \widehat{dx_l} ... dx_d | \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}^{d-1}} | \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q (\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{d} m_j a_{jl} x_l)} dx_l | dx_1 ... \widehat{dx_l} ... dx_d \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi|q\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|}\int_{\mathbb{T}^{d-1}}|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi iq\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})} de^{2\pi iq\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}x_l}|dx_1...\widehat{dx_l}...dx_d \\
&= \frac{1}{2\pi|q\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|}\int_{\mathbb{T}^{d-1}}|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi iq\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}x_l} de^{2\pi iq\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})}|dx_1...\widehat{dx_l}...dx_d \\
&= \frac{1}{|\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|} \\
&\quad \int_{\mathbb{T}^{d-1}}|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}x_l)}\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})dx_l|dx_1...\widehat{dx_l}...dx_d \\
&\leqslant \frac{1}{|\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|}\int_{\mathbb{T}^d}|\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})|d\,\boldsymbol{x} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^d \frac{|m_k|}{|\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|}\int_{\mathbb{T}^d}|\frac{\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k^{(m_k,k)}(\boldsymbol{x})}{m_k}|d\,\boldsymbol{x}\,.
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy ciąg liczb rzeczywistych nieujemnych $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ kładąc

$$b_n = \max_{1\leqslant k\leqslant d}\int_{\mathbb{T}^d}|\frac{\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k^{(n,k)}(\boldsymbol{x})}{n}|d\,\boldsymbol{x}\,.$$

Zauważmy, że $b_n = b_{-n}$. Korzystając z lematu 3.3 otrzymujemy, że $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Jeżeli ciąg $\{nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony przez liczbę $M > 0$, to sumując nierówności (9) dla $k = 1, ..., d$ otrzymujemy

$$|\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}\,A(\phi)\,\boldsymbol{x}^T)}d\,\boldsymbol{x}\,| \leqslant \sum_{k=1}^d \frac{|m_k b_{m_k}|}{|\sum_{j=1}^d m_j a_{jl}|} \leqslant d^2 MC\frac{1}{\sum_{k=1}^d |m_k|}.$$

Ponieważ $\lim_{\boldsymbol{m}\to\infty} 1/\sum_{k=1}^d |m_k| = 0$, więc otrzymujemy

$$\lim_{\boldsymbol{m}\to\infty,\boldsymbol{m}\in V_l}|\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}\,A(\phi)\,\boldsymbol{x}^T)}d\,\boldsymbol{x}\,| = 0.$$

Załóżmy, że ciąg $\{nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest ograniczony. Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Wówczas wystarczy pokazać, że istnieje taka liczba rzeczywista $R > 0$, że jeśli $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d) \in V_l$ oraz $\max(|m_1|, ..., |m_d|) > R$, to

$$|\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}\,A(\phi)\,\boldsymbol{x}^T)}d\,\boldsymbol{x}\,| < \varepsilon.$$

Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że dla każdego całkowitego n, $|n| \geqslant n_0$ mamy $b_n < \frac{\varepsilon}{2dC}$. Połóżmy

$$R = \min\{r \in \mathbb{N}; r \geqslant n_0, \max_{|n| \leqslant r} |nb_n| \leqslant rb_r\}.$$

Wówczas dla każdego $|n| > R$ mamy $b_n < \frac{\varepsilon}{2dC}$. Jeżeli $\boldsymbol{m} \in V_l$, przy czym $\max(|m_1|, ..., |m_d|) > R$, to zbiór

$$D = \{k \in \{1, ..., d\}; |m_k| > R\}$$

jest niepusty. Wybierzmy $k_0 \in D$. Korzystając z (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{m},q} &\leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{|m_k b_{m_k}|}{|\sum_{j=1}^{d} m_j a_{jl}|} \leqslant \sum_{k \in D} C b_{m_k} + \sum_{k \notin D} C \frac{|m_k b_{m_k}|}{|m_{k_0}|} \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \sum_{k \notin D} C \frac{R b_R}{R} \leqslant \varepsilon/2 + \sum_{k \notin D} C b_R < \varepsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Wniosek 3.1 *Jeżeli kocykl ϕ jest klasy C^1 oraz* $\det A(\phi) \neq 0$, *to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ jest mieszające na $L_d^{2\perp}$.*

3.2 Funkcje o wahaniu ograniczonym na I^2

Przez $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ oznaczmy kwadrat jednostkowy $[0,1] \times [0,1]$. Dla danego domkniętego prostokąta $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset I^2$ określmy funkcjonał liniowy $\Delta_Q^* : \mathbb{C}^{I^2} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\Delta_Q^* f = f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1) + f(a_1, b_1).$$

Podziałem P kwadratu I^2 nazywamy rozbicie I^2 na prostokąty $[\eta_{i_1}^{(1)}, \eta_{i_1+1}^{(1)}] \times [\eta_{i_2}^{(2)}, \eta_{i_2+1}^{(2)}]$ zadane przez ciągi

$$\{(\eta_0^{(j)}, \eta_1^{(j)}, ..., \eta_{m_j}^{(j)}); 0 = \eta_0^{(j)} \leqslant ... \leqslant \eta_{m_j}^{(j)} = 1 \ , \ j = 1, 2\}.$$

Dla danego podziału zdefiniujmy dla $i_1 = 0, ..., m_1 - 1$ oraz $i_2 = 0, ..., m_2 - 1$ funkcjonał liniowy $\Delta^{i_1 i_2} : \mathbb{C}^{I^2} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\begin{aligned} \Delta^{i_1 i_2} f &= \Delta^*_{[\eta_{i_1}^{(1)}, \eta_{i_1+1}^{(1)}] \times [\eta_{i_2}^{(2)}, \eta_{i_2+1}^{(2)}]} f \\ &= f(\eta_{i_1+1}^{(1)}, \eta_{i_2+1}^{(2)}) - f(\eta_{i_1+1}^{(1)}, \eta_{i_2}^{(2)}) - f(\eta_{i_1}^{(1)}, \eta_{i_2+1}^{(2)}) + f(\eta_{i_1}^{(1)}, \eta_{i_2}^{(2)}). \end{aligned}$$

Definicja 3.2 Dla dowolnej funkcji $f : I^2 \to \mathbb{C}$, *wahaniem* f nazywamy wielkość

$$\mathrm{Var}^{(2)} f = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{i_2=0}^{m_2-1} |\Delta^{i_1 i_2} f|,$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest rodziną wszystkich podziałów kwadratu I^2. Jeżeli $\mathrm{Var}^{(2)} f$ jest liczbą rzeczywistą, to mówimy, że funkcja f *ma wahanie ograniczone na I^2 w sensie Vitaliego.*

Definicja 3.3 Funkcję f ma *wahanie ograniczone w sensie Hardy'ego-Krauzego na I^2*, jeżeli f ma wahanie ograniczone na I^2 w sensie Vitaliego oraz funkcje $f(0,\cdot), f(\cdot,0) : I \to \mathbb{C}$ mają wahanie ograniczone w zwykłym sensie, gdzie $I = [0,1]$.

W dalszej części rozprawy zamiast określenia wahanie ograniczone w sensie Hardy'ego-Krauzego, dla skrótu będziemy stosowali określenie wahanie ograniczone. Oznaczmy przez BV przestrzeń funkcji o wahaniu ograniczonym na I^2. Na przestrzeni liniowej BV zdefiniujmy normę

$$\|f\|_{BV} = \sup_{\boldsymbol{x}\in I^2} |f(\boldsymbol{x})| + \mathrm{Var}_I f(\cdot,0) + \mathrm{Var}_I f(0,\cdot) + \mathrm{Var}^{(2)} f.$$

Uwaga. Jeśli funkcja ma wahanie ograniczone na I^2, to jest całkowalna w sensie Riemanna na I^2 (patrz [26] §448).

Lemat 3.5 *Niech f będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na I^2. Rozważmy funkcję $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ daną wzorem $g(t) = f(c_1 t + d_1, c_2 t + d_2)$, gdzie $(c_1 a + d_1, c_2 a + d_2), (c_1 b + d_1, c_2 b + d_2) \in I^2$. Wówczas g ma wahanie ograniczone na $[a,b]$ oraz*

$$\mathrm{Var}_{[a,b]} g \leqslant \mathrm{Var}_I f(\cdot,0) + \mathrm{Var}_I f(0,\cdot) + \mathrm{Var}^{(2)} f \leqslant \|f\|_{BV}.$$

Dowód. łatwo zauważyć, że dla dowolnego prostokąta $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2] \subset I^2$ mamy

$$(10)\quad \begin{aligned} f(a_2,b_2) - f(a_1,b_1) \;=\;& \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f + \Delta^*_{[0,a_1]\times[b_1,b_2]} f \\ &+ \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[0,b_1]} f \\ &+ f(a_2,0) - f(a_1,0) + f(0,b_2) - f(0,b_1). \end{aligned}$$

Niech $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$. Dla $k = 0, 1, ..., n$ oznaczmy $(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)}) = (c_1 t_k + d_1, c_2 t_k + d_2)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)}) - f(\tau_{k-1}^{(1)}, \tau_{k-1}^{(2)})| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (| \Delta^*_{[\tau_{k-1}^{(1)}, \tau_k^{(1)}] \times [\tau_{k-1}^{(2)}, \tau_k^{(2)}]} f \,| \\ &\quad + | \Delta^*_{[0, \tau_{k-1}^{(1)}] \times [\tau_{k-1}^{(2)}, \tau_k^{(2)}]} f \,| + | \Delta^*_{[\tau_{k-1}^{(1)}, \tau_k^{(1)}] \times [0, \tau_{k-1}^{(2)}]} f \,| \\ &\quad + |f(\tau_k^{(1)}, 0) - f(\tau_{k-1}^{(1)}, 0)| + |f(0, \tau_k^{(2)}) - f(0, \tau_{k-1}^{(2)})|) \\ &\leqslant \mathrm{Var}_I f(\cdot, 0) + \mathrm{Var}_I f(0, \cdot) + \mathrm{Var}^{(2)} f \ \blacksquare\end{aligned}$$

Wniosek 3.2 *Jeśli funkcja* $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *jest dana wzorem* $g(t) = f(\{pt + c\}, \{qt + d\})$, *gdzie* $p, q \in \mathbb{Z}$, $c, d \in \mathbb{R}$, *to*

$$\mathrm{Var}_{[0,1]} g \leqslant |p|_1 |q|_1 \|f\|_{BV}.$$

Dowód. Ponieważ $\mathrm{Var}_I g = \mathrm{Var}_I g(\cdot - c/p)$, więc możemy założyć, że $c = 0$. Dla uproszczenia rachunków załóżmy, że $p, q > 0$. Dowody w pozostałych przypadkach przebiegają podobnie. Niech R będzie podziałem odcinka $[0, 1]$ na odcinki, których końcami są punkty k/p dla $k = 0, ..., p - 1$ oraz punkty $(l - d)/q$ dla $l = [d + 1], ..., [d + 1] + q - 1$. Zatem R zawiera co najwyżej pq elementów. Dowolny odcinek $J \in R$ jest postaci $[k/p, (k + 1)/p] \cap [(l - d)/q, (l + 1 - d)/q]$, a zatem $(\{pt\}, \{qt + d\}) = (pt - k, qt + d - l) \in I^2$ dla $t \in J$. Korzystając z poprzedniego lematu otrzymujemy, że

$$\mathrm{Var}_J g \leqslant \|f\|_{BV},$$

a zatem

$$\mathrm{Var}_{[0,1]} g = \sum_{J \in R} \mathrm{Var}_J g \leqslant pq \|f\|_{BV}. \ \blacksquare$$

Niech P będzie podziałem I^2 zadanym przez ciągi $\{(\eta_0^{(j)}, \eta_1^{(j)}, ..., \eta_{m_j}^{(j)}); 0 = \eta_0^{(j)} \leqslant ... \leqslant \eta_{m_j}^{(j)} = 1, j = 1, 2\}$. Wówczas liczbę

$$\delta(P) = \max_{0 \leqslant i_1 < m_1, 0 \leqslant i_2 < m_2} |\eta_{i_1+1}^{(1)} - \eta_{i_1}^{(1)}||\eta_{i_2+1}^{(2)} - \eta_{i_2}^{(2)}|$$

nazywamy *średnicą* podziału P.

Definicja 3.4 Niech $f, g : I^2 \to \mathbb{C}$ będą dowolnymi funkcjami ograniczonymi. Jeżeli dla każdego ciągu podziałów $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zadanego przez ciągi $\{(\eta_0^{(j,k)}, \eta_1^{(j,k)}, ..., \eta_{m_{j,k}}^{(j,k)}); j = 1, 2\}$ takiego, że $\lim_{k\to\infty} \delta(P_k) = 0$ oraz dla każdego ciągu $\{\xi_{i_1 i_2}^{(k)}; i_s = 1, ..., m_{s,k} - 1,\ s = 1, 2,\ k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $\xi_{i_1 i_2}^{(k)} \in [\eta_{i_1}^{(1,k)}, \eta_{i_1+1}^{(1,k)}] \times [\eta_{i_2}^{(2,k)}, \eta_{i_2+1}^{(2,k)}]$ mamy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i_1=0}^{m_{1,k}-1} \sum_{i_2=0}^{m_{2,k}-1} f(\xi_{i_1 i_2}^{(k)}) \Delta^{i_1 i_2} g = C,$$

to liczbę C nazywamy *całką Riemanna-Stieltjesa* i oznaczamy $\int_{I^2} f dg$.

Uwaga. Jeśli f, g są funkcjami o wahaniu ograniczonym oraz przynajmniej jedna z nich jest ciągła, to całka $\int_{I^2} f dg$ istnieje (patrz [26] §448).

Przypomnijmy, że jeśli $f, g : I \to \mathbb{C}$ są funkcjami o wahaniu ograniczonym i całka $\int_I f dg$ istnieje, to

$$|\int_I f dg| \leqslant \sup_{x\in I} |f(x)| \mathrm{Var}_I g. \tag{11}$$

Bezpośrednio z definicji całki otrzymujemy również

Lemat 3.6 *Jeśli $f, g : I^2 \to \mathbb{C}$ są funkcjami o wahaniu ograniczonym w sensie Vitaliego i całka $\int_{I^2} f dg$ istnieje, to*

$$|\int_{I^2} f dg| \leqslant \sup_{x\in I^2} |f(x)|\, Var^{(2)} g.\ blacksquare$$

Twierdzenie 3.7 (o całkowaniu przez części) *(patrz [26] §448.) Niech $f, g : I^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjami o wahaniu ograniczonym oraz niech przynajmniej jedna z nich będzie funkcją ciągłą. Wówczas*

$$\begin{aligned} \int_{I^2} f dg &= \int_{I^2} g df - \int_I g(\cdot, 1) df(\cdot, 1) + \int_I g(\cdot, 0) df(\cdot, 0) \\ &\quad - \int_I g(1, \cdot) df(1, \cdot) + \int_I g(0, \cdot) df(0, \cdot) + \Delta_{I^2}^* g f. \blacksquare \end{aligned}$$

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ bedzie funkcją $\mathbb{Z}^2$–okresową. Mówimy, że f ma wahanie ograniczone, jeśli po obcięciu do kwadratu I^2 ma ona wahanie ograniczone. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ rozważmy funkcję $f_{a,b}(x_1, x_2) = (x_1 + a, x_2 + b)$. Z definicji wahania otrzymujemy, że $\mathrm{Var}^{(2)} f_{a,b} = \mathrm{Var}^{(2)} f$.

Bezpośrednio z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

Wniosek 3.3 *Niech $f, g : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjami o wahaniu ograniczonym oraz niech przynajmniej jedna z nich będzie funkcją ciągłą. Wówczas*

$$\int_{I^2} f dg = \int_{I^2} g df. \blacksquare$$

Przypomnijmy, że jeśli $f, g : I \to \mathbb{C}$ są funkcjami o wahaniu ograniczonym, to fg ma wahanie ograniczone oraz

$$\mathrm{Var}_I fg \leqslant \sup_{x \in I} |f(x)| \mathrm{Var}_I g + \sup_{x \in I} |g(x)| \mathrm{Var}_I f. \tag{12}$$

Lemat 3.8 *Jeśli $f, g \in BV$, to $fg \in BV$ oraz*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{(2)} fg \quad \leqslant & \sup_{\boldsymbol{x} \in I^2} |f(\boldsymbol{x})| \mathrm{Var}^{(2)} g + \sup_{\boldsymbol{x} \in I^2} |g(\boldsymbol{x})| \mathrm{Var}^{(2)} f \\
& + (\mathrm{Var}^{(2)} f + \mathrm{Var}_I f(0, \cdot))(\mathrm{Var}^{(2)} g + \mathrm{Var}_I g(0, \cdot)) \\
& + (\mathrm{Var}^{(2)} f + \mathrm{Var}_I f(\cdot, 0))(\mathrm{Var}^{(2)} g + \mathrm{Var}_I g(\cdot, 0)).
\end{aligned}$$

Dowód. łatwo zauważyć, że dla dowolnego prostokąta $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset I^2$ mamy

$$\begin{aligned}
\Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} fg \quad = \quad & f(a_2, b_2) \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} g + g(a_1, b_1) \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f \\
& + (f(a_2, b_2) - f(a_2, b_1))(g(a_2, b_1) - g(a_1, b_1)) \\
& + (f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2))(g(a_1, b_2) - g(a_1, b_1)) \\
= \quad & f(a_2, b_2) \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} g + g(a_1, b_1) \Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f \\
& + (\Delta^*_{[0,a_2]\times[b_1,b_2]} f + f(0, b_2) - f(0, b_1)) \\
& (\Delta^*_{[a_1,a_2]\times[0,b_1]} g + g(a_2, 0) - g(a_1, 0)) \\
& + (\Delta^*_{[a_1,a_2]\times[0,b_2]} f + f(a_2, 0) - f(a_1, 0)) \\
& (\Delta^*_{[0,a_1]\times[b_1,b_2]} g + g(0, b_2) - g(0, b_1)).
\end{aligned}$$

Niech P będzie podziałem zadanym przez ciągi

$$\{(\eta_0^{(j)}, \eta_1^{(j)}, ..., \eta_{m_j}^{(j)}); 0 = \eta_0^{(j)} \leqslant ... \leqslant \eta_{m_j}^{(j)} = 1 \ , \ j = 1, 2\}.$$

Oznaczmy

$$\Delta_{f,g} = \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{i_2=0}^{m_2-1} |\Delta^{i_1 i_2} fg|.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\Delta_{f,g} &\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in I^2}|f(\boldsymbol{x})|\sum_{i_1=0}^{m_1-1}\sum_{i_2=0}^{m_2-1}|\Delta^{i_1i_2}g| + \sup_{\boldsymbol{x}\in I^2}|g(\boldsymbol{x})|\sum_{i_1=0}^{m_1-1}\sum_{i_2=0}^{m_2-1}|\Delta^{i_1i_2}f| \\
&\quad + \sum_{i_2=0}^{m_2-1}(|\,\Delta^*_{[0,\eta^{(1)}_{i_1+1}]\times[\eta^{(2)}_{i_2},\eta^{(2)}_{i_2+1}]}f\,| + |f(0,\eta^{(2)}_{i_2+1}) - f(0,\eta^{(2)}_{i_2})|) \\
&\quad \sum_{i_1=0}^{m_1-1}(|\,\Delta^*_{[\eta^{(1)}_{i_1},\eta^{(1)}_{i_1+1}]\times[0,\eta^{(2)}_{i_2}]}g\,| + |g(\eta^{(1)}_{i_1+1},0) - g(\eta^{(1)}_{i_1},0)|) \\
&\quad + \sum_{i_1=0}^{m_1-1}(|\,\Delta^*_{[\eta^{(1)}_{i_1},\eta^{(1)}_{i_1+1}]\times[0,\eta^{(2)}_{i_2+1}]}f\,| + |f(\eta^{(1)}_{i_1+1},0) - f(\eta^{(1)}_{i_1},0)|) \\
&\quad \sum_{i_2=0}^{m_2-1}(|\,\Delta^*_{[0,\eta^{(1)}_{i_1}]\times[\eta^{(2)}_{i_2},\eta^{(2)}_{i_2+1}]}g\,| + |g(0,\eta^{(2)}_{i_2+1}) - g(0,\eta^{(2)}_{i_2})|) \\
&\leqslant \sup_{\boldsymbol{x}\in I^2}|f(\boldsymbol{x})|\mathrm{Var}^{(2)}g + \sup_{\boldsymbol{x}\in I^2}|g(\boldsymbol{x})|\mathrm{Var}^{(2)}f \\
&\quad +(\mathrm{Var}^{(2)}f + \mathrm{Var}_I f(0,\cdot))(\mathrm{Var}^{(2)}g + \mathrm{Var}_I g(0,\cdot)) \\
&\quad +(\mathrm{Var}^{(2)}f + \mathrm{Var}_I f(\cdot,0))(\mathrm{Var}^{(2)}g + \mathrm{Var}_I g(\cdot,0)). \blacksquare
\end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio otrzymujemy

Wniosek 3.4 $\|fg\|_{BV} \leqslant 2\|f\|_{BV}\|g\|_{BV}$. $\blacksquare$

Przypomnijmy, że jeśli $f : I \to \mathbb{C}$ ma wahanie ograniczone oraz istnieje liczba rzeczywista $a > 0$, dla której $0 < a \leqslant |f(x)|$ dla każdego $x \in I$, to funkcja $1/f$ ma wahanie ograniczone oraz

$$\mathrm{Var}_I(\frac{1}{f}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}_I f}{a^2}. \tag{13}$$

Lemat 3.9 *Niech $f \in BV$. Załóżmy, że istnieje liczba rzeczywista $a > 0$, dla której $0 < a \leqslant |f(\boldsymbol{x})|$ dla każdego $\boldsymbol{x} \in I^2$. Wówczas $1/f \in BV$ oraz*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{(2)}\frac{1}{f} &\leqslant \frac{\mathrm{Var}^{(2)}f}{a^2} + \frac{2(\mathrm{Var}_I f(0,\cdot) + \mathrm{Var}^{(2)}f)(\mathrm{Var}_I f(\cdot,0) + \mathrm{Var}^{(2)}f)}{a^3} \\
&\leqslant \frac{\|f\|_{BV}}{a^2} + \frac{2\|f\|^2_{BV}}{a^3}.
\end{aligned}$$

Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego prostokąta $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \subset I^2$ mamy

$$\begin{aligned}\Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]}\frac{1}{f} &= -\frac{\Delta^*_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]}f}{f(a_2,b_2)f(a_2,b_1)} \\ &\quad+\frac{(f(a_1,b_2)-f(a_1,b_1))(f(a_2,b_1)-f(a_1,b_1))}{f(a_1,b_2)f(a_2,b_1)f(a_1,b_1)} \\ &\quad+\frac{(f(a_1,b_2)-f(a_1,b_1))(f(a_2,b_2)-f(a_1,b_2))}{f(a_2,b_2)f(a_1,b_2)f(a_2,b_1)}.\end{aligned}$$

Dalsza część dowodu przebiega podobnie do dowodu lematu 3.8. ■

Definicja 3.5 Mówimy, że funkcja $f : I^2 \to \mathbb{C}$ jest *różniczkowalna w sensie Vitaliego* w punkcie $(x_1, x_2) \in I^2$, jeśli istnieje granica

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to 0 \\ h_j\neq 0, 0\leqslant x_j+h_j\leqslant 1, j=1,2}} \frac{\Delta^*_{[x_1,x_1+h_1]\times[x_2,x_2+h_2]}f}{h_1 h_2}.$$

Powyższą granicę będziemy oznaczać przez $Df(x_1, x_2)$.

Uwaga. Jeśli $f \in C^2(I^2)$, to $Df(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x})$ (patrz [41] rozdział 7 §1).

Uwaga. Jeżeli funkcja f ma wahanie ograniczone na I^2 w sensie Vitaliego, to f jest różniczkowalna prawie wszędzie w sensie Vitaliego (patrz [41] rozdział 7 §2).

Definicja 3.6 Mówimy, że funkcja $f : I^2 \to \mathbb{C}$ jest *różniczkowalna w sensie Hardy'ego-Krauzego* w punkcie $(x_1, x_2) \in I^2$, jeżeli jest ona różniczkowalna w sensie Vitaliego w punkcie (x_1, x_2) oraz istnieją pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie (x_1, x_2).

W dalszej części rozprawy dla skrótu zamiast określenia funkcja różniczkowalna w sensie Hardy'ego-Krauzego będziemy stosowali określenie funkcja różniczkowalna.

Lemat 3.10 *Niech $f : I^2 \to \mathbb{C}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $\boldsymbol{x} \in I^2$. Wówczas funkcja $\exp f : I^2 \to \mathbb{C}$ jest również różniczkowalna w punkcie $\boldsymbol{x}$ oraz*

$$D\exp f(\boldsymbol{x}) = \exp f(\boldsymbol{x})(Df(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x_1}f(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_2}f(\boldsymbol{x})).$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnych liczb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$,

$$e^a - e^b - e^c + e^d = (e^{a-b-c+d} - 1)e^c + (e^{b-d} - 1)(e^{a-b} - 1)e^d,$$

więc

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^*_{[x_1,x_1+h_1]\times[x_2,x_2+h_2]}e^f}{h_1h_2} &= e^f(x_1+h_1,x_2)\frac{e^{\Delta^*_{[x_1,x_1+h_1]\times[x_2,x_2+h_2]}f}-1}{h_1h_2} \\
&\quad + e^f(x_1,x_2)\frac{e^{f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)}-1}{h_1} \\
&\quad \frac{e^{f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)}-1}{h_2},
\end{aligned}$$

a zatem

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\Delta^*_{[x_1,x_1+h_1]\times[x_2,x_2+h_2]}\exp f}{h_1h_2} = \exp f(\boldsymbol{x})(Df(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x_1}f(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_2}f(\boldsymbol{x})),$$

gdzie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ■.

Przez $|P|$ oznaczmy pole prostokąta P.

Definicja 3.7 Mówimy, że funkcja $f : I^2 \to \mathbb{C}$ jest *absolutnie ciągła w sensie Vitaliego,* jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnej rodziny prostokątów $Q_1, ..., Q_n \subset I^2$, których wnętrza są parami rozłączne,

$$|Q_1| + ... + |Q_n| < \delta \Longrightarrow |\ \Delta^*_{Q_1}f\ | + ... + |\ \Delta^*_{Q_n}f\ | < \varepsilon.$$

Uwaga. Jeżeli funkcja jest absolutnie ciągła w sensie Vitaliego, to ma wahanie ograniczone w sensie Vitaliego (patrz [41] rozdział 7 §3).

Definicja 3.8 Mówimy, że funkcja $f : I^2 \to \mathbb{C}$ jest *absolutnie ciągła w sensie Hardy'ego-Krauzego,* jeżeli jest absolutnie ciągła w sensie Vitaliego oraz funkcje $f(0, \cdot), f(\cdot, 0) : I \to \mathbb{C}$ są absolutnie ciągłe w zwykłym sensie.

W dalszej części rozprawy zamiast określenia absolutna ciągłość w sensie Hardy'ego-Krauzego będziemy stosowali dla skrótu określenie absolutna ciągłość. Oznaczmy przez AC przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych na I^2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ będzie funkcją $\mathbb{Z}^2$–okresową. Mówimy, że f jest absolutnie ciągła, jeśli po obcięciu do kwadratu I^2 jest absolutnie ciągła.

Lemat 3.11 *(patrz [41] rozdział 7 §3 lub [26] §448[1]) Jeżeli funkcja f ma wahanie ograniczone, zaś g jest absolutnie ciągła, to*

$$\int_{I^2} f dg = \int_{I^2} f D g d\boldsymbol{x}\,. \blacksquare$$

Korzystając z (10) otrzymujemy

Lemat 3.12 *Niech $f : I^2 \to \mathbb{C}$ będzie funkcją absolutnie ciągłą. Rozważmy funkcję $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ daną wzorem $g(t) = f(c_1 t + d_1, c_2 t + d_2)$, gdzie $(c_1 a + d_1, c_2 a + d_2), (c_1 b + d_1, c_2 b + d_2) \in I^2$. Wówczas g jest funkcją absolutnie ciągłą na $[a,b]$.* $\blacksquare$

Uwaga. Natomiast, korzystając z faktu, że dla dowolnych liczb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$|e^{ia} - e^{ib} - e^{ic} + e^{id}| \leqslant |a - b - c + d| + |b - d||a - b|$$

łatwo pokazać, że jeśli $f \in AC$, to $\exp if \in AC$.

Lemat 3.13 *Niech $f : I^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją absolutnie ciągłą taką, że dla każdego punktu $(x_1, x_2) \in I^2$ mamy $f(x_1,1) - f(x_1,0), f(1,x_2) - f(0,x_2) \in \mathbb{Z}$ oraz $Df, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in BV$. Załóżmy, że istnieje liczba rzeczywista $a > 0$, dla której*

$$|Df(\boldsymbol{x}) - 2\pi i \frac{\partial}{\partial x_1} f(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} f(\boldsymbol{x})| \geqslant a > 0$$

dla dowolnego $\boldsymbol{x} \in I^2$. Wówczas

$$\begin{aligned} |\int_{I^2} \exp 2\pi i f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\,| \quad &\leqslant \quad \frac{\|Df\|_{BV} + 2\|\frac{\partial}{\partial x_1} f\|_{BV} \|\frac{\partial}{\partial x_2} f\|_{BV}}{a^2} \\ &\quad + \frac{\|Df\|_{BV}^2 + 16\pi \|\frac{\partial}{\partial x_1} f\|_{BV}^2 \|\frac{\partial}{\partial x_2} f\|_{BV}^2}{a^3}. \end{aligned}$$

Dowód. Stosując kolejno lemat 3.11 wraz z lematem 3.10, całkowanie przez części, lemat 3.6, lemat 3.9 oraz wniosek 3.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\int_{I^2} \exp 2\pi i f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\,| \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} |\int_{I^2} \frac{1}{Df - 2\pi i \frac{\partial}{\partial x_1} f \frac{\partial}{\partial x_2} f} de^{2\pi i f}| \\ &= \quad \frac{1}{2\pi} |\int_{I^2} e^{2\pi i f} d \frac{1}{Df - 2\pi i \frac{\partial}{\partial x_1} f \frac{\partial}{\partial x_2} f}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\mathrm{Var}^{(2)}\frac{1}{Df-2\pi i\frac{\partial}{\partial x_1}f\frac{\partial}{\partial x_2}f}\\
&\leqslant \frac{\|Df-2\pi i\frac{\partial}{\partial x_1}f\frac{\partial}{\partial x_2}f\|_{BV}}{2\pi a^2}\\
&\quad+\frac{\|Df-2\pi i\frac{\partial}{\partial x_1}f\frac{\partial}{\partial x_2}f\|_{BV}^2}{\pi a^3}\\
&\leqslant \frac{\|Df\|_{BV}+2\|\frac{\partial}{\partial x_1}f\|_{BV}\|\frac{\partial}{\partial x_2}f\|_{BV}}{a^2}\\
&\quad+\frac{\|Df\|_{BV}^2+16\pi\|\frac{\partial}{\partial x_1}f\|_{BV}^2\|\frac{\partial}{\partial x_2}f\|_{BV}^2}{a^3},
\end{aligned}
$$

co kończy dowód lematu. ■

3.3 Nierówności Koksmy i aproksymacje diofantyczne na torusie

Definicja 3.9 Niech $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^N$ będzie ciągiem elementów przestrzeni $\mathbb{R}^d$. *Dyskrepancją* ciągu $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^N$ nazywamy liczbę

$$D_N^*(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_N)=\sup_{J\in\mathcal{J}}|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\chi_J(\{\boldsymbol{x}_n\})-\lambda^d(J)|,$$

gdzie $\mathcal{J}$ jest rodziną kostek postaci $\prod_{i=1}^d[0,\beta_i)$, gdzie $0\leqslant\beta_i<1$ dla $i=1,...,d$ oraz $\{\boldsymbol{x}\}=(\{x_1\},...,\{x_d\})$ dla $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_d)$.

Uwaga. Jeśli liczby $\gamma_1,...,\gamma_d,1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$, to

$$\lim_{N\to\infty}D_N^*(\{n\boldsymbol{\gamma}\}_{n=1}^N)=0,$$

gdzie $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,...,\gamma_d)$ (patrz [34] rozdział 2 §1).

Dla $\boldsymbol{h}=(h_1,...,h_d)\in\mathbb{Z}^d$ i $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_d)\in\mathbb{R}^d$ oznaczmy

$$<\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}>=\sum_{j=1}^d h_jx_j \text{ i } |\boldsymbol{h}|=\prod_{j=1}^d\max(|h_j|,1).$$

Definicja 3.10 Niech $\gamma_1, ..., \gamma_d, 1$ będą liczbami rzeczywistymi niezależnymi nad $\mathbb{Q}$. Mówimy, że $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_d)$ jest *typu* $\eta \geqslant 1$, jeżeli istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $\boldsymbol{h} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ mamy

$$\| < \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\gamma} > \| \geqslant \frac{C}{|\boldsymbol{h}|^\eta}.$$

Mówimy, że $\boldsymbol{\gamma}$ jest *skończonego typu*, gdy $\boldsymbol{\gamma}$ jest typu η dla pewnego $\eta \geqslant 1$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że

Lemat 3.14 *Dla dowolnego* $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{Z}^d$ *oraz dowolnej liczby* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *następujące warunki są równoważne:*

(i) $\boldsymbol{\gamma}$ *jest typu* η,

(ii) $-\boldsymbol{\gamma}$ *jest typu* η,

(iii) $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{h}$ *jest typu* η,

(iv) $m\boldsymbol{\gamma}$ *jest typu* η. ■

Lemat 3.15 *(patrz [34] rozdział 2 §3) Jeżeli* $\gamma \in \mathbb{R}$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$ *są typu* η, *to istnieje stała* $L > 0$ *taka, że dla dowolnej liczby naturalnej* $N \geqslant 2$,

$$D_N^*(\{n\gamma\}_{n=1}^N) \leqslant \frac{L}{N^{1/\eta}},$$

$$D_N^*(\{(n\gamma_1, n\gamma_2)\}_{n=1}^N) \leqslant \frac{L \log N}{N^{1/(2\eta-1)}}. \blacksquare$$

Jeżeli liczby $\gamma_1, \gamma_2, 1$ są liniowo zależne nad $\mathbb{Q}$ oraz $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to istnieją liczby całkowite t_1, t_2, t_3 $(t_1, t_2 \neq 0)$ takie, że $t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 = t_3$. Wybierzmy $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $t_1 s_2 - t_2 s_1 = \mathrm{nwd}(t_1, t_2)$. Jeśli wybierzemy inną parę $s_1', s_2' \in \mathbb{Z}$ spełniającą równość $t_1 s_2' - t_2 s_1' = \mathrm{nwd}(t_1, t_2)$, to istnieje liczba całkowita k tak, że $s_1' - s_1 = kt_1$ oraz $s_2' - s_2 = kt_2$. Wówczas

$$s_1'\gamma_1 + s_2'\gamma_2 - s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 = k(t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2) \in \mathbb{Z}.$$

Definicja 3.11 Niech $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ będzie parą liczb rzeczywistych, z których przynajmniej jedna nie jest wymierna. Wówczas mówimy, że $\boldsymbol{\gamma}$ jest*z typu* η

(i) dla $\gamma_1, \gamma_2, 1$ niezależnych nad $\mathbb{Q}$, jeśli $\boldsymbol{\gamma}$ jest typu η w zwykłym sensie (Definicja 3.10);

(ii) dla $\gamma_1, \gamma_2, 1$ zależnych nad $\mathbb{Q}$ takich, że $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jeśli liczba $s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2$ jest typu η w zwykłym sensie dla $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ spełniających równość $t_1 s_2 - t_2 s_1 = \mathrm{nwd}(t_1, t_2)$.

(iii) dla $\gamma_2 \in \mathbb{Q}$ ($\gamma_1 \in \mathbb{Q}$), jeśli liczba γ_1 (γ_2) jest typu η w zwykłym sensie.

Na mocy lematu 3.14, definicja w punkcie (ii) jest niezależna od wyboru liczb t_1, t_2, t_3 oraz s_1, s_2. Zatem dla dowolnego $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{Z}^2$ oraz dowolnej liczby $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ następujące warunki są równoważne:

(i) $\boldsymbol{\gamma}$ jest typu η,

(ii) $-\boldsymbol{\gamma}$ jest typu η,

(iii) $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{h}$ jest typu η,

(iv) $m\boldsymbol{\gamma}$ jest typu η.

Twierdzenie 3.16 (nierówność Denjoy-Koksmy) *Niech $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym oraz niech $\{x_n\}_{n=1}^N$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wówczas*

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_{\mathbb{T}} f(x)dx| \leqslant D_N^*(\{x_n\}_{n=1}^N)\mathrm{Var}_I f.$$

Twierdzenie 3.17 (nierówność Koksmy-Hlawki) *Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ ma wahanie ograniczone. Niech $\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})\}_{n=1}^N$ będzie ciągiem elementów z $\mathbb{R}^2$. Wówczas*

$$\begin{aligned}|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) - \int_{\mathbb{T}^2} f(\boldsymbol{x})d\,\boldsymbol{x}\,| \;\leqslant\;& D_N^*(\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^N)\mathrm{Var}_I f(\cdot, 1)\\ &+D_N^*(\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^N)\mathrm{Var}_I f(1, \cdot)\\ &+D_N^*(\{(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})\}_{n=1}^N)\mathrm{Var}^{(2)} f.\end{aligned}$$

Dowody powyższych twierdzeń można znaleźć w [34] rozdział 2 §5.

Twierdzenie 3.18 *Załóżmy, że* $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$ *jest typu* η*. Wówczas istnieje operator liniowy* $P_\gamma : L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \to L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ *oraz stała* $L > 0$ *taka, że dla dowolnej funkcji* $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ *o wahaniu ograniczonym oraz dla dowolnej liczby naturalnej* $N \geqslant 2$ *mamy*

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\boldsymbol{x}+n\boldsymbol{\gamma}) - P_\gamma f(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|f\|_{BV}.$$

Ponadto, $P_\gamma f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}) = P_\gamma f(\boldsymbol{x})$ *oraz* $\int_{\mathbb{T}^2} P_\gamma f(\boldsymbol{x})d\,\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}^2} f(\boldsymbol{x})d\,\boldsymbol{x}$*.*

Dowód. W dowodzie będziemy stosowali oznaczenie

$$S_N = |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(\boldsymbol{x}+n\boldsymbol{\gamma}) - P_\gamma f(\boldsymbol{x})|.$$

PRZYPADEK 1. Jeżeli $\gamma_1, \gamma_2, 1$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$, to kładąc $P_\gamma f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{T}^2} f d\lambda$, na mocy nierówności Koksmy-Hlawki oraz lematu 3.15 otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_N &\leqslant \frac{L_1}{N^{1/\eta}}(\mathrm{Var}_I f(\cdot,1) + \mathrm{Var}_I f(1,\cdot)) + \frac{L_1\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\mathrm{Var}^{(2)} f \\ &\leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|f\|_{BV}, \end{aligned}$$

gdzie L_1 jest stałą z lematu 3.15, zaś $L = 3L_1$.

PRZYPADEK 2. Jeżeli $\gamma_2 = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, to na mocy nierówności Denjoy-Koksmy oraz lematu 3.15 dla dowolnej liczby naturalnej M oraz dowolnego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ otrzymujemy

$$|\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} f(x_1 + nq\gamma_1, x_2 + np) - \int_{\mathbb{T}} f(x, x_2)dx| \leqslant \frac{L_1}{M^{1/\eta}}\mathrm{Var}_I f(\cdot, x_2).$$

Podstawmy w powyższej nierówności $x_2 + jp/q$ za x_2 oraz funkcję $f_{j\gamma_1,0}$ za funkcję f dla $j = 0, ..., q-1$. Następnie sumując stronami uzyskane w ten sposób q nierówności oraz dzieląc obie strony przez q otrzymujemy

$$|\frac{1}{qM}\sum_{n=0}^{qM-1} f(x_1 + n\gamma_1, x_2 + n\frac{p}{q}) - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{T}} f(x, x_2 + j\frac{p}{q})dx|$$

$$\leqslant \frac{L_1}{qM^{1/\eta}}\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Var}_I f(\cdot, x_2 + j\frac{p}{q}).$$

Dla dowolnego naturalnego N wybierzmy liczbę naturalną M taką, że $qM \leqslant N < (q+1)M$. Wówczas kładąc $P_\gamma f(x_1,x_2) = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{T}} f(x, x_2 + jp/q)dx$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
S_N &= \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(x_1+n\gamma_1, x_2+n\frac{p}{q}) - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{T}} f(x, x_2+j\frac{p}{q})dx\Big| \\
&\leqslant \Big|\frac{1}{qM}\sum_{n=0}^{qM-1} f(x_1+n\gamma_1, x_2+n\frac{p}{q}) - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\int_{\mathbb{T}} f(x, x_2+j\frac{p}{q})dx\Big| \\
&\quad +\Big|\frac{qM-N}{NqM}\sum_{n=0}^{qM-1} f(x_1+n\gamma_1, x_2+n\frac{p}{q})\Big| \\
&\quad +\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=qM}^{N-1} f(x_1+n\gamma_1, x_2+n\frac{p}{q})\Big| \\
&\leqslant \frac{2q}{N}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^2}|f(\boldsymbol{x})| + \frac{L_1}{qM^{1/\eta}}\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Var}_I f(\cdot, x_2+j\frac{p}{q}),
\end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned}
S_N &\leqslant \frac{2q}{N}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^2}|f(\boldsymbol{x})| + \frac{2L_1}{N^{1/\eta}}\sum_{j=1}^{q}\mathrm{Var}_I f(\cdot, x_2+j\frac{p}{q}) \\
&\leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|f\|_{BV},
\end{aligned} \tag{14}$$

gdzie $L = 2q(L_1+1)$.

PRZYPADEK 3. Jeżeli $\gamma_1, \gamma_2, 1$ są zależne nad $\mathbb{Q}$ oraz $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, to istnieją liczby całkowite t_1, t_2, t_3 $(t_1, t_2 \neq 0)$ takie, że $t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 = t_3$. Wybierzmy liczby $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $t_1s_2 - t_2s_1 = \mathrm{nwd}(t_1,t_2)$. Połóżmy $t = \mathrm{nwd}(t_1,t_2)$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1/t & t_2/t \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $B \in M_2(\mathbb{Z})$ oraz $\det B = 1$, więc $B : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ jest automorfizmem grupowym, gdzie zapis $B(x_1,x_2)$ będziemy rozumieli jako mnożenie macierzy B przez $(x_1,x_2)^T$. Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, $g = fB^{-1}$. Wówczas funkcja $g(\cdot, x_2) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ma wahanie ograniczone dla każdego $x_2 \in \mathbb{R}$. Podstawiając w (14) za γ_1 liczbę $s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2$, za f funkcję g, za q liczbę t, za p liczbę t_3 oraz korzystając z wniosku 3.2, dla dowolnego punktu

$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ otrzymujemy

$$|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(y_1 + n(s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2), y_2 + n\frac{t_3}{t}) - \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\int_{\mathbb{T}} g(x, y_2 + j\frac{t_3}{t})dx| \leqslant$$

$$\frac{2t}{N}\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^2}|g(\boldsymbol{x})| + \frac{2L_1}{N^{1/\eta}}\sum_{j=1}^{t}\mathrm{Var}_I g(\cdot, y_2 + j\frac{t_3}{t}) \leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|f\|_{BV},$$

gdzie $L = 2t(1 + L_1|t_1||t_2|)$. Połóżmy

$$P_\gamma f(x_1, x_2) = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\int_{\mathbb{T}} fB^{-1}(x, \frac{t_1x_1 + t_2x_2 + jt_3}{t})dx.$$

Zauważmy, że

$$B(x_1 + n\gamma_1, x_2 + n\gamma_2)^T =$$
$$(s_1x_1 + s_2x_2 + n(s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2), (t_1x_1 + t_2x_2)/t + n(t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2)/t)^T.$$

Wówczas dla dowolnego punktu (x_1, x_2), stosując oznaczenia $y_1 = s_1x_1 + s_2x_2$ oraz $y_2 = (t_1x_1 + t_2x_2)/t$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_N &= |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(x_1 + n\gamma_1, x_2 + n\gamma_2) - \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\int_{\mathbb{T}} fB^{-1}(x, y_2 + j\frac{t_3}{t})dx| \\ &= |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} gB(x_1 + n\gamma_1, x_2 + n\gamma_2) - \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\int_{\mathbb{T}} g(x, y_2 + j\frac{t_3}{t})dx| \\ &= |\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(y_1 + n(s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2), y_2 + n\frac{t_3}{t}) - \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\int_{\mathbb{T}} g(x, y_2 + j\frac{t_3}{t})dx| \\ &\leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|f\|_{BV}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

3.4 Widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne rozszerzeń $\mathbb{Z}^2$–obrotów

Niech $\boldsymbol{T} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ będzie $\mathbb{Z}^2$–obrotem ergodycznym i wolnym,

$$\boldsymbol{T}_{(m_1,m_2)}(z_1, z_2) = (e^{2\pi i(\alpha_{11}m_1 + \alpha_{12}m_2)}z_1, e^{2\pi i(\alpha_{21}m_1 + \alpha_{22}m_2)}z_2).$$

Definicja 3.12 Mówimy, że obrót $\boldsymbol{T}$ jest *typu* η, jeśli obie pary $(\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $(\alpha_{12}, \alpha_{22})$ są typu η. Obrót $\boldsymbol{T}$ będziemy nazywać *skończonego typu*, jeśli $\boldsymbol{T}$ jest typu η dla pewnego $\eta \geqslant 1$.

Lemat 3.19 *Niech $\phi : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ będzie $\mathbb{T}$–kocyklem ciągłym wyznaczonym przez funkcje*

$$\phi_{(1,0)}(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}) = e^{2\pi i(\varphi_1(x_1,x_2)+a_{11}x_1+a_{12}x_2)},$$
$$\phi_{(0,1)}(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}) = e^{2\pi i(\varphi_2(x_1,x_2)+a_{21}x_1+a_{22}x_2)}.$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{T}$ jest typu η. Wówczas istnieje stała $L > 0$ taka, że jeśli ϕ jest kocyklem absolutnie ciągłym, dla którego kocykle $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ mają wahanie ograniczone, to dla każdego całkowitego $|N| \geqslant 2$ oraz $j, k = 1, 2$

$$|\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j^{(N,j)}| \leqslant \frac{L\log|N|}{|N|^{1/(2\eta-1)}}\|\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j\|_{BV}. \tag{15}$$

Dowód. Zauważmy, że nierówność (15) wystarczy udowodnić dla N naturalnych. Na mocy twierdzenia 3.18,

$$|\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j^{(N,j)} - P_{(\alpha_{1j},\alpha_{2j})}(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j)| \leqslant \frac{L\log N}{N^{1/(2\eta-1)}}\|\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j\|_{BV}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$P_{(\alpha_{1j},\alpha_{2j})}(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j) = 0.$$

Powyższą równość udowodnimy dla $j = 1$. Dla $j = 2$ dowód przebiega symetrycznie. Dla $j = 1, 2$ przez $T_j : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ oznaczmy obrót

$$T_j(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha_{1j}, x_2 + \alpha_{2j}).$$

łatwo zauważyć, że $P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}(fT_2) = (P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}f)T_2$. Ponieważ

$$\varphi_2 \circ T_1 - \varphi_2 = \varphi_1 \circ T_2 - \varphi_1,$$

więc

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} \circ T_1 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} \circ T_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k},$$

a stąd

$$0 = P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} \circ T_1 - P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} = P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} \circ T_2 - P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}.$$

Zatem funkcja $P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}$ jest T_1 oraz T_2-niezmiennnicza, czyli stała. Ponieważ

$$\int_{\mathbb{T}^2} P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{T}^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}dx_1dx_2 = 0,$$

więc otrzymujemy $P_{(\alpha_{11},\alpha_{21})}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} = 0$. ■

Twierdzenie 3.20 *Załóżmy, że* $\boldsymbol{T}$ *jest* $\mathbb{Z}^2$*–obrotem na* $\mathbb{T}^2$ *ergodycznym, wolnym i skończonego typu. Niech* $\phi : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ *będzie* $\mathbb{T}$*-kocyklem absolutnie ciągłym, dla którego kocykle* $D\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ *mają wahanie ograniczone. Jeśli* $\det A(\phi) \neq 0$*, to rozszerzenie* $\boldsymbol{T}_\phi$ *ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na* $L_2^{2\perp}$*.*

Dowód. Oznaczmy

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{m},q} &= \left|\int_{\mathbb{T}^2} \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})^q d\,\boldsymbol{z}\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{T}^2} e^{2\pi i q(\varphi_{\boldsymbol{m}}(x_1,x_2)+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1+(m_1a_{12}+m_2a_{22})x_2)}dx_1dx_2\right|. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 1.9 oraz wniosku 1.1 wystarczy pokazać, że dla każdego $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2} s_{\boldsymbol{m},q}^2 < \infty.$$

Niech liczba $\eta \geqslant 1$ będzie typem obrotu $\boldsymbol{T}$. Wybierzmy liczbę rzeczywistą $a > 0$ taką, że $\max(1-1/(2\eta-1), 3/4) < a < 1$. Wówczas istnieje stała $K > 0$ taka, że

$$\frac{\log N}{N^{1/(2\eta-1)}} \leqslant K N^{a-1} \tag{16}$$

dla każdego naturalnego N. Oznaczmy

$$V_1 = \{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}; |m_1a_{11}+m_2a_{21}| \geqslant |m_1a_{12}+m_2a_{22}|\}$$

oraz

$$V_2 = \{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}; |m_1a_{11}+m_2a_{21}| \leqslant |m_1a_{12}+m_2a_{22}|\}.$$

Pokażemy, że $\sum_{\boldsymbol{m}\in V_1} s_{\boldsymbol{m},q}^2 < \infty$ oraz $\sum_{\boldsymbol{m}\in V_2} s_{\boldsymbol{m},q}^2 < \infty$. Jeśli $\boldsymbol{m} \in V_1$, to

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{m},q} &= \left|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q(m_1a_{12}+m_2a_{22})x_2}\left(\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q(\varphi_{\boldsymbol{m}}(x_1,x_2)+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1)}dx_1\right)dx_2\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}}\left|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q(\varphi_{\boldsymbol{m}}(x_1,x_2)+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1)}dx_1\right|dx_2. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla $\boldsymbol{m} \in V_1$ mamy

$$\max(|m_1|, |m_2|) \leqslant C|m_1a_{11}+m_2a_{21}| \tag{17}$$

(patrz nierówność (9) w dowodzie twierdzenia 3.4). Korzystając z lematu 3.19, nierówności (16) oraz (17), dla dowolnego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})|}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} &\leqslant \frac{|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1^{(m_1,1)}(\boldsymbol{T}_{(0,m_2)}\,\boldsymbol{x})|+|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2^{(m_2,2)}(\boldsymbol{x})|}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} \\
&\leqslant KL\frac{|m_1|^a\|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1\|_{BV}+|m_2|^a\|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2\|_{BV}}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} \\
&\leqslant \frac{M}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^{1-a}},
\end{aligned}$$

gdzie $M = 1+KLC^a(\|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1\|_{BV}+\|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2\|_{BV})$. Jeśli $(2M)^{1/(1-a)} \leqslant |m_1a_{11}+m_2a_{21}|$, to

$$|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{1}{2}|m_1a_{11}+m_2a_{21}|,$$

a stąd

$$|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+m_1a_{11}+m_2a_{21}| \geqslant \frac{1}{2}|m_1a_{11}+m_2a_{21}|. \tag{18}$$

Korzystając kolejno z całkowania przez części, (11), (13) wraz z nierównością (18), lematu 3.5 oraz nierówności (17) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
s_{\boldsymbol{m},q} &\leqslant \frac{1}{2\pi|q|}\int_{\mathbb{T}}|\int_{\mathbb{T}}\frac{de^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1)}}{\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+m_1a_{11}+m_2a_{21}}|dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi|q|}\int_{\mathbb{T}}|\int_{\mathbb{T}}e^{2\pi iq(\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1)} \\
&\quad d\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})+m_1a_{11}+m_2a_{21}}|dx_2 \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|q|}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{Var}_I\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\cdot,x_2)+m_1a_{11}+m_2a_{21}}dx_2 \\
&\leqslant \frac{2}{\pi|q|}\int_{\mathbb{T}}\frac{\mathrm{Var}_I\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\cdot,x_2)}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2}dx_2 \\
&\leqslant \frac{2}{\pi|q|}\frac{|m_1|+|m_2|}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2}(\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV}+\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV}),
\end{aligned}$$

a stąd

$$s_{\boldsymbol{m},q} \leqslant \frac{R}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} \tag{19}$$

dla dowolnych $\boldsymbol{m} \in V_1$ takich, że $(2M)^{1/(1-a)} \leqslant |m_1 a_{11} + m_2 a_{21}|$, gdzie $R = \frac{4C}{\pi|q|}(\|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV} + \|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV})$. Dla dowonego $s \in \mathbb{N}$ przez V_{1s} oznaczmy zbiór

$$\{\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}; s|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}| \leqslant |m_1 a_{11} + m_2 a_{21}| \leqslant (s+1)|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|\}.$$

Wówczas V_1 jest sumą (mnogościową) zbiorów V_{1s}. Jeśli $\boldsymbol{m} \in V_{1s}$ oraz spełniony jest warunek

$$(4Ms)^{1/(1-a)} \leqslant |m_1 a_{11} + m_2 a_{21}|, \tag{20}$$

to

$$\begin{aligned}
\frac{|\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})|}{|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|} &\leqslant \frac{|\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_1^{(m_1,1)}(\boldsymbol{T}_{(0,m_2)}\boldsymbol{x})| + |\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2^{(m_2,2)}(\boldsymbol{x})|}{|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|} \\
&\leqslant KL\frac{|m_1|^a \|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1\|_{BV} + |m_2|^a \|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_2\|_{BV}}{|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|} \\
&\leqslant M\frac{|m_1 a_{11} + m_2 a_{21}|^a}{|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|} \\
&\leqslant \frac{2sM}{|m_1 a_{11} + m_2 a_{21}|^{1-a}} \leqslant \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

a zatem

$$|\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + m_1 a_{12} + m_2 a_{22}| \geqslant \frac{1}{2}|m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|.$$

Z powyższej nierówności oraz z (18) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + m_1 a_{11} + m_2 a_{21}||\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + m_1 a_{12} + m_2 a_{22}| \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{4}|m_1 a_{11} + m_2 a_{21}||m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|,
\end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned}
&|qD\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) - 2\pi i q^2(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + m_1 a_{11} + m_2 a_{21})(\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x}) + m_1 a_{12} + m_2 a_{22})| \\
&\qquad \geqslant q^2|m_1 a_{11} + m_2 a_{21}||m_1 a_{12} + m_2 a_{22}|.
\end{aligned}$$

Korzystając z lematu 3.13 dla funkcji $q(\varphi_{\boldsymbol{m}}(x_1, x_2) + (m_1 a_{11} + m_2 a_{21})x_1 + (m_1 a_{12} + m_2 a_{22})x_2)$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
s_{\boldsymbol{m},q} &\leqslant \frac{\|D\varphi_{\boldsymbol{m}}\|_{BV} + 2\|\frac{\partial\varphi_{\boldsymbol{m}}}{\partial x_1}\|_{BV}\|\frac{\partial\varphi_{\boldsymbol{m}}}{\partial x_2}\|_{BV}}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^2} \\
&\quad+\frac{\|D\varphi_{\boldsymbol{m}}\|_{BV}^2 + 16\pi\|\frac{\partial\varphi_{\boldsymbol{m}}}{\partial x_1}\|_{BV}^2\|\frac{\partial\varphi_{\boldsymbol{m}}}{\partial x_2}\|_{BV}^2}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^3|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3} \\
&\leqslant \frac{|m_1|\|D\varphi_1\|_{BV} + |m_2|\|D\varphi_2\|_{BV}}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^2} \\
&\quad+\frac{2(|m_1|\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV} + |m_2|\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV})(|m_1|\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\|_{BV} + |m_2|\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\|_{BV})}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^2} \\
&\quad+\frac{(|m_1|\|D\varphi_1\|_{BV} + |m_2|\|D\varphi_2\|_{BV})^2}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^3|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3} \\
&\quad+\frac{16\pi(|m_1|\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV} + |m_2|\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV})^2(|m_1|\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\|_{BV} + |m_2|\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\|_{BV})^2}{q^2|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^3|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3} \\
&\leqslant R_1\frac{|m_1|^2+|m_2|^2}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^2} \\
&\quad+R_2\frac{(|m_1|^2+|m_2|^2)^2}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^3|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{q^2}(\|D\varphi_1\|_{BV} + \|D\varphi_2\|_{BV} \\
&\quad+2\sqrt{\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV}^2 + \|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV}^2}\sqrt{\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\|_{BV}^2 + \|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\|_{BV}^2})
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{q^2}((\|D\varphi_1\|_{BV} + \|D\varphi_2\|_{BV})^2 \\
&\quad+16\pi(\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\|_{BV}^2 + \|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\|_{BV}^2)(\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\|_{BV}^2 + \|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\|_{BV}^2)).
\end{aligned}
$$

Natomiast stosując nierówność (17) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
s_{\boldsymbol{m},q} &\leqslant \frac{2R_1C^2}{|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^2} + \frac{4R_2C^4|m_1a_{11}+m_2a_{21}|}{|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3} \\
&\leqslant \frac{R_*|m_1a_{11}+m_2a_{21}|}{|m_1a_{12}+m_2a_{22}|^3},
\end{aligned}
$$

gdzie $R_* = 2R_1C^2 + 4R_2C^4$. Ponieważ (20), więc

$$\begin{aligned}\frac{1}{|m_1a_{12}+m_2a_{22}|} &\leqslant \frac{2s}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} \leqslant \frac{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^{1-a}}{2M|m_1a_{11}+m_2a_{21}|} \\ &\leqslant \frac{1}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^a}.\end{aligned}$$

Zatem

$$s_{\boldsymbol{m},q} \leqslant \frac{R_*}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^{3a-1}} \tag{21}$$

dla $\boldsymbol{m} \in V_{1s}$ takich, że $|m_1a_{11}+m_2a_{21}| \geqslant (4Ms)^{1/(1-a)}$.

Połóżmy

$$U_1 = \sum_{s=1}^{\infty}\{\boldsymbol{m} \in V_{1s}; |m_1a_{11}+m_2a_{21}| \geqslant (4Ms)^{1/(1-a)}\}.$$

Wówczas zbiór $\{\boldsymbol{m} \in U_1; |m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k\}$ ma co najwyżej $2(2k+1)$ elementów. Istotnie, niech $\boldsymbol{m} \in U_1$ oraz $|m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k$. Ponieważ $\boldsymbol{m} \in V_1$, więc $|m_1a_{12}+m_2a_{22}| \leqslant k$, zaś par (m_1, m_2) spełniających $|m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k$ oraz $|m_1a_{12}+m_2a_{22}| \leqslant k$ jest co najwyżej $2(2k+1)$. Ponieważ zachodzi (21), więc

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in U_1} s^2_{\boldsymbol{m},q} \leqslant \sum_{\boldsymbol{m}\in U_1} \frac{R_*^2}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^{6a-2}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5R_*^2k}{k^{6a-2}} \leqslant 5R_*^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{6a-3}} < \infty,$$

gdyż $6a-3 > 3/2$. Dla każdego naturalnego s połóżmy

$$W_{1s} = \{\boldsymbol{m} \in V_{1s}; (2M)^{1/(1-a)} \leqslant |m_1a_{11}+m_2a_{21}| \leqslant (4Ms)^{1/(1-a)}\}$$

oraz niech $W_1 = \sum_{s=1}^{\infty} W_{1s}$. Zauważmy, że zbiór $\{\boldsymbol{m} \in V_{1s}; |m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k\}$ ma co najwyżej $4k/s(s+1)$ elementów. Istotnie, jeśli $\boldsymbol{m} \in V_{1s}$ oraz $|m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k$, to $k/(s+1) \leqslant |m_1a_{12}+m_2a_{22}| \leqslant k/s$. Natomiast par (m_1, m_2) spełniających $|m_1a_{11}+m_2a_{21}| = k$ oraz $k/(s+1) \leqslant |m_1a_{12}+m_2a_{22}| \leqslant k/s$ jest co najwyżej $4(\frac{k}{s} - \frac{k}{s+1}) = 4k/s(s+1)$. Zatem korzystając z (19) otrzymujemy

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in W_{1s}} s^2_{\boldsymbol{m},q} \leqslant \sum_{\boldsymbol{m}\in W_{1s}} \frac{R^2}{|m_1a_{11}+m_2a_{21}|^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant\; R^2 \sum_{k=1}^{[(4Ms)^{1/(1-a)}]} \frac{1}{k^2}\frac{4k}{s(s+1)} \\
&\leqslant\; 8R^2 \frac{\ln(4Ms)^{1/(1-a)}}{s(s+1)} \\
&=\; \frac{8R^2}{1-a}\frac{\ln(4Ms)}{s(s+1)}.
\end{aligned}
$$

Stąd wynika, że

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in W_1} s^2_{\boldsymbol{m},q} \leqslant \frac{8R^2}{1-a}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln(4Ms)}{s(s+1)} < \infty.$$

Ponieważ zbiór $V_1 \setminus (W_1 \cup U_1) = \{\boldsymbol{m} \in V_1; |m_1 a_{11} + m_2 a_{21}| < (2M)^{1/(1-a)}\}$ jest skończony, więc $\sum_{\boldsymbol{m}\in V_1} s^2_{\boldsymbol{m},q} < \infty$ oraz podobnie $\sum_{\boldsymbol{m}\in V_2} s^2_{\boldsymbol{m},q} < \infty$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Wniosek 3.5 *Jeśli obrót $\boldsymbol{T}$ jest skończonego typu, ϕ jest kocyklem klasy C^4 oraz $\det A(\phi) \neq 0$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo Lebesgue'a przeliczalnie krotne na $L_2^{2\perp}$.*

3.5 Przypadek $\det A(\phi) = 0$

W tym podrozdziale przeanalizujemy własności spektralne rozszerzeń w przypadku, gdy $\det A(\phi) = 0$.

Niech α będzie dowolną liczbą niewymierną, zaś $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem jej mianowników. W dalszej części będzie nam potrzebny następujący lemat.

Lemat 3.21 *(patrz [24] str.73 oraz str.189) Jeśli funkcja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone, to dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$,*

$$(22)\quad |f(x) + f(x+\alpha) + ... + f(x + (q_n - 1)\alpha) - q_n \int_{\mathbb{T}} f(t)dt| \leqslant \mathrm{Var}_I f.$$

Ponadto, jeśli funkcja f jest absolutnie ciągła, to ciąg

$$f(\cdot) + f(\cdot + \alpha) + ... + f(\cdot + (q_n - 1)\alpha) - q_n \int_{\mathbb{T}} f(t)dt$$

zbiega jednostajnie do zera. ■

Lemat 3.22 *Niech* $\boldsymbol{T} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *będzie* $\mathbb{Z}^2$*–obrotem ergodycznym i wolnym takim, że automorfizm* $\boldsymbol{T}_{(k_1,k_2)}$ *nie jest ergodyczny dla pewnego kierunku* $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$*. Jeśli* $\phi : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ *jest* $\mathbb{T}$*–kocyklem absolutnie ciągłym takim, że*

$$k_1 a_{11} + k_2 a_{21} = k_1 a_{12} + k_2 a_{22} = 0 \quad (A(\phi) = [a_{ij}]_{i,j=1,2}),$$

to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ *ma widmo singularne oraz nie jest mieszające na* $L_2^{2\perp}$.

Dowód. Niech

$$\boldsymbol{T}_{(m_1,m_2)}(z_1, z_2) = (e^{2\pi i(\alpha_{11}m_1+\alpha_{12}m_2)} z_1, e^{2\pi i(\alpha_{21}m_1+\alpha_{22}m_2)} z_2).$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{m},r} &= \int_{\mathbb{T}^2} \phi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{z})^r d\,\boldsymbol{z} \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} e^{2\pi i r(\varphi_m(x_1,x_2)+(m_1a_{11}+m_2a_{21})x_1+(m_1a_{12}+m_2a_{22})x_2)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Na mocy lematu 1.9 oraz twierdzenia 1.12, wystarczy znaleźć ciąg $\{\boldsymbol{m}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ w $\mathbb{Z}^2$, dla którego $\boldsymbol{m}^{(n)} \to \infty$, gdy $n \to \infty$ oraz liczbę $c \in \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} c_{\boldsymbol{m}^{(n)},r} = e^{2\pi i r c}.$$

Połóżmy $\alpha_1 = \alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2$ oraz $\alpha_2 = \alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2$. Ponieważ obrót $\boldsymbol{T}_{(k_1,k_2)}$ nie jest ergodyczny, więc istnieją liczby całkowite l_1, l_2, l_3, ($l_1^2 + l_2^2 \neq 0$) takie, że $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = l_3$. Wybierzmy liczby $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $s_1 l_2 - s_2 l_1 = \mathrm{nwd}(l_1, l_2)$. Połóżmy $l = \mathrm{nwd}(l_1, l_2)$ oraz $\alpha = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2$. Niech

$$B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ l_1/l & l_2/l \end{bmatrix}.$$

Wówczas $B \in M_2(\mathbb{Z})$ oraz $\det B = 1$. Rozważmy operator liniowy $P : L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \to L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ określonym wzorem

$$Pf(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{T}} fB^{-1}(x, \frac{l_1x_1 + l_2x_2}{l})dx.$$

Niech $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją absolutnie ciągłą. Wówczas dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $fB^{-1}(\cdot, y) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &B(x_1 + jl\alpha_1, x_2 + jl\alpha_2)^T \\ &= (s_1x_1 + s_2x_2 + jl(s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2), (l_1x_1 + l_2x_2)/l + j(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2))^T \\ &= (s_1x_1 + s_2x_2 + jl\alpha, (l_1x_1 + l_2x_2)/l + jl_3)^T. \end{aligned}$$

Przez p_n/q_n oznaczmy n–ty redukt liczby $l\alpha$. Wówczas

$$\sum_{j=0}^{q_n-1} f(x_1+jl\alpha_1, x_2+jl\alpha_2) - q_n Pf(x_1,x_2)$$

$$= \sum_{j=0}^{q_n-1} fB^{-1}(y_1+jl\alpha, y_2) - q_n \int_{\mathbb{T}} fB^{-1}(x,y_2)dx,$$

gdzie $y_1 = s_1x_1 + s_2x_2$ i $y_2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)/l$. Korzystając z lematu 3.21 dla dowolnego $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ otrzymujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{q_n-1} f(x_1+jl\alpha_1, x_2+jl\alpha_2) - q_n Pf(x_1,x_2) = 0.$$

Ponadto, korzystając z nierówności (22) oraz lematu 3.5 mamy

$$|\sum_{j=0}^{q_n-1} f(x_1+jl\alpha_1, x_2+jl\alpha_2) - q_n Pf(x_1,x_2)| \leqslant \mathrm{Var}_I fB^{-1}(\cdot,y_2) \leqslant C\|f\|_{BV}.$$

Stosując twierdzenie Lebesgue'a otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} |\sum_{j=0}^{q_n-1} f(x_1+jl\alpha_1, x_2+jl\alpha_2) - q_n Pf(x_1,x_2)| dx_1dx_2 = 0. \tag{23}$$

Ponieważ

$$\varphi_{(nlk_1,nlk_2)}(x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{(lk_1,lk_2)}(x_1+jl\alpha_1, x_2+jl\alpha_2),$$

więc na mocy (23), ciąg $\{\varphi_{(q_nlk_1,q_nlk_2)} - q_nP\varphi_{(lk_1,lk_2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do zera w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Ponieważ

$$Pf\circ T_{(lk_1,lk_2)} = Pf,\ \int_{\mathbb{T}^2} Pf\,d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{T}^2} f\,d\boldsymbol{x},\ P(f\circ T_{\boldsymbol{m}}) = Pf\circ T_{\boldsymbol{m}}$$

oraz

$$\varphi_{(lk_1,lk_2)}T_{\boldsymbol{m}} - \varphi_{(lk_1,lk_2)} = \varphi_{\boldsymbol{m}}T_{(lk_1,lk_2)} - \varphi_{\boldsymbol{m}}$$

dla każdego $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2$, więc

$$P\varphi_{(lk_1,lk_2)}T_{\boldsymbol{m}} - P\varphi_{(lk_1,lk_2)} = P\varphi_{\boldsymbol{m}}T_{(lk_1,lk_2)} - P\varphi_{\boldsymbol{m}} = 0.$$

Stąd funkcja $P\varphi_{(lk_1,lk_2)}$ jest T niezmiennicza, czyli stała równa $\int_{\mathbb{T}^2}\varphi_{(lk_1,lk_2)}d\lambda$.

Połóżmy $\boldsymbol{m}^{(n)}=(q_nlk_1,q_nlk_2)$. Wówczas ciąg

$$\varphi_{\boldsymbol{m}^{(n)}}-q_n\int_{\mathbb{T}^2}\varphi_{(lk_1,lk_2)}d\lambda$$

zbiega do zera w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Dla prostoty zapisu możemy założyć, że

$$\lim_{n\to\infty}e^{2\pi iq_n\int_{\mathbb{T}^2}\varphi_{(lk_1,lk_2)}d\lambda}=e^{2\pi ic}.$$

Wówczas dla każdego $r\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}^2}\phi_{\boldsymbol{m}^{(n)}}(\boldsymbol{z})^r d\boldsymbol{z} &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}^2}e^{2\pi ir\varphi_{\boldsymbol{m}^{(n)}}(x_1,x_2)}\\ &= \lim_{n\to\infty}e^{2\pi irq_n\int_{\mathbb{T}^2}\varphi_{(lk_1,lk_2)}d\lambda}=e^{2\pi irc},\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. ■

Wprost z poprzedniego lematu otrzymujemy

Twierdzenie 3.23 *Niech $\boldsymbol{T}:\mathbb{Z}^2\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ będzie $\mathbb{Z}^2$–obrotem ergodycznym i wolnym oraz niech $\phi:\mathbb{Z}^2\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}$ będzie $\mathbb{T}$–kocyklem absolutnie ciągłym o zerowej macierzy kręcenia. Jeżeli automorfizm $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}$ nie jest ergodyczny dla pewnego kierunku $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}$, to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo singularne oraz nie jest mieszające na $L_2^{2\perp}$.*

Twierdzenie 3.24 *Niech $\boldsymbol{T}:\mathbb{Z}^2\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ będzie $\mathbb{Z}^2$–obrotem ergodycznym i wolnym. Jeśli $\phi:\mathbb{Z}^2\times\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}$ jest $\mathbb{T}$–kocyklem absolutnie ciągłym oraz* rząd$A(\phi)=1$, *to rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo singularne oraz nie jest mieszające na $L_2^{2\perp}$.*

Dowód. Na mocy (8), $(A\boldsymbol{\alpha})-(A\boldsymbol{\alpha})^T\in M_2(\mathbb{Z})$, czyli

$$a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22}-a_{21}\alpha_{11}-a_{22}\alpha_{21}=d\in\mathbb{Z}.$$

Ponieważ $A(\phi)\neq 0$, więc przynajmniej jedna z par $(a_{21},-a_{11})$, $(a_{22},-a_{12})$ nie jest równa zero. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy założyć, że $(a_{21},-a_{11})\neq(0,0)$. Połóżmy $k_1=a_{21}$ oraz $k_2=-a_{11}$. Zatem $k_1a_{11}+k_2a_{21}=0$. Ponieważ $\det A(\phi)=0$, więc również $k_1a_{12}+k_2a_{22}=0$. Oznaczmy $\alpha_1=\alpha_{11}k_1+\alpha_{12}k_2$ oraz $\alpha_2=\alpha_{21}k_1+\alpha_{22}k_2$. Wówczas

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2 &= a_{11}(\alpha_{11}a_{21}-\alpha_{12}a_{11})+a_{12}(\alpha_{21}a_{21}-\alpha_{22}a_{11})\\ &= a_{11}(\alpha_{22}a_{12}-\alpha_{21}a_{22}-d)+a_{12}(\alpha_{21}a_{21}-\alpha_{22}a_{11})\\ &= -\alpha_{21}\det A(\phi)-da_{11}\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 &= a_{21}(\alpha_{11}a_{21} - \alpha_{12}a_{11}) + a_{22}(\alpha_{21}a_{21} - \alpha_{22}a_{11}) \\ &= a_{21}(\alpha_{22}a_{12} - \alpha_{21}a_{22} - d) + a_{22}(\alpha_{21}a_{21} - \alpha_{22}a_{11}) \\ &= -\alpha_{22}\det A(\phi) - da_{21} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ponieważ rząd $A(\phi) = 1$, więc przynajmniej jedna z par (a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}) nie jest równa zero. Zatem obrót $\boldsymbol{T}_{(k_1,k_2)}$ nie jest ergodyczny. W ten sposób pokazaliśmy, że spełnione są założenia lematu 3.22, co kończy dowód twierdzenia. ■

Powyższe twierdzenia wskazywałyby, że w przypadku $d = 2$, jeśli wyznacznik macierzy kręcenia kocyklu ϕ jest równy zero, to $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo singularne i nie jest mieszające. Jednak twierdzenia te nie obejmują jednego przypadku, gdy dla każdego kierunku $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ automorfizm $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}$ jest ergodyczny oraz $A(\phi) = 0$. Wówczas nie wiemy jakie widmo jest możliwe. Być może istnieje kocykl ϕ absolutnie ciągły taki, że $A(\phi) = 0$, dla którego rozszerzenie $\boldsymbol{T}_\phi$ ma widmo Lebesgue'a na $L_2^{2\perp}$.

Uwaga. Istnieje przykład kocyklu analitycznego ϕ o zerowej macierzy kręcenia takiego, że dla dowolnego kierunku $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ automorfizm $(\boldsymbol{T}_\phi)_{\boldsymbol{m}}$ jest mieszający na $L_2^{2\perp}$. Przykład ten można uzyskać modyfikując przykład, z pracy [9], funkcji analitycznych $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ oraz liczb niewymiernych α, β takich, że automorfizm

$$T : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3,\ \ T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \alpha, x_2 + \beta, \psi_1(x_1) + \psi_2(x_2) + x_3)$$

jest mieszający na przestrzeni $L_2^{2\perp}$.

4 Układy dynamiczne z widmem prostym, singularnym i ciągłym

W tym rozdziale będziemy badać własności spektralne skośnych produktów Anzaia

$$T_\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,\ T_\varphi(z,\omega) = (Tz, \varphi(z)\omega),$$

gdzie $Tz = e^{2\pi i\alpha}z$ jest obrotem niewymiernym, zaś $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest funkcją ze skończoną liczbą punktów nieciągłości oraz sumą skoków równą zero.

Funkcję $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ nazywamy *kawałkami absolutnie ciągłą* (w skrócie KAC), jeśli istnieją punkty $\beta_0, ..., \beta_k \in \mathbb{T}$ takie, że $f|_{(\beta_j,\beta_{j+1})}$ jest funkcją absolutnie ciągłą dla $j = 0, ..., k$ ($\beta_{k+1} = \beta_0$). Oznaczmy

$$f_+(x) = \lim_{y\to x^+} f(y) \text{ oraz } f_-(x) = \lim_{y\to x^-} f(y).$$

Niech $d_j = f_+(\beta_j) - f_-(\beta_j)$, $j = 0, ..., k$ oraz przez

$$S(f) = \sum_{j=0}^{k} d_j = -\sum_{j=0}^{k} f_-(\beta_j) - f_+(\beta_j) = -\int_{\mathbb{T}} f'(x)d\lambda(x)$$

oznaczmy sumę skoków funkcji f. Mówimy, że kocykl $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest kawałkami absolutnie ciągły, gdy istnieje funkcja KAC $\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ taka, że $\varphi(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i\tilde{\varphi}(x)}$. Ponieważ liczba $S(\tilde{\varphi})$ nie zależy od wyboru funkcji $\tilde{\varphi}$, więc możemy zdefiniować sumę skoków kocyklu φ jako $S(\tilde{\varphi})$ i będziemy oznaczać $S(\varphi)$.

W pracy [29], A. Iwanik, M. Lemańczyk i C. Mauduit pokazali, że jeśli φ jest kocyklem KAC oraz $S(\varphi) \neq 0$, to automorfizm T_φ ma widmo ciągłe na $L_1^{2\perp}$. Ponadto, autorzy udowodnili, że jeśli φ jest kocyklem KAC z jedynym punktem nieciągłości oraz $S(\varphi) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, to T_φ ma widmo ciągłe i singularne na $L_1^{2\perp}$.

W tym rozdziale będziemy badać własności spektralne skośnych produktów T_φ, gdy funkcja kawałkami absolutnie ciągła φ nie jest ciągła oraz $S(\varphi) = 0$. W tej klasie funkcji nie istnieje ogólne twierdzenie klasyfikujące spektralnie odpowiadające im produkty skośne. Zauważmy dla przykładu, że dla kocyklu kawałkami stałego, jeśli wszystkie skoki są wymierne, tzn. $d_0, d_1, ..., d_k \in \mathbb{Q}$ lub wszystkie punkty nieciągłości są wielokrotnościami liczby α, tzn. $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{Z}\alpha$, to T_φ nie ma ciągłego widma na $L_1^{2\perp}$. My natomiast pokażemy, że dla dużej części kocykli KAC o sumie skoków zero, automorfizm T_φ ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L_1^{2\perp}$. Dla dowolnej liczby naturalnej k oznaczmy

$$\mathbb{T}_+^k = \{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{T}^k; 0 \leqslant x_1 < x_2 < ... < x_k < 1\}.$$

Twierdzenie 4.1 *Załóżmy, że $\alpha \in [0,1)$ jest liczbą niewymierną o nieograniczonych ilorazach. Wówczas dla dowolnego naturalnego k istnieje zbiór $B = \mathbb{T}_+^{k+1}$ λ^{k+1}–p.w. taki, że dla każdego kocyklu KAC φ o sumie skoków zero, jeżeli φ ma przynajmniej jeden skok niewymierny oraz $(\beta_0, ..., \beta_k) \in B$ ($0 \leqslant \beta_0 < ... < \beta_k < 1$ są wszystkimi punktami nieciągłości φ), to T_φ ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L_1^{2\perp}$.*

Do dowodu powyższego twierdzenia użyjemy między innymi pojęcia δ-słabego mieszania. Niech $\mathcal{H}$ będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, zaś δ liczbą zespoloną $|\delta| \leqslant 1$. Mówimy, że operator unitarny $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest *δ-słabo mieszający*, jeżeli istnieje rosnący ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych taki, że dla każdego elementu $f \in \mathcal{H}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} (U^{q_n} f, f) = \delta \|f\|^2.$$

Twierdzenie 4.2 *(patrz [17]) Niech $U_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$ będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_i$ oraz niech σ_i będzie jego maksymalnym typem spektralnym, i=1,2. Jeżeli operatory U_1 i U_2 są odpowiednio δ_1 i δ_2–słabo mieszające wzdłuż tego samego ciągu $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $\delta_1 \neq \delta_2$, to $\sigma_1 \perp \sigma_2$.* ■

Koncepcję δ-słabego mieszanie będziemy stosować dla operatora U^{T_φ}, a dokładniej dla rodziny operatorów $\{U_\varphi^{(m)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$, gdzie $U_\varphi^{(m)} f(z) = \varphi(z)^m f(Tz)$ (patrz lemat 1.9).

Najpierw rozważmy ogólną sytuację, gdy $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ jest dowolnym automorfizmem zachowującym miarę standardowej przestrzeni borelowskiej $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Będziemy mówili, że rosnący ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych jest *czasem sztywności* dla automorfizmu T, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{q_n} A \triangle A) = 0.$$

Dla dowolnej funkcji $\phi : X \to \mathbb{T}$ oraz liczby całkowitej q oznaczmy

$$\phi^{(q)}(x) = \begin{cases} \phi(x)\phi(Tx)...\phi(T^{q-1}x) & \text{dla} \quad q \geqslant 0 \\ 1 & \text{dla} \quad q = 0 \\ (\phi(T^q x)\phi(T^{q+1}x)...\phi(T^{-1}x))^{-1} & \text{dla} \quad q < 0. \end{cases}$$

Natomiast dla dowolnej funkcji $\psi : X \to \mathbb{R}$ oraz liczby całkowitej q oznaczmy

$$\psi^{(q)}(x) = \begin{cases} \psi(x) + \psi(Tx) + ... + \psi(T^{q-1}x) & \text{dla } \; q \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } \; q = 0 \\ -(\psi(T^q x) + \psi(T^{q+1}x) + ... + \psi(T^{-1}x)) & \text{dla } \; q < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 4.3 *(patrz [17]) Załóżmy, że ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest czasem sztywności automorfizmu T. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi^{(q_n)}(x) d\mu(x) = \delta,$$

to operator

$$U_\phi : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu),\ U_\phi f(x) = \phi(x) f(Tx)$$

jest δ–słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Wniosek 4.1 *Załóżmy, że ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest czasem sztywności automorfizmu T. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi^{(q_n)}(x) d\mu(x) = \delta$$

oraz $0 < |\delta| < 1$, to operator U_ϕ ma widmo singularne i ciągłe.

Dowód. Załóżmy, że widmo operatora U_ϕ nie jest singularne. Wówczas istnieje niezerowa funkcja $f \in L^2(X, \mu)$, której miara spektralna σ_f jest absolutnie ciągła. Zatem

$$\delta \|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} (U_\phi^{q_n} f, f) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma_f}(q_n) = 0,$$

co stoi w sprzeczności z założeniem $0 \neq \delta$.

Załóżmy, że widmo operatora U_ϕ nie jest ciągłe. Wówczas istnieje funkcja mierzalna $f : X \to \mathbb{T}$ oraz liczba rzeczywista γ taka, że

$$\phi(x) f(Tx) = e^{2\pi i\gamma} f(x).$$

Ponieważ $\phi^{(q_n)}(x) f(T^{q_n}x) = e^{2\pi i q_n \gamma} f(x)$, więc

$$\begin{aligned} |\delta| &= \lim_{n\to\infty} |(U_\phi^{q_n} f, f)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |\int_X \phi^{(q_n)}(x) f(T^{q_n}x) \overline{f(x)} d\mu(x)| = \lim_{n\to\infty} \int_X |f|^2 d\mu = 1, \end{aligned}$$

co stoi w sprzeczności z założeniem $1 \neq |\delta|$. ■

4.1 Pewne własności ergodycznych $\mathbb{Z}^k$-działań i ich zastosowania

Niech $\boldsymbol{T} : \mathbb{Z}^k \times (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie działaniem grupy $\mathbb{Z}^k$ na standardowej przestrzeni borelowskiej $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Kostką w grupie $\mathbb{Z}^k$ będziemy nazywać dowolny zbiór postaci

$$\prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i] = \{(m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}^k; a_i \leqslant m_i \leqslant b_i, i = 1, .., k\},$$

gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$. Niech M będzie kostką postaci $\prod_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$, gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., k$. Wówczas oznaczmy $\nu(M) = \min\limits_{i=1,...,k}(b_i - a_i)$. *Wieżą* dla działania $\boldsymbol{T}$ będziemy nazywać dowolną parę (A, M), gdzie $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, zaś M jest kostką w $\mathbb{Z}^k$ taką, że dla dowolnych $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in M$, $\boldsymbol{m}_1 \neq \boldsymbol{m}_2$ mamy

$$\mu(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}_1}A \cap \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}_2}A) = 0.$$

Następujący lemat jest ogólną wersją lematu 2.2 z [19].

Lemat 4.4 *Załóżmy, że $\boldsymbol{T}$ jest ergodycznym $\mathbb{Z}^k$–działaniem oraz niech $\{(A_n, M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wież dla działania $\boldsymbol{T}$ takim, że*

$$\lim_{n\to\infty}\nu(M_n) = \infty \ \textit{oraz} \ \lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_n) = \varepsilon > 0.$$

Wówczas dla dowolnego $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_n} g d\mu = \varepsilon\int_X g d\mu.$$

Dowód. Niech $M_n = \prod_{i=1}^{k}[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$, gdzie $a_i^{(n)}, b_i^{(n)} \in \mathbb{Z}$. Rozważmy ciąg $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni $L^\infty(X, \mu)$ określony wzorem

$$\phi_n = \mathbf{1}_{\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_n}.$$

Wówczas $\|\phi_n\|_{L^\infty} = 1$. Ponieważ kula domknięta jest zbiorem zwartym w $L^1 - L^\infty$–topologii, więc możemy wybrać podciąg $\{\phi_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ zbieżny w $L^1 - L^\infty$–topologii do funkcji $\phi \in L^\infty(X, \mu)$. Wówczas dla dowolnego $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ mamy

$$\lim_{l\to\infty}\int_X g\ \phi_{n_l}d\mu = \int_X g\ \phi d\mu$$

oraz

$$\lim_{l\to\infty}\int_X g\ \phi_{n_l}\circ \boldsymbol{T}_{\,i}d\mu=\int_X g\ \phi\circ \boldsymbol{T}_{\,i}d\mu,$$

$i=1,...,k$. Z drugiej strony

$$\int_X g\ \phi_{n_l}d\mu-\int_X g\ \phi_{n_l}\circ \boldsymbol{T}_{\,i}d\mu=\int_{\bigcup_{\boldsymbol{m}\in K_1^l}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_{n_l}} gd\mu-\int_{\bigcup_{\boldsymbol{m}\in K_2^l}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_{n_l}} gd\mu,$$

gdzie K_1^l, K_2^l są kostkami takimi, że

$$\text{card } K_1^l=\text{card } K_2^l=\frac{\text{card } M_{n_l}}{b_i^{(n_l)}-a_i^{(n_l)}+1}.$$

Stąd dla $j=1,2$ mamy

$$\mu(\bigcup_{\boldsymbol{m}\in K_j^l}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_{n_l})\leqslant \text{card } K_j^l\mu(A_{n_l})\leqslant\frac{1}{\nu(M_{n_l})}\to 0,$$

gdy $l\to\infty$. W ten sposób otrzymujemy

$$\lim_{l\to\infty}(\int_X g\ \phi_{n_l}d\mu-\int_X g\ \phi_{n_l}\circ \boldsymbol{T}_{\,i}d\mu)=0.$$

Stąd wynika, że dla każdego $g\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$,

$$\int_X g\ \phi d\mu=\int_X g\ \phi\circ \boldsymbol{T}_{\,i}d\mu,$$

$i=1,...,k$. Zatem

$$\phi=\phi\circ \boldsymbol{T}_{\,i},\quad \mu-\text{p.w. dla } i=1,...,k.$$

Na mocy ergodyczności $\boldsymbol{T}$ otrzymujemy $\phi=\varepsilon$, gdyż $\int_X\phi d\mu=\varepsilon$. Zatem ciąg $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ słabo zbiega w przestrzeni $L^\infty(X,\mu)$ do ε, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 4.5 *Załóżmy, że* $\boldsymbol{T}$ *jest ergodycznym* $\mathbb{Z}^k$*-działaniem standardowej przestrzeni borelowskiej* $(X,\mathcal{B},\mu)$*. Niech* $\{(A_n,M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem wież dla działania* $\boldsymbol{T}$ *takim, że*

$$\lim_{n\to\infty}\nu(M_n)=\infty\ \textit{oraz}\ \lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_n)=\varepsilon>0.$$

Wówczas dla μ*-p.w.* $x\in X$ *istnieje podciąg* $\{(A_{n_j},M_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ *wież taki, że dla dowolnego naturalnego* j *mamy*

$$x\in\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_j}}\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}}A_{n_j}.$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że

$$\mu(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n>l} \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_n) = 1 \text{ a więc, że } \mu(\bigcup_{n>l} \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_n) = 1$$

dla każdego naturalnego l. Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą $0 < \delta < 1$. Dla ustalonego naturalnego l będziemy konstruować rosnący ciąg liczb naturalnych $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ oraz dwa ciągi $\{B_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{C_j\}_{j=0}^{\infty}$ zbiorów borelowskich w następujący sposób. Najpierw wybierzmy liczbę naturalną $n_0 > l$ oraz połóżmy

$$B_0 = \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_0}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_0},\ C_0 = B_0^c.$$

Korzystając z lematu 4.4 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_0 \cap \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_n) = \varepsilon\mu(C_0).$$

Zatem możemy wybrać liczbę naturalną $n_1 > n_0$ tak, żeby

$$\mu(C_0 \cap \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_1}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_1}) > \delta\varepsilon\mu(C_0).$$

Wówczas połóżmy

$$B_1 = C_0 \cap \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_1}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_1},\ C_1 = (B_0 \cup B_1)^c.$$

Następnie indukcyjnie dla danych n_j, B_j, C_j wybierzmy $n_{j+1} > n_j$ tak, aby

$$\mu(C_j \cap \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_{j+1}}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_{j+1}}) > \delta\varepsilon\mu(C_j)$$

oraz połóżmy

$$B_{j+1} = C_j \cap \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_{j+1}}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_{j+1}},\ C_{j+1} = (B_0 \cup ... \cup B_{j+1})^c.$$

Ponieważ $B_{j+1} \subset C_j$ dla $j \geqslant 0$ oraz $B_i \cap C_j = \emptyset$ dla $0 \leqslant i \leqslant j$, więc zbiory B_j są parami rozłączne. Ponadto,

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} B_j \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_{n_j}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_{n_j} \subset \bigcup_{n>l} \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_n.$$

Ponieważ $\mu(B_{j+1}) > \delta\varepsilon\mu(C_j)$, więc

$$\mu(C_{j+1}) = 1 - \sum_{i=1}^{j+1} \mu(B_i) = \mu(C_j) - \mu(B_{j+1}) < (1 - \delta\varepsilon)\mu(C_j),$$

a stąd $\mu(C_j) < (1 - \delta\varepsilon)^j \mu(C_0)$. Zatem

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} B_j) = 1 - \mu(C_n) \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0.$$

Stąd $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = 1$, co w konsekwencji daje $\mu(\bigcup_{n>l} \bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_n} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_n) = 1$. ■

Dla dowolnej liczby niewymiernej α o nieograniczonych ilorazach rozważmy obrót ergodyczny

$$T : (\mathbb{T}, \lambda) \to (\mathbb{T}, \lambda),\ Tx = x + \alpha.$$

Wybierzmy podciąg $\{q_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ mianowników liczby α tak, aby

$$\lim_{j\to\infty} q_{n_j} \|q_{n_j}\alpha\| = 0.$$

Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że n_j są liczbami parzystymi. Wówczas

$$([0, \{a_{n_j+1} q_{n_j}\alpha\}), \{0, ..., q_{n_j} - 1\})$$

jest wieżą dla obrotu T oraz $q_{n_j}\{a_{n_j+1} q_{n_j}\alpha\} \to 1$, gdy $j \to \infty$. Niech $X = \mathbb{T}^k$, $\mu = \lambda^k$. Rozważmy ergodyczne $\mathbb{Z}^k$-działanie produktowe $\boldsymbol{T} : \mathbb{Z}^k \times (X, \mu) \to (X, \mu)$ określone wzorem

$$\boldsymbol{T}_{(m_1,...,m_k)} = T^{m_1} \times ... \times T^{m_k},$$

gdzie $(m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}^k$.

Lemat 4.6 *Niech $W = \prod_{i=1}^k [v_i, w_i]$ będzie dowolną domkniętą kostką w $\mathbb{T}^k$ o niezerowej objętości, zaś $0 < \tau < 1$. Wówczas dla λ^k-p.w. $(\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{T}^k$ istnieje podciąg $\{n_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ taki, że*

$$\lim_{l\to\infty} (\{q_{n_{j_l}}\beta_1\}, ..., \{q_{n_{j_l}}\beta_k\}) = (\gamma_1, ..., \gamma_k) \in W$$

oraz dla każdego naturalnego l

$$\beta_1, ..., \beta_k \in \bigcup_{t=[\tau q_{n_l}]+1}^{q_{n_l}-1} T^t[0, \{a_{n_{j_l}+1} q_{n_{j_l}}\alpha\}).$$

Dowód. Dla dowolnego naturalnego j oznaczmy

$$A_j = \prod_{i=1}^{k} [v_i\{a_{n_j+1}q_{n_j}\alpha\}, w_i\{a_{n_j+1}q_{n_j}\alpha\}]$$

oraz

$$M_j = (\tau q_{n_j}, q_{n_j}) \times ... \times (\tau q_{n_j}, q_{n_j}).$$

Wówczas $\{(A_j, M_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem wież dla działania $\boldsymbol{T}$ takim, że

$$\lim_{j\to\infty} \mu(\bigcup_{\boldsymbol{m}\in M_j} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{m}} A_j) = (1-\tau)^k \lambda^k(W) > 0 \text{ oraz } \lim_{j\to\infty} \nu(M_j) = \infty.$$

Korzystając z twierdzenia 4.5, dla λ^k-p.w. $(\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{T}^k$ istnieje podciąg $\{n_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ oraz istnieje ciąg $\{t_i^{(l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych $\tau q_{n_{j_l}} < t_i^{(l)} < q_{n_{j_l}}$, $i = 1, ..., k$ taki, że

$$\beta_i \in T^{t_i^{(l)}}[v_i\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\}, w_i\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\}) =$$

$$[v_i\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\} + t_i^{(l)}\alpha, w_i\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\} + t_i^{(l)}\alpha).$$

Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy założyć, że

$$\lim_{l\to\infty} (\{q_{n_{j_l}}\beta_1\}, ..., \{q_{n_{j_l}}\beta_k\}) = (\gamma_1, ..., \gamma_k).$$

Wówczas

$$\{q_{n_{j_l}}\beta_i\} \in [v_i q_{n_{j_l}}\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\} + t_i^{(l)}\|q_{n_{j_l}}\alpha\|, w_i q_{n_{j_l}}\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\} + t_i^{(l)}\|q_{n_{j_l}}\alpha\|).$$

Ponieważ

$$t_i^{(l)}\|q_{n_{j_l}}\alpha\| \leqslant q_{n_{j_l}}\|q_{n_{j_l}}\alpha\| \to 0 \text{ oraz } q_{n_{j_l}}\{a_{n_{j_l}+1}q_{n_{j_l}}\alpha\} \to 1,$$

gdy $l \to \infty$, więc $v_i \leqslant \gamma_i \leqslant w_i$ dla $i = 1, ..., k$, czyli $(\gamma_1, ..., \gamma_k) \in W$. ■

4.2 Dowód twierdzenia 4.1

Zauważmy, że wystarczy pokazać, że istnieje zbiór $B = \mathbb{T}_+^k$ λ^k–p.w. taki, że jeśli $\beta_0 = 0$ oraz $(\beta_1, ..., \beta_k) \in B$, to T_φ ma widmo proste, ciągłe i singularne na $L_1^{2\perp}$. Przez Γ oznaczmy zbiór

$$\{(\gamma_1, ..., \gamma_k) \in \mathbb{T}^k; \forall_{m_1,...,m_k\in\{0,\pm1,\pm2\}}\ m_1\gamma_1 + ... + m_k\gamma_k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_1, ..., m_k = 0\}.$$

Ponieważ zbiór Γ jest otwarty i gęsty w $\mathbb{T}^k$ więc możemy wybrać kostkę $W = \prod_{i=1}^k [v_i, w_i] \subset \Gamma$ o niezerowej objętości taką, że $w_i < v_{i+1}$ dla $i = 1, ..., k-1$. Niech $1/2 < \tau < 1$. Przez B' oznaczmy zbiór $(\beta_1, ..., \beta_k) \in \mathbb{T}^k$, dla których istnieje podciąg $\{q_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ mianowników α taki, że

$$\lim_{l\to\infty} q_{n_l}\|q_{n_l}\alpha\| = 0, \ \lim_{l\to\infty}(\{q_{n_l}\beta_1\}, ..., \{q_{n_l}\beta_k\}) = (\gamma_1, ..., \gamma_k) \in W$$

oraz dla dowolnego naturalnego l,

$$\beta_1, ..., \beta_k \in \bigcup_{[\tau q_{n_l}]+1}^{q_{n_l}-1} T^t[0, \{a_{n_l+1}q_{n_l}\alpha\}).$$

Wówczas $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < ... < \gamma_k < \gamma_{k+1} = 1$. Na mocy lematu 4.6, $\lambda^k(B') = 1$. Połóżmy $B = B' \cap \mathbb{T}^k_+$. Pokażemy, że w ten sposób zdefiniowany zbiór spełnia warunki twierdzenia 4.1.

Niech φ będzie kocyklem KAC z niewymiernym skokiem. Załóżmy, że $0 = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_k < \beta_{k+1} = 1$ są wszystkimi punktami nieciągłości φ oraz $(\beta_1, ..., \beta_k) \in B$. Wówczas istnieje podciąg $\{q_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ mianowników α taki, że

$$\lim_{l\to\infty} q_{n_l}\|q_{n_l}\alpha\| = 0, \ \lim_{l\to\infty}(\{q_{n_l}\beta_1\}, ..., \{q_{n_l}\beta_k\}) = (\gamma_1, ..., \gamma_k) \in W$$

oraz dla dowolnego naturalnego l,

$$\beta_1, ..., \beta_k \in \bigcup_{[\tau q_{n_l}]+1}^{q_{n_l}-1} T^t[0, \{a_{n_l+1}q_{n_l}\alpha\}).$$

Najpierw pokażemy, że każdy z operatorów unitarnych $U_\varphi^{(m)}$ jest $\delta_r^{(m)}$-słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{rq_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ dla $m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. Ponadto pokażemy, że dla każdego $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ istnieje liczba naturalna r taka, że $0 < |\delta_r^{(m)}| < 1$ oraz dla dowolnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m_1 \neq m_2$ istnieje liczba $r \in \mathbb{N}$ taka, że $\delta_r^{(m_1)} \neq \delta_r^{(m_2)}$. Przez σ_m oznaczmy maksymalny typ spektralny operatora $U_\varphi^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z}$. Wówczas na mocy twierdzenia 4.2 i wniosku 4.1 wszystkie miary σ_m są singularne i ciągłe oraz są one parami ortogonalne.

Niech $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$\phi(x) = \int_0^x D\tilde{\varphi}(t)dt - \int_0^1 \int_0^u D\tilde{\varphi}(t)dtdu,$$

zaś $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\psi = \tilde{\varphi} - \phi$. Wówczas ϕ jest funkcją absolutnie ciągłą o całce zero, zaś ψ jest stała na odcinkach (β_i, β_{i+1}) oraz

$$\psi_+(\beta_i) - \psi_-(\beta_i) = \tilde{\varphi}_+(\beta_i) - \tilde{\varphi}_-(\beta_i) = d_i$$

dla $i = 0, ..., k$. Stąd

$$\psi_+ = \psi_+(0) + \sum_{i=1}^{k+1} d_i \mathbf{1}_{[\beta_i,1)},$$

gdzie $d_{k+1} = d_0$, $d_1 + d_2 + ... + d_{k+1} = 0$. Na mocy twierdzenia 4.3 wystarczy badać zbieżność ciągu

$$\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m \tilde{\varphi}^{(rq_{n_l})}(x)} dx.$$

Ponieważ ciąg $\phi^{(rq_n)}$ zbiega jednostajnie do zera (patrz lemat 3.21) oraz $\tilde{\varphi}^{(rq_n)} = \phi^{(rq_n)} + \psi^{(rq_n)}$, więc wystarczy znaleźć granicę ciągu

$$\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m \psi^{(rq_{n_l})}(x)} dx.$$

Ponieważ dla dowolnych $a, b, x \in \mathbb{T}$ mamy

$$\mathbf{1}_{[b,1)}(x + a) - \mathbf{1}_{[b,1)}(a) = \mathbf{1}_{[b-a,1)}(x) - \mathbf{1}_{[1-a,1)}(x),$$

więc

$$\begin{aligned} \psi_+(x+a) - \psi_+(a) &= \sum_{i=1}^{k+1} d_i(\mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(x+a) - \mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} d_i(\mathbf{1}_{[\beta_i-a,1)}(x) - \mathbf{1}_{[1-a,1)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} d_i \mathbf{1}_{[\beta_i-a,1)}(x). \end{aligned} \tag{24}$$

Zatem dla dowolnych $q, r \in \mathbb{N}$ mamy

$$\psi_+^{(rq)} = \psi_+^{(rq)}(0) + \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{i=1}^{k+1} d_i \mathbf{1}_{[\beta_i-(sq+h)\alpha,1)}. \tag{25}$$

Dla $q, r \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy funkcję $\rho_{r,q} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\rho_{r,q} = \psi_+^{(rq)}(0) + r \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{k+1} d_i \mathbf{1}_{[(j+\gamma_i)/q,1)}.$$

Dla danych $1 \leqslant i \leqslant k+1$ oraz $0 \leqslant j < q_n$ niech $h_i^{(j)}$ będzie jedyną liczbą całkowitą $0 \leqslant h_i^{(j)} < q_n$ spełniającą warunek

$$h_i^{(j)} p_n + j = [q_n \beta_i] \mathrm{mod}\ q_n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \beta_i - h_i^{(j)}\alpha &= \frac{[q_n\beta_i]}{q_n} + \frac{\{q_n\beta_i\}}{q_n} - h_i^{(j)}\frac{p_n}{q_n} - h_i^{(j)}\frac{\|q_n\alpha\|}{q_n} \\ &= \frac{j}{q_n} + \frac{1}{q_n}(\{q_n\beta_i\} - h_i^{(j)}\|q_n\alpha\|). \end{aligned} \tag{26}$$

Zatem

$$\psi_+^{(rq_n)} - \rho_{r,q_n} = \sum_{j=0}^{q_n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{k+1} d_i(\mathbf{1}_{[\beta_i-(sq_n+h_i^{(j)})\alpha,1)} - \mathbf{1}_{[(j+\gamma_i)/q_n,1)}),$$

a stąd

$$\|\psi_+^{(rq_n)} - \rho_{r,q_n}\|_{L^1} \leqslant D\sum_{j=0}^{q_n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{k+1} |\beta_i - (sq_n + h_i^{(j)})\alpha - (j+\gamma_i)/q_n|,$$

gdzie $D = \max_{i=1,\ldots,k} |d_i|$. Korzystając z (26) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|\psi_+^{(rq_n)} - \rho_{r,q_n}\|_{L^1} &\leqslant D\sum_{j=0}^{q_n-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{k+1} |\frac{\{q_n\beta_i\}-\gamma_i}{q_n} - (s + \frac{h_i^{(j)}}{q_n})\|q_n\alpha\|| \\ &\leqslant Dr\sum_{i=1}^{k} |\{q_n\beta_i\} - \gamma_i| + Dkr^2 q_n\|q_n\alpha\|, \end{aligned}$$

a stąd

$$\lim_{l\to\infty} \|\psi_+^{(rq_{n_l})} - \rho_{r,q_{n_l}}\|_{L^1} = 0. \tag{27}$$

Z drugiej strony dla dowolnych $q, r \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \rho_{r,q} &= \psi_+^{(rq)}(0) + r\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{k+1} d_i(\sum_{u=i}^{k} \mathbf{1}_{[\frac{j+\gamma_u}{q},\frac{j+\gamma_{u+1}}{q})} + \mathbf{1}_{[\frac{j+1}{q},1)}) \\ &= \psi_+^{(rq)}(0) + r\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{u=1}^{k}\sum_{i=1}^{u} d_i\mathbf{1}_{[\frac{j+\gamma_u}{q},\frac{j+\gamma_{u+1}}{q})}, \end{aligned}$$

a zatem

$$\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m \rho_{r,q}(x)}dx \;=\; e^{2\pi i m \psi_+^{(rq)}(0)} \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{u=0}^{k} e^{2\pi i m r \sum_{i=1}^{u} d_i}(\gamma_{u+1}-\gamma_u)/q \tag{28}$$
$$\;=\; e^{2\pi i m \psi_+^{(rq)}(0)} \sum_{u=0}^{k} e^{2\pi i m r \sum_{i=1}^{u} d_i}(\gamma_{u+1}-\gamma_u).$$

Nie zmniejszając ogólności rozumowania możemy założyć, że

$$\lim_{l\to\infty} e^{2\pi i \psi_+^{(q_{n_l})}(0)} = e^{2\pi i a}.$$

Wówczas

$$\lim_{l\to\infty} e^{2\pi i \psi_+^{(rq_{n_l})}(0)} = e^{2\pi i r a}. \tag{29}$$

Rzeczywiście, dla każdej liczby całkowitej $0 \leqslant s < r$ istnieje liczba $l_s \in \mathbb{N}$ taka, że dla $l \geqslant l_s$ mamy $\psi_+^{(q_{n_l})}(sq_{n_l}\alpha) = \psi_+^{(q_{n_l})}(0)$. Wystarczy wybrać l_s tak, aby dla $l \geqslant l_s$ spełniona była nierówność

$$q_{n_l}\|q_{n_l}\alpha\| < \min_{i=1,\dots,k}(\{q_{n_l}\beta_i\})/(s+1).$$

Wówczas dla dowolnych $i = 0,\dots,k$, $j = 0,\dots,q_{n_l}-1$ mamy

$$s\|q_{n_l}\alpha\| < \frac{\{q_{n_l}\beta_i\}}{q_{n_l}} - \|q_{n_l}\alpha\| \leqslant \frac{\{q_{n_l}\beta_i\}}{q_{n_l}} + \frac{j}{q_{n_l}} - \frac{h_i^{(j)}\|q_{n_l}\alpha\|}{q_{n_l}} = \beta_i - h_i^{(j)}\alpha,$$

a zatem $s\|q_{n_l}\alpha\| < \beta_i - j\alpha$ dla dowolnych $i = 0,\dots,k$, $j = 0,\dots,q_{n_l}-1$. Na mocy (25), otrzymujemy $\psi_+^{(q_{n_l})}(sq_{n_l}\alpha) = \psi_+^{(q_{n_l})}(0)$ dla $l \geqslant l_s$. Ponieważ

$$\psi_+^{(rq)}(0) = \psi_+^{(q)}(0) + \psi_+^{(q)}(q\alpha) + \dots + \psi_+^{(q)}((r-1)q\alpha),$$

więc dla $l \geqslant l_r$ mamy $\psi_+^{(rq_{n_l})}(0) = r\psi_+^{(q_{n_l})}(0)$. Z (27), (28) oraz (29) otrzymujemy, że

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m \psi^{(rq_{n_l})}(x)}dx = e^{2\pi i m r a}\sum_{u=0}^{k} e^{2\pi i m r \sum_{i=1}^{u} d_i}(\gamma_{u+1}-\gamma_u). \tag{30}$$

Dla dowolnego elementu $z \in \mathbb{T}$ przez $\mathbb{Z}(z)$ oznaczmy podgrupę grupy $\mathbb{T}$ generowaną przez z. Niech G będzie podgrupą grupy $\mathbb{T}$ generowaną przez elementy 1, $e^{2\pi i d_1}$, $e^{2\pi i(d_1+d_2)}$, ...,$e^{2\pi i(d_1+\dots+d_k)}$. Wówczas

$$G = \mathbb{Z}(e^{2\pi i\alpha_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(e^{2\pi i\alpha_g}) \oplus G_1,$$

gdzie G_1 jest grupą skończoną oraz $\alpha_1, ..., \alpha_g, 1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$. Niech $c = \text{card } G_1$. Ponieważ przynajmniej jedna z liczb d_j jest niewymierna, więc $g = \text{rank}(G) > 0$. Dla $j = 1, ..., k$ niech

$$e^{2\pi i c(d_1+...+d_j)} = e^{2\pi i(a_{j1}\alpha_1+...+a_{jg}\alpha_g)},$$

gdzie $a_{jl} \in \mathbb{Z}$ dla $j = 1, ..., k$, $l = 1, ..., g$. Wówczas rząd $[a_{jl}]_{j=1,...,k,l=1,...,g} = g$. Oznaczmy $\omega_l = e^{2\pi i c\alpha_l}$, $l = 1, ..., g$ oraz $\omega_0 = e^{2\pi i ca}$. Niech $\lambda_j = \gamma_{j+1} - \gamma_j$ dla $j = 0, ..., k$. Wówczas $\lambda_0, ..., \lambda_k > 0$ oraz $\lambda_0 + ... + \lambda_k = 1$. Przez Q oznaczmy wielomian trygonometryczny na $\mathbb{T}^g$ określonym wzorem

$$Q(z_1, ..., z_g) = \lambda_0 + \lambda_1 z_1^{a_{11}} ... z_g^{a_{1g}} + ... + \lambda_k z_1^{a_{k1}} ... z_g^{a_{kg}}.$$

Wówczas $U_\varphi^{(m)}$ jest operatorem unitarnym $\delta_{cr}^{(m)}$–słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{crq_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$\delta_{cr}^{(m)} = \omega_0^{mr} Q(\omega_1^{mr}, \omega_2^{mr}, ..., \omega_g^{mr}).$$

Ponieważ

$$|\delta_{cr}^{(m)}| = |\lambda_0 + \lambda_1 e^{2\pi i cmrd_1} + ... + \lambda_k e^{2\pi i cmr(d_1+...+d_k)}|$$

oraz przynajmniej jedna z liczb $d_1+...+d_j$ jest niewymierna, więc dla $m, r \neq 0$ mamy $|\delta_{cr}^{(m)}| < 1$.

Najpierw pokażmy, że dla dowolnej liczby całkowitej $m \neq 0$ istnieje liczba naturalna r taka, że

$$0 < |Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr})| < 1.$$

Załóżmy, że dla wszystkich $r \in \mathbb{N}$ mamy $Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr}) = 0$. Ponieważ $\alpha_1, ..., \alpha_g, 1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$, więc dla każdego $(z_1, ..., z_g) \in \mathbb{T}^g$ mamy $Q(z_1, ..., z_g) = 0$. Stąd $0 = Q(1, ..., 1) = 1$, a zatem sprzeczność.

Następnie pokażmy, że jeśli $|m| \neq |m'|$, $m, m' \neq 0$, to istnieje liczba naturalna r taka, że

$$|Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr})| \neq |Q(\omega_1^{m'r}, ..., \omega_g^{m'r})|. \tag{31}$$

Załóżmy, zaprzeczając tezie, że dla wszystkich $r \in \mathbb{N}$ w wyrażeniu (31) mamy równość. Wówczas dla każdego $(z_1, ..., z_g) \in \mathbb{T}^g$ mamy

$$|Q(z_1^m, ..., z_g^m)| = |Q(z_1^{m'}, ..., z_g^{m'})|.$$

Niech P będzie wielomianem trygonometrycznym na $\mathbb{T}$ określonym wzorem

$$P(z) = |Q(z^m, 1, ..., 1)|^2 = |Q(z^{m'}, 1, ..., 1)|^2.$$

Ponieważ

$$0 \neq \deg P = \max_{i,j=0,...,k} |m(a_{i1} - a_{j1})| = \max_{i,j=0,...,k} |m'(a_{i1} - a_{j1})|,$$

gdzie $a_{01} = 0$, więc otrzymujemy $|m| = |m'|$, co przeczy założeniu.

Teraz pokażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej $m \neq 0$ istnieje liczba naturalna r taka, że

$$\omega_0^{mr} Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr}) \neq \omega_0^{-mr} Q(\omega_1^{-mr}, ..., \omega_g^{-mr}). \tag{32}$$

Załóżmy, że w wyrażeniu (32) zachodzi równość dla wszystkich $r \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\omega_0^{mr} Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr}) \in \mathbb{R}$$

dla każdego $r \in \mathbb{Z}$. Niech

$$G_0 = \{(\omega_1^r, ..., \omega_g^r); r \in \mathbb{Z}\}.$$

G_0 jest podgrupą w $\mathbb{T}^g$. Rozważmy grupowy homomorfizm $F : G_0 \to \mathbb{T}$ dany wzorem

$$F(\omega_1^r, ..., \omega_g^r) = \omega_0^{2mr} = \frac{Q(\omega_1^{-mr}, ..., \omega_g^{-mr})}{Q(\omega_1^{mr}, ..., \omega_g^{mr})}.$$

Odwzorowanie to jest dobrze zdefiniowane, gdyż liczby $\alpha_1, ..., \alpha_g, 1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$. F jest odwzorowaniem ciągłym. Rzeczywiście, jeśli

$$(\omega_1^{r_n}, ..., \omega_g^{r_n}) \to (1, ..., 1),$$

to

$$F(\omega_1^{r_n}, ..., \omega_g^{r_n}) = \frac{Q(\omega_1^{-mr_n}, ..., \omega_g^{-mr_n})}{Q(\omega_1^{mr_n}, ..., \omega_g^{mr_n})} \to \frac{Q(1, ..., 1)}{Q(1, ..., 1)} = F(1, ..., 1).$$

Ponieważ podgrupa G_0 jest gęsta w $\mathbb{T}^g$, więc istnieje ciągły homomorfizm grupowy $\overline{F} : \mathbb{T}^g \to \mathbb{T}$ taki, że $\overline{F}|_{G_0} = F$. $\overline{F}$ jest postaci

$$\overline{F}(z_1, ..., z_g) = z_1^{c_1} ... z_g^{c_g},$$

gdzie $c_1, ..., c_g \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$\omega_0^{2m} = F(\omega_1, ..., \omega_g) = \omega_1^{c_1}...\omega_g^{c_g}.$$

Zatem dla wszystkich $r \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\omega_1^{c_1 r}...\omega_g^{c_g r} Q(\omega_1^{2mr}, ..., \omega_g^{2mr}) \in \mathbb{R}.$$

Stąd wynika, że wielomian trygonometryczny

$$z_1^{c_1}...z_g^{c_g} Q(z_1^{2m}, ..., z_g^{2m})$$

przyjmuje tylko wartości rzeczywiste. Zatem istnieją liczby $m_0, ..., m_k \in \{0, 1, -1\}$, przy czym przynajmniej jedna z nich jest równa 1 i przynajmniej jedna -1 takie, że $\sum_{j=0}^{k} m_j \lambda_j = 0$, co stoi w sprzeczności z warunkiem $(\gamma_1, ..., \gamma_k) \in \Gamma$.

W ten sposób udowodniliśmy, że każdy z operatorów $U_\varphi^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ma widmo singularne i ciągłe, zaś ich maksymalne typy spektralne są parami ortogonalne. Wystarczy więc pokazać, że każdy z operatorów $U_\varphi^{(m)}$ ma proste widmo.

4.3 Widmo proste

Niech $V : L^2(\mathbb{T}, \lambda) \to L^2(\mathbb{T}, \lambda)$ będzie operatorem unitarnym postaci

$$Vf(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i g(x)} f(Te^{2\pi ix}),$$

gdzie $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Aby oszacować maksymalną krotność spektralną tego typu operatorów użyjemy kryterium udowodnionego przez M. Guenais w pracy [19].

Twierdzenie 4.7 *Niech $\{B_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem odcinków w $\mathbb{T}$ oraz niech $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ ciągiem liczb naturalnych takim, że odcinki B_l, TB_l, $T^2 B_l, ..., T^{k_l} B_l$ są parami rozłączne. Załóżmy także, że*

$$\lim_{l \to \infty} \lambda\Big(\bigcup_{k=0}^{k_l} T^k B_l\Big) = \nu \text{ oraz } \lim_{l \to \infty} \lambda(B_l) = 0.$$

Jeśli istnieje liczba rzeczywista $0 \leqslant c < \nu$ taka, że dla każdego $f \in L^2(\mathbb{T}, \lambda)$, $\|f\|_{L^2} = 1$ mamy

$$\limsup_{l \to \infty} 2\pi \sum_{k=0}^{k_l} \int_{T^k B_l} |f|^2 d\lambda \int\int_{B_l^2} |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| \frac{d\lambda(x) d\lambda(y)}{\lambda(B_l)^2} \leqslant c,$$

to maksymalna krotność spektralną operatora V jest co najwyżej $1/(\nu - c)$. ■

Aby dokończyć dowód twierdzenia 4.1 będziemy potrzebowali następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.8 *Niech $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją KAC o sumie skoków zero. Jeśli $0 = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_k < \beta_{k+1} = 1$ są wszystkimi punktami nieciągłości funkcji g oraz $(\beta_1, ..., \beta_k) \in B$, to operator V ma proste widmo.*

Ponieważ $(\beta_1, ..., \beta_k) \in B$, więc istnieje podciąg $\{q_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ mianowników α taki, że

$$\lim_{l\to\infty} q_{n_l}\|q_{n_l}\alpha\| = 0 \text{ oraz } \beta_1, ..., \beta_k \in \bigcup_{t=[\tau q_{n_l}]+1}^{q_{n_l}-1} T^t[0, \{a_{n_l+1}q_{n_l}\alpha\}).$$

Połóżmy $B_l = (0, \{a_{n_l+1}q_{n_l}\alpha\})$ oraz $k_l = [\tau q_{n_l}]$. Wówczas $\lambda(\bigcup_{k=0}^{k_l} T^k B_l) \to \tau$, gdy $l \to \infty$ oraz dla $k = 0, ..., [\tau q_{n_l}]$ funkcja $g^{(k)}$ jest absolutnie ciągła na odcinku B_l. Weźmy dowolną funkcję $f \in L^2(\mathbb{T}, \lambda)$ taką, że $\|f\|_{L^2} = 1$. Ponieważ dla dowolnych $x, y \in B_l$ mamy

$$|g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| = |\int_x^y Dg^{(k)}(t)d\lambda(t)| \leqslant \int_{B_l} |Dg^{(k)}(t)|d\lambda(t),$$

więc

$$\begin{aligned}&2\pi \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_l}]} \int_{T^k B_l} |f|^2 d\lambda \int\int_{B_l^2} |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| \frac{d\lambda(x)d\lambda(y)}{\lambda(B_l)^2} \\ &\leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_l}]} \int_{T^k B_l} |f|^2 d\lambda \int_{B_l} |Dg^{(k)}(x)|d\lambda(x),\end{aligned}$$

gdzie $Dg \in L_0^1(\mathbb{T})$.

Następujący lemat jest ogólniejszą wersją lematu 4.1 z [19].

Lemat 4.9 *Dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ oraz funkcji $h \in L_0^1(\mathbb{T}, \lambda)$ istnieje rosnący ciąg $\{j_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych taki, że dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbb{T}, \lambda)$, $\|f\|_{L^2} = 1$ mamy*

$$\limsup_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{B_{j_l}} |h^{(k)}(x)|d\lambda(x) \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. Wybierzmy liczbę rzeczywistą $0 < \delta < \tau$ taką, że

$$\lambda(C) < \delta \Rightarrow \int_C |h(x)| d\lambda(x) < \varepsilon/4.$$

Na mocy twierdzenia 4.5, zbiór

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l>k} \bigcup_{t=0}^{[\delta q_{n_{j_l}}/2]} T^t B_l$$

ma pełną miarę w $\mathbb{T}$. Dla dowolnej liczby naturalnej m zdefiniujmy zbiór

$$A_m = \{x \in \mathbb{T}; \forall_{k>m} |\frac{h^{(k)}(x)}{k}| < \varepsilon/4\}.$$

Ponieważ $\lambda(A_m) \to 1$, gdy $m \to \infty$, więc możemy wybrać m tak, aby $\lambda(A_m) > 0$. Niech $x_0 \in D$ będzie punktem gęstości zbioru A_m. Wybierzmy liczbę rzeczywistą $\eta > 0$ tak, żeby dla dowolnego odcinka $I \subset \mathbb{T}$,

$$x_0 \in I \wedge \lambda(I) < \eta \Rightarrow \lambda(I \setminus A_m) < \delta\lambda(I). \tag{33}$$

Ponieważ $x_0 \in D$, więc istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $\{j_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ oraz ciąg $\{t_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ liczb całkowitych $0 \leqslant t_l < \delta q_{n_{j_l}}/2$ taki, że $x_0 \in T^{t_l} B_{j_l}$. Niech l będzie liczbę naturalną taką, że $\lambda(B_{j_l}) < \eta$ oraz $(m + \delta q_{n_{j_l}}/2)\lambda(B_{j_l}) < \delta$. Oznaczmy

$$\sum = \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{B_{j_l}} |h^{(k)}| d\lambda.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \sum \quad \leqslant \quad & \sum_{k=0}^{m+t_l} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i B_{j_l}} |h| d\lambda \\ & + \sum_{k=m+t_l+1}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda (\int_{B_{j_l} \cap T^{-t_l} A_m} |h^{(k)}| d\lambda \\ & + \int_{\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i (B_{j_l} \setminus T^{-t_l} A_m)} |h| d\lambda). \end{aligned} \tag{34}$$

Ponieważ dla $k = 0, ..., m + t_l$ mamy $\lambda(\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i B_{j_l}) = (m + \delta q_{n_{j_l}}/2)\lambda(B_{j_l}) < \delta$, więc

$$\int_{\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i B_{j_l}} |h| d\lambda < \varepsilon/4. \tag{35}$$

Punkt $x_0 \in T^{t_l} B_{j_l}$, a zatem na mocy (33) otrzymujemy

$$\lambda(T^{t_l} B_{j_l} \setminus A_m) < \delta \lambda(B_{j_l}),$$

a stąd

$$\lambda(\bigcup_{i=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} T^i(B_{j_l} \setminus T^{-t_l} A_m)) < \delta.$$

Stąd wynika, że dla $k = m + t_l + 1, ..., [\tau q_{n_{j_l}}]$ mamy

$$\int_{\bigcup_{i=0}^{k-1} T^i(B_{j_l} \setminus T^{-t_l} A_m)} |h| d\lambda < \varepsilon/4. \tag{36}$$

Jeśli $x \in B_{j_l} \cap T^{-t_l} A_m$, to $|h^{(k)}(T^{t_l} x)| \leqslant \varepsilon |k|/4$ dla $k > m$. Zatem dla $k = m + t_l + 1, ..., [\tau q_{n_{j_l}}]$ mamy

$$|h^{(k)}(x)| \leqslant |h^{(t_l)}(x)| + |h^{(k-t_l)}(T^{t_l} x)| \leqslant |h^{(t_l)}(x)| + \frac{\varepsilon}{4}|k - t_l| \leqslant |h^{(t_l)}(x)| + \frac{\varepsilon}{4} q_{n_{j_l}}.$$

Stąd dla $k = m + t_l + 1, ..., [\tau q_{n_{j_l}}]$ otrzymujemy, że

$$\int_{B_{j_l} \cap T^{-t_l} A_m} |h^{(k)}| d\lambda \leqslant \int_{B_{j_l}} |h^{(t_l)}| d\lambda + \frac{\varepsilon}{4} q_{n_{j_l}} \lambda(B_{j_l}) \leqslant \varepsilon/2. \tag{37}$$

Korzystając ze wzorów (34), (35), (36) oraz (37), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{B_{j_l}} |h^{(k)}| d\lambda \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\lambda = \varepsilon,$$

a zatem

$$\limsup_{l \to \infty} \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{B_{j_l}} |h^{(k)}(x)| d\lambda(x) \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

Dowód twierdzenia 4.8. Ponieważ $\tau > 1/2$, więc możemy wybrać liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$ tak, żeby $\varepsilon < \tau - 1/2$. Na mocy lematu 4.9, istnieje ciąg $\{j_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\limsup_{l \to \infty} 2\pi \sum_{k=0}^{[\tau q_{n_{j_l}}]} \int_{T^k B_{j_l}} |f|^2 d\lambda \int_{B_{j_l}} |Dg^{(k)}(x)| d\lambda(x) \leqslant \varepsilon.$$

Na mocy twierdzenia 4.7, maksymalna krotność spektralna widma operatora V jest co najwyżej $1/(\tau - \varepsilon) < 2$, a zatem V ma proste widmo. ∎

Korzystając z twierdzenia 4.8 otrzymujemy, że każdy z operatorów $U_{\varphi}^{(m)}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ma widmo proste, singularne i ciągłe oraz ich maksymalne typy spektralne są parami ortogonalne. Na mocy lematu 1.1, automorfizm T_{φ} ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L_1^{2\perp}$. ∎

5 Ergodyczność pewnych potoków cylindrycznych

W tym rozdziale zajmiemy się innego typu układami dynamicznymi niż do tej pory, będą to automorfizmy przestrzeni z miarą nieskończoną. Dokładniej, będziemy badali ergodyczność tzw. *potoków cylindrycznych*, tzn. automorfizmów postaci

$$T_f : (X \times \mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu \otimes \lambda) \to (X \times \mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}}, \mu \otimes \lambda),\ T_f(x, y) = (Tx, y + f(x)),$$

gdzie $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ jest automorfizmem ergodycznym standardowej przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f : X \to \mathbb{R}$ jest kocyklem mierzalnym oraz λ jest miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Przez $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ oznaczmy jednopunktowe uzwarcenie Aleksandrowa zbioru liczb rzeczywistych. Mówimy, że $r \in \overline{\mathbb{R}}$ należy do *rozszerzonego zbioru istotnych wartości* kocyklu f (patrz [50]), jeżeli dla dowolnego otoczenia otwartego $U(r)$ elementu r oraz dla dowolnego zbioru $C \in \mathcal{B}$ takiego, że $\mu(C) > 0$ istnieje liczba całkowita n, dla której

$$\mu(C \cap T^{-n}C \cap \{x \in X; f^{(n)} \in U(r)\}) > 0.$$

Rozszerzony zbiór istotnych wartości f oznaczamy przez $\overline{E}(f)$. Zbiór $E(f) = \overline{E}(f) \cap \mathbb{R}$ nazywamy zbiorem *istotnych wartości* f. Dowodzi się, że $E(f)$ jest domkniętą podgrupą $\mathbb{R}$. Ponadto, $E(f)$ jest zbiorem okresów funkcji mierzalnych T_f niezmienniczych, tzn.

$$E(f) = \{r \in \mathbb{R}; \forall_{\phi \circ T_f = \phi, \phi : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}}\ \phi(x, y + r) = \phi(x, y) \text{ p.w. }\}$$

(patrz [50]). Automorfizm zachowujący miarę nieskończoną nazywamy ergodycznym, gdy dla dowolnego zbioru niezmienniczego albo on sam, albo jego dopełnienie ma miarę zero. Zatem automorfizm T_f jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy $E(f) = \mathbb{R}$. Przez $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ oznaczmy zbiór probabilistycznych miar borelowskich na $\overline{\mathbb{R}}$. Przestrzeń $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ ze słabą topologią jest przestrzenią metryczną i zwartą.

W pracy [40], M. Lemańczyk, F. Parreau, D. Volný udowodnili następujące dwa kryteria ułatwiające badanie ergodyczności potoków cylindrycznych.

Twierdzenie 5.1 *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie kocyklem mierzalnym oraz niech ciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie czasem sztywności automorfizmu T. Jeśli ciąg miar $\{(f^{(q_n)})_*\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ słabo zbiega do miary ν w przestrzeni $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$, to*

$$\text{supp}(\nu) \subset \overline{E}(f),$$

gdzie $\mathrm{supp}(\nu)$ *oznacza nośnik topologiczny miary* ν. ■

Twierdzenie 5.2 *Załóżmy, że ciąg* $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest czasem sztywności* T *oraz* $f \in L^1(X)$ *jest funkcją, dla której ciąg* $\{\|f^{(q_n)}\|_{L^1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony. Jeśli*

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i l f^{(q_n)}} d\mu \right| \leqslant c < 1$$

dla dostatecznie dużych l, *to automorfizm* T_f *jest ergodyczny.* ■

Dla dowolnej liczby naturalnej k, przez S_k oznaczmy zbiór liczb niewymiernych α, dla których

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^{k+1} \|q_n\alpha\| < \infty$$

oraz przez S_k^0 oznaczmy podzbiór S_k liczb takich, że

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^{k+1} \|q_n\alpha\| = 0.$$

Oba zbiory są zbiorami rezydualnymi w odcinku $[0, 1)$.

Niech $\alpha \in [0, 1)$ będzie dowolną liczbą niewymierną. Rozważmy potok cylindryczny postaci

$$T_f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \;\; T_f(x, y) = (Tx, y + f(x)),$$

gdzie $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ jest obrotem o α, zaś $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest kocyklem o całce zero.

Główny rezultat D. Paska z [46] mówi, że warunkiem wystarczającym ergodyczności automorfizmu T_f jest dla funkcji KAC warunek $S(f) \neq 0$. M. Lemańczyk, F. Parreau, D. Volný w [40] pokazali, że klasa kocykli rozpatrywana w [46] posiada własność stabilności ergodyczności w przestrzeni $BV(\mathbb{T})_0$ funkcji o wahaniu ograniczonym o całce zero, a dokładniej, jeśli f jest KAC kocyklem, $S(f) \neq 0$ oraz $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest kocyklem o wahaniu ograniczonym takim, że $\mathrm{Var}(f - g) < |S(f)|$, to automorfizm T_g jest również ergodyczny. W [47] Pask pokazał, że jeśli f jest kocyklem $(k - 1)$ razy różniczkowalnym p.w., funkcja $D^{k-1}f$ jest KAC oraz $S(D^{k-1}f) \neq 0$, to T_f jest automorfizmem ergodycznym dla $\alpha \in S_k$.

Przypomnijmy, że prace [40, 46, 47] bazowały na tym, że suma skoków pewnej pochodnej kocyklu była niezerowa, co pozwalało na wykorzystanie twierdzenia ergodycznego dla następnej pochodnej, której całka była niezerowa. W tym rozdziale, w odróżnieniu od powyższej sytuacji, będziemy rozważać kocykle, dla których suma skoków pewnej pochodnej φ jest równa zero.

Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym taką, że $\int_{\mathbb{T}} f d\lambda = 0$. Wówczas

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)| \leqslant \mathrm{Var} f.$$

Rzeczywiście, niech $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem punktów z $\mathbb{T}$ takim, że $|f(x_n)| \to \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$, gdy $n \to \infty$. Ponieważ $\int_{\mathbb{T}} f d\lambda = 0$, więc dla każdego n istnieje punkt $y_n \in \mathbb{T}$, dla którego $f(x_n)f(y_n) \leqslant 0$. Wówczas

$$|f(x_n)| \leqslant |f(x_n) - f(y_n)| \leqslant \mathrm{Var} f,$$

dla każdego n, a zatem $\sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)| \leqslant \mathrm{Var} f$.

Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Przez C_0^{k+BV} oznaczmy zbiór funkcji $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ o całce zero, $(k-1)$ razy różniczkowalnych takich, że $D^{k-1}f$ jest absolutnie ciągła oraz $D^k f$ ma wahanie ograniczone. Niech $C_0^{0+BV} = BV_0$. Zauważmy, że jeśli $f \in C_0^{k+BV}$, to $\mathrm{Var}(D^{j-1}f) \leqslant \mathrm{Var}(D^j f)$ dla $j = 1, ..., k$. Istotnie, ponieważ $D^{j-1}f$ jest funkcją absolutnie ciągłą, więc $\mathrm{Var}(D^{j-1}f) = \int_{\mathbb{T}} |D^j f| d\lambda$ oraz $\int_{\mathbb{T}} D^j f d\lambda = 0$. Funkcja $D^j f$ ma wahanie ograniczone, a zatem

$$\mathrm{Var}(D^{j-1}f) = \int_{\mathbb{T}} |D^j f| d\lambda \leqslant \sup_{x\in\mathbb{T}} |D^j f(x)| \leqslant \mathrm{Var}(D^j f).$$

Na C_0^{k+BV} możemy określić normę $\|f\|_{k+BV} = \mathrm{Var}(D^k f)$. Wówczas przestrzeń C_0^{k+BV} z normą $\|\ \|_{k+BV}$ jest przestrzenią Banacha. Przez C_0^{k+KAC} oznaczmy podprzestrzeń C_0^{k+BV} funkcji, dla których $D^k f$ jest funkcją kawałkami absolutnie ciągłą oraz przez C_0^{k+AC} oznaczmy podprzestrzeń C_0^{k+KAC} funkcji, dla których $D^k f$ jest funkcją absolutnie ciągłą. Wówczas C_0^{k+AC} jest domknięciem podprzestrzni wielomianów trygonometrycznych w prestrzeni C_0^{k+BV}.

Załóżmy, że kocykl $f \in C_0^{k+KAC}$, zaś $D^k f$ jest funkcją nieciągłą KAC z zerową sumą skoków. Załóżmy również, że $\alpha \in S_k^0$ oraz $0 = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_d < 1$ są wszystkimi punktami nieciągłości funkcji $D^k f$. Jednym z naszych głównych rezultatów jest

Twierdzenie 5.3 *Niech k będzie liczbą naturalną oraz $f \in C_0^{k+KAC}$. Jeśli istnieje podciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu mianowników α taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} q_n^{k+1}\|q_n\alpha\| = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\{q_n\beta_i\} = \gamma_i,$$

przy czym $\gamma_i \neq \gamma_j$ dla $i \neq j$, $i, j = 0, ..., d$, to automorfizm T_f jest ergodyczny. Ponadto, istnieje liczba rzeczywista $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ taka, że jeśli funkcja $v \in C_0^{k+BV}$ oraz $\|v\|_{k+BV} < \varepsilon$, to automorfizm T_{f+v} jest również ergodyczny.

5.1 Uogólniona nierówność Denjoy–Koksmy

Niech Q_n będzie podziałem $\mathbb{T}$ na odcinki wyznaczonym przez punkty $\{i\alpha\}$ dla $i = 0, ..., q_n - 1$. Przypomnijmy, że dla dowolnego n, każdy z odcinków podziału Q_n jest długości $\|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n\alpha\|$ lub $\|q_{n-1}\alpha\|$.

Idea dowodu następującego twierdzenia pochodzi z pracy D. Paska [47].

Twierdzenie 5.4 *Dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej k istnieje stała $M = M_k > 0$ taka, że jeżeli funkcja $f \in C_0^{k+BV}$, to dla dowolnego naturalnego n,*

$$q_n^k|f^{(q_n)}(x)| \leqslant M(1 + q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|)\mathrm{Var}(D^k f). \tag{38}$$

Dowód. Indukcja względem k.

1. W przypadku, gdy $k = 0$ nierówność (38) jest zwykłą nierównością Denjoy–Koksmy (patrz lemat 3.21).

2. Załóżmy, że nierówność (38) jest prawdziwa dla pewnej liczby k. Pokażemy, że istnieje stała $M_{k+1} > 0$ taka, że jeżeli $f \in C_0^{k+1+BV}$, to

$$q_n^{k+1}|f^{(q_n)}(x)| \leqslant M_{k+1}(1 + q_n^{k+2}\|q_n\alpha\|)\mathrm{Var}(D^{k+1}f).$$

Niech I będzie dowolnym odcinkiem długości $\|q_{n-1}\alpha\|$. Wówczas

$$\left|\int_I f^{(q_n)}(x)dx\right| = \left|\int_{\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i I} f(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{T}\setminus\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i I} f(x)dx\right|.$$

Ponieważ $\mathbb{T}\setminus\bigcup_{i=0}^{q_n-1} T^i I = \bigcup_{j=0}^{q_{n-1}-1} T^j J$, gdzie J jest odcinkiem długości $\|q_n\alpha\|$, więc

$$\left|\int_I f^{(q_n)}(x)dx\right| = \left|\int_J f^{(q_{n-1})}(x)dx\right| \leqslant |J| \ \mathrm{Var}(f) \leqslant \|q_n\alpha\| \ \mathrm{Var}(D^{k+1}f).$$

Jeśli I jest odcinkiem długości $\|q_{n-1}\alpha\| + \|q_n\alpha\|$, to podzielmy I na dwa odcinki: pierwszy I_1 długości $\|q_{n-1}\alpha\|$ oraz drugi I_2 długości $\|q_n\alpha\|$. Wtedy

$$|\int_I f^{(q_n)}(x)dx| \leqslant |\int_{I_1} f^{(q_n)}(x)dx| + |\int_{I_2} f^{(q_n)}(x)dx| \leqslant 2\|q_n\alpha\| \operatorname{Var}(D^{k+1}f).$$

Stąd wynika, że w każdym odcinku I podziału Q_n istnieje taki punkt $x_I \in I$, że

$$|f^{(q_n)}(x_I)| \leqslant 4q_n\|q_n\alpha\| \operatorname{Var}(D^{k+1}f).$$

Rzeczywiście, jeśli funkcja $f^{(q_n)}|_I$ zmienia znak, to x_I można wybrać tak, aby $f^{(q_n)}(x_I) = 0$. Natomiast, jeśli funkcja $f^{(q_n)}|_I$ ma stały znak oraz założymy, że

$$|f^{(q_n)}(x)| \geqslant 4q_n\|q_n\alpha\| \operatorname{Var}(D^{k+1}f)$$

dla każdego $x \in I$, to

$$|\int_I f^{(q_n)}(x)dx| > |I|4q_n\|q_n\alpha\| \operatorname{Var}(D^{k+1}f) > 2\|q_n\alpha\| \operatorname{Var}(D^{k+1}f),$$

a zatem sprzeczność.

Ponieważ funkcja f jest absolutnie ciągła oraz $Df \in C_0^{k+BV}$, więc korzystając z założenia indukcyjnego dla dowolnych $a, b \in \mathbb{T}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f^{(q_n)}(b) - f^{(q_n)}(a)| &= |\int_a^b Df^{(q_n)}(x)dx| \\ &\leqslant M_k(1 + q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|)\operatorname{Var}(D^{k+1}f)\frac{|b-a|}{q_n^k}. \end{aligned}$$

Niech x będzie dowolnym punktem $\mathbb{T}$. Wybierzmy odcinek I podziału Q_n tak, aby $x \in I$. Wówczas

$$\begin{aligned} |f^{(q_n)}(x) - f^{(q_n)}(x_I)| &\leqslant 2\frac{\|q_{n-1}\alpha\|}{q_n^k} M_k(1 + q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|)\operatorname{Var}(D^{k+1}f) \\ &\leqslant \frac{2M_k}{q_n^{k+1}}(1 + q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|) \operatorname{Var}(D^{k+1}f). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} q_n^{k+1}|f^{(q_n)}(x)| &\leqslant q_n^{k+1}|f^{(q_n)}(x) - f^{(q_n)}(x_I)| + q_n^{k+1}|f^{(q_n)}(x_I)| \\ &\leqslant (2M_k(1 + q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|) + 4q_n^{k+2}\|q_n\alpha\|) \operatorname{Var}(D^{k+1}f) \\ &\leqslant (2M_k + 4)(1 + q_n^{k+2}\|q_n\alpha\|) \operatorname{Var}(D^{k+1}f), \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Wniosek 5.1 *Załóżmy, że* $\alpha \in S_k$ *oraz* $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest podciągiem ciągu mianowników* α *takim, że ciąg* $\{q_n^{k+1}\|q_n\alpha\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony. Wówczas istnieje stała* $K \geqslant 1$ *taka, że dla dowolnej funkcji* $f \in C_0^{k+BV}$ *oraz dowolnego naturalnego* n*,*

$$q_n^k|f^{(q_n)}(x)| \leqslant K\mathrm{Var}(D^k f).$$

Ponadto, jeśli $f \in C_0^{k+AC}$*, to ciąg* $\{q_n^k f^{(q_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiega jednostajnie do zera.*

Dowód. Pierwsza część wniosku jest oczywistą konsekwencją twierdzenia 5.4. Przejdźmy więc do dowodu drugiej części. Niech więc $f \in C_0^{k+AC}$. Wówczas istnieje ciąg $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ wielomianów trygonometrycznych o całce zero taki, że

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{Var}D^k(P_m - f) = 0.$$

Zatem jednostajną zbieżność do zera ciągu $\{q_n^k f^{(q_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ wystarczy sprawdzić w przypadku, gdy f jest wielomianem trygonometrycznym o całce zero, tzn.

$$f(x) = \sum_{m=-M}^{M} a_m e^{2\pi i m x},$$

gdzie $a_0 = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} |q_n^k f^{(q_n)}(x)| &= |q_n^k \sum_{m=-M}^{M} a_m \frac{e^{2\pi i m q_n \alpha} - 1}{e^{2\pi i m \alpha} - 1} e^{2\pi i m x}| \\ &\leqslant 2q_n^k \sum_{m=-M}^{M} |a_m| \frac{m\|q_n\alpha\|}{\|m\alpha\|} \\ &= q_n^k\|q_n\alpha\| \sum_{m=-M}^{M} \frac{2|a_m|m}{\|m\alpha\|}, \end{aligned}$$

a zatem ciąg $\{q_n^k f^{(q_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega jednostajnie do zera. ■

Wniosek 5.2 *Załóżmy, że istnieje podciąg* $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągu mianowników liczby* α *oraz ciąg* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *liczb naturalnych taki, że ciągi*

$$\{\frac{c_n}{q_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ oraz } \{c_n q_n^k\|q_n\alpha\|\}_{n\in\mathbb{N}}$$

są ograniczone. Wówczas istnieje stała $K \geqslant 1$ *taka, że jeśli funkcja* $f \in C_0^{k+BV}$*, to dla dowolnego naturalnego* n*,*

$$c_n q_n^{k-1}|f^{(q_n)}(x)| \leqslant M\mathrm{Var}(D^k f).$$

Ponadto, jeśli $f \in C_0^{k+AC}$, *to ciąg* $\{c_n q_n^{k-1} f^{(q_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiega jednostajnie do zera.*

Dowód. Pierwszą cześć wniosku otrzymujemy postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 5.4. Natomiast, drugą cześć wniosku otrzymujemy postępując analogicznie jak w dowodzie wniosku 5.1. ■

5.2 Ergodyczność kocykli kawałkami absolutnie ciągłych

Niech $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ będzie KAC kocyklem oraz niech $0 \leqslant \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_d < 1$ będą wszystkimi punktami nieciągłości f. Ponieważ skośne produkty $T_f(x, y) = (x+\alpha, y+f(x))$ oraz $T_{f_{\beta_0}}(x, y) = (x+\alpha, y+f(x-\beta_0))$ są izomorficzne (izomorfizm jest postaci $S(x, y) = (x + \beta_0, y)$), więc możemy założyć, że $\beta_0 = 0$. Załóżmy, że α jest liczbą niewymierną o nieograniczonych ilorazach. Niech $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie podciągiem ciągu mianowników liczby α takim, że

$$\lim_{n\to\infty} q_n\|q_n\alpha\| = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \{q_n\beta_i\} = \gamma_i,$$

gdzie $\gamma_i \neq \gamma_j$ dla $i \neq j$, $i, j = 0, ..., d$. Oznaczmy $a_i = f_+(\beta_i) - f_-(\beta_i)$, $i = 0, ..., d$. Natomiast, przez $\overline{\mathbb{Z}(a_0, ..., a_d)}$ oznaczmy domkniętą podgrupę grupy $\mathbb{R}$ generowaną przez $a_0, a_1, ..., a_d$.

Twierdzenie 5.5 *Niech* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *będzie KAC kocyklem o całce zero oraz sumie skoków równej zero. Jeśli* $\overline{\mathbb{Z}(a_0, ..., a_d)} = \mathbb{R}$ *lub* $\gamma_1, ..., \gamma_d, 1$ *są niezależne nad* $\mathbb{Q}$, *to automorfizm* T_f *jest ergodyczny.*

Dowód. Niech σ będzie permutacją zbioru $\{0, 1, ..., d\}$ taką, że

$$0 = \gamma_{\sigma(0)} < \gamma_{\sigma(1)} < ... < \gamma_{\sigma(d)} < \gamma_{\sigma(d+1)} = 1,$$

gdzie $\sigma(0) = \sigma(d + 1)$. Zauważmy, że $\sigma(0) = 0$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4.1, rozważmy funkcję $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x Df(t)dt - \int_0^1 \int_0^u Df(t)dtdu$$

oraz funkcję $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $h = f - g$. Wówczas g jest funkcją absolutnie ciągłą o całce zero, natomiast h jest stała na odcinkach (β_i, β_{i+1}), ma zerową całkę oraz $a_i = h_+(\beta_i) - h_-(\beta_i)$, $i = 0, ..., d$ $(\beta_{d+1} = 1)$. Zatem

$$h_+ = h_+(0) + \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{1}_{[\beta_i,1)}$$

oraz $h_+(0)=\sum_{i=1}^{d+1} a_i\beta_i$. Korzystając z (25), dla dowolnej liczby naturalnej q otrzymujemy

$$h_+^{(q)} = h_+^{(q)}(0) + \sum_{s=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{1}_{[\beta_i - s\alpha,1)}. \tag{39}$$

Dla danych liczb całkowitych $0 \leqslant i \leqslant d$ oraz $0 \leqslant j < q_n$ przez $s_i^{(j)}$ oznaczmy jedyną liczbę całkowitą $0 \leqslant s_i^{(j)} < q_n$ spełniającą warunek

$$s_i^{(j)} p_n + j = [q_n\beta_i] \bmod q_n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\beta_i - s_i^{(j)}\alpha &= \frac{[q_n\beta_i]}{q_n} + \frac{\{q_n\beta_i\}}{q_n} - s_i^{(j)}\frac{p_n}{q_n} - s_i^{(j)}\frac{\delta_n}{q_n}\\ &= \frac{j}{q_n} + \frac{1}{q_n}(\{q_n\beta_i\} - s_i^{(j)}\delta_n),\end{aligned}\tag{40}$$

gdzie $|\delta_n| = \|q_n\alpha\|$. Stąd wynika, że dla $j=0,...,q_n-1$ mamy

$$\beta_{\sigma(0)} - s_{\sigma(0)}^{(j)}\alpha \tilde{<} \beta_{\sigma(1)} - s_{\sigma(1)}^{(j)}\alpha \tilde{<} ... \tilde{<} \beta_{\sigma(d)} - s_{\sigma(d)}^{(j)}\alpha \tilde{<} \beta_{\sigma(0)} - s_{\sigma(0)}^{(j+1)}\alpha.$$

Dla dowolnych $j=0,...,q_n-1$, $i=0,...,d$ oznaczmy

$$I_i^{(j)} = \begin{cases} (\beta_{\sigma(i)} - s_{\sigma(i)}^{(j)}\alpha, \beta_{\sigma(i+1)} - s_{\sigma(i+1)}^{(j)}\alpha) & \text{dla} \quad i=0,...,d-1\\ (\beta_{\sigma(d)} - s_{\sigma(d)}^{(j)}\alpha, \beta_{\sigma(0)} - s_{\sigma(0)}^{(j+1)}\alpha) & \text{dla} \quad i=d.\end{cases}$$

Wówczas dla $x\in I_i^{(j)}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} h^{(q_n)}(x) &= h_+^{(q_n)}(0) + \sum_{l=0}^{q_n-1}\sum_{m=1}^{d+1} a_m \mathbf{1}_{[\beta_{\sigma(m)} - s_{\sigma(m)}^{(l)}\alpha,1)}(x)\\ &= h_+^{(q_n)}(0) + \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{m=1}^{d+1} a_m + \sum_{m=1}^{d+1} a_m \mathbf{1}_{[\beta_{\sigma(m)} - s_{\sigma(m)}^{(j)}\alpha,1)}(x)\\ &= h_+^{(q_n)}(0) + \sum_{m=1}^{i} a_m.\end{aligned}$$

Policzmy $h_+^{(q_n)}(0)$. Korzystając z (24) otrzymujemy

$$\begin{aligned} h_+^{(q_n)}(0) &= \sum_{j=0}^{q_n-1} h_+(j\alpha) = \sum_{j=0}^{q_n-1}(h_+(0) + \sum_{i=1}^{d} a_i\mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(j\alpha))\\ &= q_n h_+(0) + \sum_{i=1}^{d} a_i \sum_{j=0}^{q_n-1}\mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(j\alpha).\end{aligned}$$

Z drugiej strony dla $i = 1, ..., d$ wiemy, że

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{q_n-1} \mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(j\alpha) &= \mathrm{card}\{0 \leqslant j < q_n; j\alpha > \beta_i\} \\ &= \mathrm{card}\{0 \leqslant j < q_n; j\frac{p_n}{q_n} + j\frac{\delta_n}{q_n} > \frac{[q_n\beta_i]}{q_n} + \frac{\{q_n\beta_i\}}{q_n}\} \\ &= \mathrm{card}\{0 \leqslant j < q_n; j\frac{p_n}{q_n} > \frac{[q_n\beta_i]}{q_n}\} \\ &= q_n - [q_n\beta_i] - 1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}h_+^{(q_n)}(0) &= q_n \sum_{i=1}^{d+1} a_i\beta_i + \sum_{i=1}^{d} a_i(q_n - [q_n\beta_i] - 1) \\ &= q_n \sum_{i=1}^{d} a_i\beta_i + \sum_{i=1}^{d} a_i(\{q_n\beta_i\} - q_n\beta_i) + a_0 \\ &= \sum_{i=1}^{d} a_i\{q_n\beta_i\} + a_0.\end{aligned}$$

Stąd dla $x \in I_i^{(j)}$ otrzymujemy

$$h^{(q_n)}(x) = \sum_{m=1}^{d} a_m\{q_n\beta_m\} + \sum_{m=0}^{i} a_m = b_i^{(n)}. \tag{41}$$

Dla $i = 0, ..., d$ mamy

$$\begin{aligned}\lambda(\{x \in \mathbb{T}; h^{(q_n)}(x) = b_i^{(n)}\}) &\geqslant \sum_{j=0}^{q_n-1} |I_i^{(j)}| \\ &= \sum_{j=0}^{q_n-1} \frac{1}{q_n}|\{q_n\beta_{\sigma(i+1)}\} - \{q_n\beta_{\sigma(i)}\} \\ &\quad -\delta_n(s_{\sigma(i+1)}^{(j)} - s_{\sigma(i)}^{(j)})| \\ &\geqslant \frac{1}{2}|\{q_n\beta_{\sigma(i+1)}\} - \{q_n\beta_{\sigma(i)}\}|\end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n. Ponieważ dla $i = 0, ..., d$,

$$\lim_{n\to\infty}(\{q_n\beta_{\sigma(i+1)}\} - \{q_n\beta_{\sigma(i)}\}) = \gamma_{\sigma(i+1)} - \gamma_{\sigma(i)} > 0$$

oraz ciąg $g^{(q_n)}$ jednostajnie zbiega do zera, więc na podstawie twierdzenia 5.1,

$$\sum_{m=1}^{d} a_m\gamma_m + \sum_{m=0}^{i} a_m \in E(f)$$

dla $i = 0, ..., d$, w szczególności $a_0, a_1, ..., a_d \in E(f)$.

Załóżmy, zaprzeczając tezie twierdzenia, że automorfizm T_f nie jest ergodyczny. Wówczas $E(f) = \mathbb{Z}r$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$, a zatem

$$\sum_{i=1}^{d} a_i\gamma_i, a_0, a_1, ..., a_d \in \mathbb{Z}r.$$

Niech $m, m_0, ..., m_d$ będą liczbami całkowitymi takimi, że

$$\sum_{i=1}^{d} a_i\gamma_i = mr \text{ oraz } a_i = m_i r$$

dla $i = 0, ..., d$. Wówczas

$$\overline{\mathbb{Z}(a_0, ..., a_d)} \subset \mathbb{Z}r \text{ oraz } \sum_{i=1}^{d} m_i\gamma_i = m,$$

co przeczy założeniom twierdzenia. ■

5.3 Ergodyczność kocykli różniczkowalnych

Do dowodu twierdzenia 5.3 będziemy potrzebowali następującego lematu.

Lemat 5.6 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem, zaś k dowolną liczbą naturalną. Jeśli P jest wielomianem rzeczywistym stopnia k postaci $P(x) = c_k x^k + ... + c_0$, $c_k \neq 0$, to istnieje odcinek $J \subset I$ taki, że $|J| \geqslant |I|/4^k$ oraz*

$$x \in J \Rightarrow |P(x)| \geqslant k!|c_k|(\frac{|I|}{4})^k.$$

Dowód. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją różniczkowalną w sposób ciągły. Załóżmy, że istnieje odcinek $I \subset \mathbb{R}$ taki, że $|Df(x)| \geqslant a > 0$ dla $x \in I$. Pokażemy, że istnieje odcinek $J \subset I$, $|J| \geqslant |I|/4$, dla którego $|f(x)| \geqslant a|I|/4$ dla $x \in J$. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy założyć, że $Df(x) \geqslant a > 0$ dla $x \in I$. Przypuśćmy, że dla dowolnego odcinka

$J \subset I$ takiego, że $|J| \geqslant |I|/4$ dla pewnego $x \in J$ mamy $|f(x)| < a|I|/4$. Funkcja f jest rosnąca, a zatem znajdziemy punkty $x, y \in I$ takie, że $x - y \geqslant |I|/2$ oraz $|f(x)|, |f(y)| < a|I|/4$. Wówczas

$$a|I|/2 \leqslant a|x-y| \leqslant |f(x) - f(y)| < a|I|/2,$$

a zatem sprzeczność. Stosując powyższą własność dla kolejnych pochodnych wielomianu P otrzymujemy dowód lematu. ■

Dowód twierdzenia 5.3. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.5, niech σ będzie permutacją zbioru $\{0, 1, ..., d\}$ taką, że

$$0 = \gamma_{\sigma(0)} < \gamma_{\sigma(1)} < ... < \gamma_{\sigma(d)} < \gamma_{\sigma(d+1)} = 1.$$

Ponadto, dla danych liczb całkowitych $0 \leqslant i \leqslant d$ oraz $0 \leqslant j < q_n$, jak w dowodzie twierdzenia 5.5, przez $s_i^{(j)}$ oznaczmy jedyną liczbę całkowitą $0 \leqslant s_i^{(j)} < q_n$ spełniającą warunek

$$s_i^{(j)} p_n + j = [q_n \beta_i] \bmod q_n.$$

łatwo zauważyć jest, że funkcję f można przedstawić jako sumę $f = g + h$, gdzie $g \in C_0^{k+AC}$, zaś $h \in C_0^{k+KAC}$ oraz $D^k h$ jest stała na odcinkach (β_i, β_{i+1}). Wówczas $a_i = D^k h_+(\beta_i) - D^k h_-(\beta_i)$ dla $i = 0, ..., d$ oraz

$$D^k h_+ = D^k h_+(0) + \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{1}_{[\beta_i, 1)},$$

gdzie $D^k h_+(0) = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \beta_i$. Korzystając z (41), dla $x \in I_i^{(j)}$ (patrz dowód twierdzenia 4.5) otrzymujemy

$$D^k h^{(q_n)}(x) = \sum_{m=1}^{d} a_m \{q_n \beta_m\} + \sum_{m=0}^{i} a_m.$$

Dla każdego $j = 0, ..., q_n - 1$ oraz $i = 0, ..., d$ oznaczmy

$$\hat{I}_i^{(j)} = \begin{cases} (\beta_{\sigma(i)} - s_{\sigma(i)}^{(j)} \alpha + q_n^k \|q_n \alpha\|, \beta_{\sigma(i+1)} - s_{\sigma(i+1)}^{(j)} \alpha - q_n^k \|q_n \alpha\|) \\ \text{dla } i = 0, ..., d-1 \\ (\beta_{\sigma(d)} - s_{\sigma(d)}^{(j)} \alpha + q_n^k \|q_n \alpha\|, \beta_{\sigma(0)} - s_{\sigma(0)}^{(j+1)} \alpha - q_n^k \|q_n \alpha\|) \\ \text{dla } i = d. \end{cases}$$

Ponieważ $q_n^{k+1}\|q_n\alpha\| \to 0$, gdy $n \to \infty$, więc

$$\begin{aligned} |\hat{I}_i^{(j)}| &= \frac{1}{q_n}|\{q_n\beta_{\sigma(i+1)}\} - \{q_n\beta_{\sigma(i)}\} - \delta_n(s^{(j)}_{\sigma(i+1)} - s^{(j)}_{\sigma(i)}) - 2q_n^{k+1}\|q_n\alpha\| \\ &\geqslant \frac{\gamma_{\sigma(i+1)} - \gamma_{\sigma(i)}}{2q_n}. \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n. Dla dowolnego $x \in \mathbb{T}$,

$$D^k h^{(q_n^{k+1})}(x) = D^k h^{(q_n)}(x) + D^k h^{(q_n)}(x+q_n\alpha) + ... + D^k h^{(q_n)}(x+(q_n^k-1)q_n\alpha),$$

a stąd otrzymujemy, że dla każdego $x \in \hat{I}_i^{(j)}$

$$D^k h^{(q_n^{k+1})}(x) = q_n^k(\sum_{m=1}^{d} a_m\{q_n\beta_m\} + \sum_{m=0}^{i} a_m).$$

Dla $i = 0, ..., d$ oznaczmy

$$c_i = \sum_{m=1}^{d} a_m\gamma_m + \sum_{m=0}^{i} a_m.$$

Przynajmniej jedna z liczb c_i nie jest równa zero. Rzeczywiście, jeśli założymy, że wszystkie c_i są równe zero, to $a_i = c_i - c_{i-1} = 0$. Wybierzmy i_0 tak, aby $c_{i_0} \neq 0$. Oznaczmy

$$b^{(n)} = \sum_{m=1}^{d} a_m\{q_n\beta_m\} + \sum_{m=0}^{i_0} a_m.$$

Ponieważ $D^k h^{(q_n^{k+1})} = q_n^k b^{(n)}$ na $\hat{I}_{i_0}^{(j)}$, więc

$$Dh^{(q_n^{k+1})}(x) = q_n^k b^{(n)} x^{k-1} + P_j(x)$$

na $\hat{I}_{i_0}^{(j)}$, gdzie P_j jest wielomianem stopnia co najwyżej $k-1$ ($j = 0, ..., q_n-1$). Na mocy lematu 5.6, dla każdego $j = 0, ..., q_n - 1$ istnieje odcinek $J_j \subset \hat{I}_{i_0}^{(j)}$ taki, że

$$|J_j| \geqslant \frac{1}{4^{k-1}}|\hat{I}_{i_0}^{(j)}| \geqslant \frac{\gamma_{\sigma(i_0+1)} - \gamma_{\sigma(i_0)}}{4^k q_n},$$

oraz

$$\begin{aligned} |Dh^{(q_n^{k+1})}(x))| &\geqslant q_n^k|b^{(n)}|(\frac{|\hat{I}_{i_0}^{(j)}|}{4})^{k-1} \geqslant \frac{1}{2}q_n^k|c_{i_0}|(\frac{\gamma_{\sigma(i_0+1)} - \gamma_{\sigma(i_0)}}{4^k q_n})^{k-1} \\ &\geqslant q_n\frac{|c_{i_0}|(\gamma_{\sigma(i_0+1)} - \gamma_{\sigma(i_0+1)})^{k-1}}{4^{k^2}} \end{aligned}$$

na J_j. Połóżmy

$$C = \frac{\gamma_{\sigma(i_0+1)} - \gamma_{\sigma(i_0)}}{4^k} \text{ oraz } M = \frac{|c_{i_0}|(\gamma_{\sigma(i_0+1)} - \gamma_{\sigma(i_0)})^{k-1}}{4^{k^2}}.$$

Zatem istnieje rodzina parami rozłącznych odcinków $\{J_j; j = 0, ..., q_n - 1\}$ taka, że dla $j = 0, ..., q_n - 1$ mamy

$$|J_j| \geqslant \frac{C}{q_n} \text{ oraz } x \in J_j \Rightarrow |Dh^{(q_n^{k+1})}(x)| \geqslant Mq_n.$$

Zauważmy, że $\{q_n^{k+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest czasem sztywności obrotu o α oraz ciąg $\{\|(f + v)^{(q_n^{k+1})}\|_\infty\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, bo $\|(f + v)^{(q_n^{k+1})}\|_\infty \leqslant q_n^k\|(f + v)^{(q_n)}\|_\infty$ oraz $f + v \in C_0^{k+BV}$. Na mocy twierdzenia 5.2, wystarczy pokazać, że

$$\limsup_{n\to\infty} |\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(f+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx| \leqslant c < 1$$

dla dostatecznie dużych l. Ponieważ $\|g^{(q_n^{k+1})}\|_\infty \leqslant q_n^k\|g^{(q_n)}\|_\infty$ oraz $g \in C_0^{k+AC}$, więc ciąg $\{g^{(q_n^{k+1})}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednostajnie zbiega do zera, na mocy wniosku 5.1. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} |\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(f+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx - \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx| = 0,$$

a zatem wystarczy szacować

$$\limsup_{n\to\infty} |\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx|.$$

Oznaczmy

$$C_k = |\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx|$$

Niech $J_j = (a_j, b_j)$ dla $j = 0, ..., q_n - 1$. Korzystając z całkowania przez części dla całek Stieltjesa otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C_k &\leqslant 1 - \sum_{j=0}^{q_n-1} |J_j| + |\sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx| \\
&\leqslant 1 - C + |\sum_{j=0}^{q_n-1} \int_{a_j}^{b_j} \frac{e^{2\pi ilv^{(q_n^{k+1})}(x)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(x)} de^{2\pi ilh^{(q_n^{k+1})}(x)}| \\
&= 1 - C + |\sum_{j=0}^{q_n-1} (\frac{e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(b_j)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(b_j)} - \frac{e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(a_j)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(a_j)} \\
&\quad - \int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi ilh^{(q_n^{k+1})}(x)} d\frac{e^{2\pi ilv^{(q_n^{k+1})}(x)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(x)})|
\end{aligned}$$

Ponieważ $|Dh^{(q_n^{k+1})}(x)| \geqslant Mq_n$ dla $x \in \overline{J_j}$, więc

$$|\sum_{j=0}^{q_n-1}(\frac{e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(b_j)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(b_j)} - \frac{e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(a_j)}}{2\pi ilDh^{(q_n^{k+1})}(a_j)})| \leqslant \frac{1}{lM\pi}.$$

Korzystając kolejno z (11), (12) oraz (13) dla $j = 0, ..., q_n - 1$ mamy

$$\begin{aligned}
|\int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi ilh^{(q_n^{k+1})}(x)} d\frac{e^{2\pi ilv^{(q_n^{k+1})}(x)}}{Dh^{(q_n^{k+1})}(x)}| &\leqslant \mathrm{Var}_{a_j}^{b_j} \frac{e^{2\pi ilv^{(q_n^{k+1})}}}{Dh^{(q_n^{k+1})}} \\
&\leqslant \frac{2\pi l\ \mathrm{Var}_{a_j}^{b_j} v^{(q_n^{k+1})}}{\inf_{(a_j,b_j)}|Dh^{(q_n^{k+1})}|} + \mathrm{Var}_{a_j}^{b_j} \frac{1}{Dh^{(q_n^{k+1})}} \\
&\leqslant \frac{2\pi l}{Mq_n}\int_{a_j}^{b_j}|Dv^{(q_n^{k+1})}|d\lambda + \frac{\mathrm{Var}_{a_j}^{b_j} Dh^{(q_n^{k+1})}}{M^2q_n^2}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx| \leqslant 1 - C + \frac{1}{lM\pi} + \frac{1}{Mq_n}\int_{\mathbb{T}}|Dv^{(q_n^{k+1})}|d\lambda + \frac{\mathrm{Var}\ Dh^{(q_n^{k+1})}}{2\pi lM^2q_n^2}.$$

Korzystając z wniosku 5.1 otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{T}}|Dv^{(q_n^{k+1})}|d\lambda \leqslant q_n^k \int_{\mathbb{T}}|Dv^{(q_n)}|d\lambda \leqslant Kq_n\ \mathrm{Var}\ D^kv.$$

Natomiast,

$$\mathrm{Var}\ Dh^{(q_n^{k+1})} \leqslant Kq_n^2\ \mathrm{Var}\ D^kh.$$

Rzeczywiście, w przypadku, gdy $k = 1$ mamy

$$\mathrm{Var}\ Dh^{(q_n^{k+1})} = \mathrm{Var}Dh^{(q_n^2)} \leqslant q_n^2\ \mathrm{Var}\ Dh,$$

zaś, gdy $k > 1$ mamy

$$\mathrm{Var}\ Dh^{(q_n^{k+1})} = \int_{\mathbb{T}}|D^2h^{(q_n^{k+1})}|d\lambda \leqslant q_n^k\int_{\mathbb{T}}|D^2h^{(q_n)}|d\lambda \leqslant Kq_n^2\ \mathrm{Var}\ D^kh,$$

na mocy wniosku 5.1. Stąd wynika, że

$$\limsup_{n\to\infty}|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi il(h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)}dx| \leqslant 1 - C + \frac{1}{lM\pi} + \frac{K\ \mathrm{Var}\ D^kv}{M} + \frac{K\ \mathrm{Var}\ D^kh}{2\pi lM^2}.$$

Jeśli funkcja $v \in C_0^{k+BV}$ spełnia warunek

$$\mathrm{Var}\ D^k v < \frac{MC}{K},$$

to

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i l (h+v)^{(q_n^{k+1})}(x)} dx\right| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(C - \frac{K\ \mathrm{Var}\ D^k v}{M}\right) < 1$$

dla dostatecznie dużych l. Stąd na mocy twierdzenia 5.2, automorfizm T_{f+v} jest ergodyczny. ∎

5.4 Uwagi na temat twierdzenia 5.5

Na zakończenie rozdziału wróćmy jeszcze do problemu ergodyczności potoków cylindrycznych w przypadku kocykli kawałkami absolutnie ciągłych. Udowodnijmy najpierw lemat dotyczący ergodyczności skośnych produktów na torusie $\mathbb{T}^2$.

Lemat 5.7 *Niech k będzie liczbą całkowitą nieujemną oraz niech $\varphi \in C_0^{k+AC}$. Załóżmy, że liczby $\alpha, \beta, 1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$ oraz*

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^k \|q_n\beta\| > 0.$$

Wówczas skośny produkt

$$T_{\varphi+s\beta} : (\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, \lambda\otimes\lambda) \to (\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, \lambda\otimes\lambda),$$

$$T_{\varphi+s\beta}(x,y) = (x+\alpha, y+s\beta+\varphi(x))$$

jest ergodyczny dla dowolnej liczby całkowitej s różnej od zera.

Dowód. Załóżmy, zaprzeczając tezie lematu, że automorfizm $T_{\varphi+s\beta}$ nie jest ergodyczny. Wówczas istnieje liczba $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ oraz funkcja mierzalna $\psi : \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ taka, że

$$e^{2\pi i l(s\beta+\varphi(x))} = e^{2\pi i(\psi(x+\alpha)-\psi(x))}.$$

Ponieważ $\alpha, \beta, 1$ są niezależne nad $\mathbb{Q}$, na mocy twierdzenia 1.16, istnieje podciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu mianowników α oraz liczba całkowita $0 \leqslant m \leqslant k$ taka, że

$$\|q_n\beta\| > \frac{1}{4} q_n \|q_n\alpha\|, \tag{42}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n^{m-1}\|q_n\beta\| = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} q_n^m\|q_n\beta\| > 0.$$

Niech $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb naturalnych określonym wzorem

$$c_n = [\frac{1}{4lsq_n^{m-1}\|q_n\beta\|}].$$

Wówczas

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_n}{q_n} \leqslant 1/\lim_{n\to\infty} 4lsq_n^m\|q_n\beta\| < \infty$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} lsc_nq_n^{m-1}\|q_n\beta\| = \frac{1}{4}. \tag{43}$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \|lsc_nq_n^m\beta\| = \frac{1}{4}.$$

Z (42) oraz (43) wynika, że ciąg $\{c_nq_n^{m-1}\|q_n\alpha\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do zera. Na mocy wniosku 5.2, ciąg $\{c_nq_n^{m-1}\varphi^{(q_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, a zarazem i ciąg $\{\varphi^{(c_nq_n^m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega jednostajnie do zera. Zatem ciąg

$$e^{2\pi il(sc_nq_n^m\beta+\varphi^{(c_nq_n^m)}(x))} = e^{2\pi i(\psi(x+c_nq_n^m\alpha)-\psi(x))}$$

zbiega jednostajnie do $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, zaś z drugiej strony do 1 w L^1 normie, czyli sprzeczność. ■

Niech $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ będzie KAC kocyklem o całce zero, oraz z sumą skoków zero. Niech $0=\beta_0<\beta_1<...<\beta_d<1$ będą jego wszystkimi punktami nieciągłości oraz niech $a_i = f_+(\beta_i)-f_-(\beta_i)$ dla $i=0,...,d$. Załóżmy, że istnieje podciąg $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu mianowników α taki, że

$$\lim_{n\to\infty} q_n\|q_n\alpha\| = 0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\{q_n\beta_i\} = \gamma_i.$$

Ponieważ wszystkie a_i są różne od zera, więc $\overline{\mathbb{Z}(a_0,...,a_d)} \neq 0$. W twierdzeniu 5.3 pokazaliśmy, jeśli $\overline{\mathbb{Z}(a_0,...,a_d)} = \mathbb{R}$, to automorfizm T_f jest ergodyczny. Rozważmy alternatywną sytuację, gdy grupa $\overline{\mathbb{Z}(a_0,...,a_d)}$ nie jest całą prostą rzeczywistą.

Twierdzenie 5.8 *Załóżmy, że $\overline{\mathbb{Z}(a_0,...,a_d)} = \mathbb{Z}r$ $(r\neq 0)$ oraz*

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^k\|q_n(m_1\beta_1+...+m_d\beta_d)\| > 0,$$

gdzie $m_i = a_i/r$, $i=1,...,d$. Wówczas, jeśli $Df\in C_0^{k-1+AC}$, to automorfizm T_f jest ergodyczny.

Dowód. Załóżmy, że automorfizm T_f nie jest ergodyczny, czyli $E(f) = \mathbb{Z}r'$ dla pewnego rzeczywistego r'. Korzystając z dowodu twierdzenia 5.5 mamy

$$a_0, a_1, ..., a_d \in E(f) = \mathbb{Z}r',$$

a zatem $r = mr'$ dla pewnej liczby całkowitej m. Stąd $r' \neq 0$. Przypomnijmy, że $\mathbb{Z}r'$ jest zbiorem okresów funkcji T_f niezmienniczych, czyli dla dowolnej funkcji mierzalnej $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającej warunek $\phi \circ T_f = \phi$ mamy $\phi(x, y + r') = \phi(x, y)$. Dla dowolnej funkcji T_f–niezmienniczej ϕ rozważmy funkcję

$$\tilde{\phi} : \mathbb{T} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \;\; \tilde{\phi}(x, y) = \phi(x, r'y)$$

oraz skośny produkt

$$\tilde{T}_f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \;\; \tilde{T}_f(x, y) = (x + \alpha, y + \frac{f(x)}{r'}).$$

Wówczas $\tilde{\phi} \circ \tilde{T}_f = \tilde{\phi}$. Ponieważ

$$f = g + \sum_{i=1}^{d+1} a_i \beta_i + \sum_{i=1}^{d+1} a_i \mathbf{1}_{[\beta_i, 1)},$$

gdzie $g \in C_0^{k+AC}$, więc

$$\frac{f(x)}{r'} = \frac{1}{r'}(g(x) + \sum_{i=1}^{d+1} rm_i\beta_i + \sum_{i=1}^{d+1} rm_i \mathbf{1}_{[\beta_i,1)}(x)) = \frac{g(x)}{r'} + m\sum_{i=1}^{d} m_i\beta_i$$

p.w. mod 1. Korzystając z lematu 5.7 otrzymujemy, że funkcja $\tilde{\phi}$ jest stała. Zatem również ϕ jest funkcją stałą, co dowodzi ergodyczności automorfizmu T_f. ■

6 Funkcje realizujące maksymalny typ spektralny

Niech U będzie operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. W tym rozdziale będziemy badać, które elementy $f \in \mathcal{H}$ realizują maksymalny typ spektralny, tzn. dla których $f \in \mathcal{H}$ klasa równoważności miary σ_f jest maksymalnym typem spektralnym. Problematyka ta jest związana z klasycznym twierdzeniem Aleksiejewa [2], które mówi, że dla dowolnego operatora unitarnego na przestrzeni $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ istnieje funkcja ograniczona, realizująca maksymalny typ spektralny operatora. W.M. Aleksiejew w [2] postawił również następujące pytanie: czy dowolny typ spektralny jest realizowany przez funkcję ograniczoną? Przypomnijmy, że odpowiedź negatywna jest dobrze znana, przykładem są operatory pochodzące od układów Gaussa z widmem prostym. Natomiast, rodzi się pytanie, dla jakich automorfizmów odpowiedź na pytanie Aleksiejewa jest pozytywna. Wiadomo, że dla automofizmów ergodycznych z widmem dyskretnym każdy typ jest realizowany przez funkcje ograniczone. W tym rozdziale pokażemy, że dla rozszerzeń grupowych obrotów każdy typ z ciągu spektralnego jest realizowany przez funkcje ograniczone.

Niech X i G będą metrycznymi zwartymi grupami abelowymi, zaś niech μ i ν będą odpowiednio ich miarami Haara.

Twierdzenie 6.1 *Załóżmy, że $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ jest obrotem ergodycznym, zaś $\phi : X \to G$ dowolną funkcją mierzalną. Wówczas każdy typ z ciągu spektralnego operatora*

$$U^{T_\phi} : L^2(X \times G, \mu \times \nu) \to L^2(X \times G, \mu \times \nu),\ U^{T_\phi}h(x, g) = h(Tx, \phi(x)g)$$

jest realizowany przez funkcję ograniczoną.

Dowód. Dla dowolnego charakteru $\chi \in \widehat{G}$ rozważmy domkniętą podprzestrzeń U^{T_ϕ}–niezmienniczą

$$\mathcal{H}_\chi = \{h \in L^2(X \times G); h(x, g) = f(x)\chi(g), f \in L^2(X)\}.$$

Wówczas

$$L^2(X \times G) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\chi$$

oraz operator $U^{T_\phi} : \mathcal{H}_\chi \to \mathcal{H}_\chi$ jest unitarnie równoważny operatorowi

$$U_\chi : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu),\ U_\chi f(x) = \chi(\phi(x))f(Tx)$$

(patrz lemat 1.9). Izomorfizm unitarny $V : L^2(X,\mu) \to \mathcal{H}_\chi$ tych operatorów określony jest wzorem $Vf(x,g) = f(x)\chi(g)$.

Niech $\widehat{G} = \{\chi_n; n \in \mathbb{N}\}$. Przez σ_n oznaczmy miarę, której klasa równoważności jest maksymalnym typem spektralnym operatora U_{χ_n} oraz $\sigma_n(\mathbb{T}) \leqslant 1/2^n$. Ponieważ każdy z operatorów U_χ ma widmo jednorodne (lemat 1.13) oraz miary σ_n są parami albo równoważne, albo ortogonalne (lemat 1.15), więc dla dowolnego typu σ występującego w ciągu spektralnym U^{T_ϕ} istnieje ciąg rosnący $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych taki, że klasa równoważności miary $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{n_k}$ jest równa σ oraz miary σ_{n_k} są parami ortogonalne. Na mocy twierdzenia Aleksiejewa, istnieje ciąg $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wspólnie ograniczony w przestrzeni $L^\infty(X)$ taki, że miara spektralna f_k dla operatora $U_{\chi_{n_k}}$ jest równoważna mierze σ_{n_k} dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $h \in L^\infty(X \times G)$ następująco

$$h(x,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(x)\chi_{k_n}(g).$$

Wówczas

$$\sigma_h = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\frac{1}{2^k}Vf_k} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{n_k} \blacksquare$$

Niech $U : L^2(X,\mathcal{B},\mu) \to L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ będzie operatorem unitarnym. W tym rozdziale spróbujemy również odpowiedzieć na pytanie, jak regularne są funkcje realizujące maksymalny typ spektralny. ściśle rzecz biorąc, na przestrzeń z miarą $(X,\mathcal{B},\mu)$ będziemy narzucać założenia struktury rozmaitości różniczkowej i zbadamy, jak gładkie są funkcje realizujące maksymalny typ spektralny.

Następujące twierdzenie jest uogólnioną wersją klasycznego twierdzenia Aleksiejewa ([2]).

Twierdzenie 6.2 *Niech U będzie dowolnym operatorem unitarnym ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech F będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{H}$ oraz niech $E \subset F$ będzie gęstą podprzestrzenią $\mathcal{H}$. Załóżmy, że dla dowolnego ciągu $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elementów E istnieje rosnący ciąg $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych oraz liczba rzeczywista $0 < a \leqslant 1$ taka, że dla dowolnej liczby zespolonej u, $|u| < a$ suma szeregu*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} g_k$$

(zbieżność jest w przestrzeni $\mathcal{H}$) należy do F. Wówczas dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje element $g \in F$ taki, że $\|f - g\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ oraz $\sigma_f \ll \sigma_g$. W szczególności w przestrzeni F istnieje element realizujący maksymalny typ spektralny operatora U.

Dowód. Niech $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg ...$ będzie ciągiem spektralnym operatora U. Wówczas operator unitarny $U' : \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{T}, \sigma_n) \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$ określony wzorem

$$U'(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(z_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \xi_n(z_n) \quad \text{dla} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(z_n) \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$$

jest unitarnie równoważny operatorowi U. Niech $V : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$ będzie unitarnym izomorfizmem operatorów U oraz U'. Dla każdego $f \in \mathcal{H}$ zdefiniujmy ciąg $\{\tilde{f}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\tilde{f}^n \in L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$ w następujący sposób

$$\tilde{f}^n = P_{L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)} \circ V f,$$

gdzie $P_{L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)} : \bigoplus_{k=1}^{\infty} L^2(\mathbb{T}, \sigma_k) \to L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$ jest naturalnym rzutem na podprzestrzeń $L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)$.

Niech f będzie dowolnym elementem przestrzeni $\mathcal{H}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje ciąg $\{g_m\}_{m=0}^{\infty}$ elementów E taki, że

$$\|f - g_m\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} \quad \text{dla} \quad m \geqslant 0.$$

Ponieważ $\lim_{m \to \infty} \|f - g_m\|_{\mathcal{H}} = 0$ oraz operator $P_{L^2(\mathbb{T}, \sigma_n)}$ jest ograniczony, więc

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{T}} |\tilde{f}^n - \tilde{g}_m^n|^2 d\sigma_n = 0$$

dla każdego naturalnego n. Ponieważ zbieżność w normie L^2 implikuje zbieżność prawie wszędzie dla pewnego podciągu, więc stosując metodę przekątniową możemy skonstruować rosnący ciąg $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ liczb naturalnych ($m_0 = 1$) oraz zbiory $N_n \subset \mathbb{T}$ takie, że

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{g}_{m_k}^n(z) = \tilde{f}^n(z) \quad \text{dla} \quad z \in N_n, \ \sigma_n(\mathbb{T} \setminus N_n) = 0. \tag{44}$$

Niech $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych oraz niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że dla dowolnej liczby zespolonej u, $|u| < a$ mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k}(g_{m_k} - g_{m_{k-1}}) \in F. \tag{45}$$

Oznaczmy $\mathcal{D} = \{u \in \mathbb{C}; |u| < 1\}$. Dla danej liczby zespolonej $u \in \overline{\mathcal{D}}$ połóżmy

$$g(u) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k}(g_{m_k} - g_{m_{k-1}}). \tag{46}$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_{m_k} - g_{m_{k-1}}\|_{\mathcal{H}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m_{k-1}+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

więc dla $u \in \overline{\mathcal{D}}$ szereg występujący po prawej stronie równości (46) jest bezwzględnie zbieżny w $\mathcal{H}$, a zatem $g(u) \in \mathcal{H}$. Ponieważ

$$\|g(u) - g_0\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{m_k} - g_{m_{k-1}}\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

więc dla $u \in \overline{\mathcal{D}}$ otrzymujemy $\|g(u) - f\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$. Na mocy (46), dla dowolnego naturalnego n mamy

$$\tilde{g}^n(u, z) = \tilde{g}^n_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k}(\tilde{g}^n_{m_k}(z) - \tilde{g}^n_{m_{k-1}}(z)). \tag{47}$$

Natomiast z (44) wynika, że dla $z \in N_n$ oraz $u = 1$ szereg występujący po prawej stronie równości (47) jest zbieżny w zwykłym sensie. Stąd $\tilde{g}^n(\cdot, z)$ jest funkcją analityczną na dysku $\mathcal{D}$ oraz

$$\tilde{g}^n(1, z) = \tilde{f}^n(z).$$

Zatem dla każdego $z \in N_n$ zachodzi jedna z dwóch następujących możliwości:

- $\tilde{g}^n(\cdot, z) \equiv 0$, a wtedy $\tilde{g}^n_{m_k}(z) = 0$ dla $k \geqslant 0$, co pociąga za sobą $\tilde{f}^n(z) = \tilde{g}^n(1, z) = 0$ albo
- funkcja $\tilde{g}^n(\cdot, z)$ ma co najwyżej przeliczalną ilość zer na $\mathcal{D}$.

Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $u \in \overline{\mathcal{D}}$ oznaczmy $A_{n,u} = \{z \in N_n; \tilde{g}^n(u, z) \neq 0\}$. Wówczas dla $z \in A_{n,1}$ funkcja $\tilde{g}^n(\cdot, z)$ posiada co najwyżej przeliczalną ilość zer na $\mathcal{D}$. Rozważmy produkt kartezjański $\mathcal{D} \times A_{n,1}$ dysku $\mathcal{D}$ z miarą Lebesgue'a λ oraz zbioru $A_{n,1}$ z miarą σ_n. W powyższym produkcie zbiór

$$\{(u, z) \in \mathcal{D} \times A_{n,1}; \tilde{g}^n(u, z) = 0\}$$

ma $\lambda \times \sigma_n$-miarę zero, gdyż dowolny zbiór $\{u \in \mathcal{D}; \tilde{g}^n(u,z) = 0\}$ ma λ-miarę zero (zawiera co najwyżej przeliczalną ilość punktów). Zatem dla λ prawie wszystkich $u \in \mathcal{D}$ mamy $\tilde{g}^n(u,z) \neq 0$ dla σ_n prawie wszystkich $z \in A_{n,1}$. Stąd dla prawie wszystkich $u \in \mathcal{D}$,

$$\sigma_n(A_{n,1} \setminus A_{n,u}) = 0. \tag{48}$$

Wybierzmy $u_0 \in \mathcal{D}$, $|u_0| < a$ tak, aby warunek (48) był spełniony dla każdego naturalnego n. Wówczas

$$\sigma_{\tilde{f}^n} \ll \sigma_{\tilde{g}^n(u_0,\cdot)}.$$

Stąd wynika już, że

$$\sigma_f \ll \sigma_{g(u_0)}.$$

Natomiast z (45) oraz (46) otrzymujemy $g(u_0) \in F$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Lemat 6.3 *Niech $\langle F, \boldsymbol{|}\ \boldsymbol{|}\rangle$ będzie przestrzenią Frécheta. Wówczas dla dowolnego ciągu $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elementów F istnieje rosnący ciąg $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych takich, że dla każdej liczby zespolonej u, $|u| < \frac{1}{2}$ szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} f_k \tag{49}$$

jest zbieżny w F.

Dowód. Wybierzmy rosnący ciąg $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych tak, aby dla dowolnej liczby zespolonej α i dowolnej liczby naturalnej k,

$$|\alpha| < \frac{1}{2^{r_k}} \implies \boldsymbol{|}\alpha f_k\boldsymbol{|} < \frac{1}{2^k}.$$

Dla dowolnej liczby zespolonej u, $|u| < \frac{1}{2}$ mamy $|u^{r_k}| < \frac{1}{2^{r_k}}$, a zatem $\boldsymbol{|}u^{r_k} f_k\boldsymbol{|} < \frac{1}{2^k}$. Ponieważ szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{|}u^{r_k} f_k\boldsymbol{|}$ jest zbieżny, więc również szereg (49) jest zbieżny w przestrzeni Frécheta F. ■

Wniosek 6.1 *Niech $\langle F, \boldsymbol{|}\ \boldsymbol{|}\rangle$ będzie przestrzenią Frécheta oraz niech F będzie gęstą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ taką, że $\boldsymbol{|}\ \boldsymbol{|} \geqslant \|\ \|_{\mathcal{H}}$. Wówczas istnieje element $f \in F$ realizujący maksymalny typ spektralny operatora U.* ■

Załóżmy, że $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, zaś U jest dowolnym operatorem unitarnym przestrzeni $\mathcal{H}$. Stosując wniosek 6.1 do $F = L^\infty(X, \mu)$ otrzymujemy:

Wniosek 6.2 (twierdzenie Aleksiejewa) *W prestrzeni $L^\infty(X, \mu)$ istnieje funkcja realizująca maksymalny typ spektralny operatora U.*

Poniżej podamy dwa wzmocnienia twierdzenia Aleksiejewa przy założeniach bogatszej struktury przestrzeni X.

Wniosek 6.3 *Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną. Wówczas istnieje funkcja ciągła realizująca maksymalny typ spektralny operatora U.*

Dowód. Ponieważ miara μ jest regularna, więc przestrzeń $C(X)$ jest gęsta w $L^2(X, \mu)$. Stosując wniosek 6.1 dla $F = C(X)$ otrzymujemy tezę wniosku. ■

Stosując te same argumenty co w dowodzie twierdzenia 6.1 oraz wniosek 6.3 otrzymujemy:

Wniosek 6.4 *Załóżmy, że $T : (X, \mu) \to (X, \mu)$ jest obrotem ergodycznym na zwartej grupie abelowej X, zaś $\phi : X \to G$ dowolną funkcją mierzalną, gdzie G jest zwartą grupą abelową. Wówczas każdy typ z ciągu spektralnego operatora*

$$U^{T_\phi} : L^2(X \times G) \to L^2(X \times G),\ U^{T_\phi} f(x, g) = f(Tx, \phi(x)g)$$

jest realizowany przez funkcję ciągłą. ■

Wniosek 6.5 *Niech X będzie zwartą rozmaitością różniczkową klasy C^r, gdzie $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wówczas istnieje funkcja $f \in C^r(X)$ realizująca maksymalny typ spektralny operatora U.*

Dowód. Dla $r \in \mathbb{N}$ istnieje norma $\|\ \|_{C^r}$ na przestrzeni $C^r(X)$ taka, że $\|\ \|_{C^r} \geqslant \|\ \|_\infty$ oraz $\langle C^r(X), \|\ \|_{C^r} \rangle$ jest przestrzenią Banacha.

Dla $r = \infty$ istnieje F-norma $|\!|\!|\ |\!|\!|_{C^\infty}$ na przestrzeni $C^\infty(X)$ taka, że $|\!|\!|\ |\!|\!|_{C^\infty} \geqslant \|\ \|_\infty$ oraz $\langle C^\infty(X), |\!|\!|\ |\!|\!|_{C^\infty} \rangle$ jest przestrzenią Frécheta.

Ponieważ przestrzeń $C^r(X)$ jest gęstą podprzestrzenią $\langle C(X), \|\ \|_\infty \rangle$, więc $C^r(X)$ jest gęsta w $L^2(X, \mu)$. Stosując również wniosek 6.1 otrzymujemy tezę wniosku. ■

6.1 Przypadek rozmaitości analitycznej

Do udowodnienia, że w przypadku rozmaitości analitycznej istnieje funkcja analityczna realizująca maksymalny typ spektralny, będziemy potrzebowali następującej nierówności.

Lemat 6.4 *Niech A będzie liczbą rzeczywistą, $0 \leqslant A < 1$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 0$ mamy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k A^n \leqslant \frac{A}{1-A} \frac{k!}{(1-A)^k}.$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnych naturalnych n, k,

$$n^k - (n-1)^k \leqslant kn^{k-1},$$

więc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^k A^n &= \frac{1}{1-A} \sum_{n=1}^{\infty} n^k (A^n - A^{n+1}) \\
&= \frac{1}{1-A} \sum_{n=1}^{\infty} (n^k - (n-1)^k) A^n \\
&\leqslant \frac{k}{1-A} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} A^n.
\end{aligned}$$

Stąd wynika już, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k A^n \leqslant \frac{A}{1-A} \frac{k!}{(1-A)^k}. \blacksquare$$

Niech W będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$. Mówimy, że $f : W \to \mathbb{C}$ jest *rzeczywistą funkcją analityczną* (lub po prostu *funkcją analityczną)* na W, jeśli dla każdego $\boldsymbol{x}^0 \in W$ w pewnym jego otoczeniu funkcję f możemy przedstawić jako szereg potęgowy postaci

$$\sum_{l_1,\dots,l_d=0}^{\infty} a_{l_1 \dots l_d} (x_1 - x_1^0)^{l_1} \dots (x_d - x_d^0)^{l_d} \tag{50}$$

gdzie $a_{l_1 \dots l_d} \in \mathbb{C}$ oraz $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0)$.

Lemat 6.5 *Niech* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem funkcji analitycznych na* W *takim, że istnieją rosnące ciągi* $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *liczb naturalnych spełniające warunek*

$$\sup_{x\in W} \left| \frac{\partial^{l_1+...+l_d} f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_d^{l_d}} \right| \leqslant R_k M_k^{l_1+...+l_d}$$

dla wszystkich $l_1, ..., l_d \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$. *Wówczas dla dowolnej liczby zespolonej* $u \in \mathcal{D} = \{u \in \mathbb{C}; |u| < 1\}$ *szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{R_k M_k} f_k$$

jest jednostajnie zbieżny na dowolny zwartym podzbiorze W *oraz*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} u^{R_k M_k} f_k$$

jest funkcją analityczną na W.

Dowód. Korzystając z lematu 6.4, dla dowolnych $l_1, ..., l_d \geqslant 0$, $l_1 + ... + l_d > 0$ oraz $\boldsymbol{x} \in W$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |u|^{R_k M_k} \left| \frac{\partial^{l_1+...+l_d} f_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_d^{l_d}} \right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u|^{R_k M_k} R_k M_k^{l_1+...+l_d} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u|^{R_k M_k} (R_k M_k)^{l_1+...+l_d} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u|^n n^{l_1+...+l_d} \\
&\leqslant (l_1 + ... + l_d)! \frac{|u|}{1-|u|} \left(\frac{1}{1-|u|}\right)^{l_1+...+l_d}.
\end{aligned}$$

Dla dowolnego $\boldsymbol{x} \in W$ otrzymujemy również, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u|^{R_k M_k} |f_k(\boldsymbol{x})| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u|^{R_k M_k} R_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u|^n n \leqslant \frac{|u|}{(1-|u|)^2}.$$

Stąd wynika, że funkcja $f = \sum_{k=1}^{\infty} u^{R_k M_k} f_k$ ma pochodne wszystkich rzędów oraz dla dowolnych $l_1, ..., l_d \geqslant 0$ oraz $x \in W$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^{l_1+...+l_d} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_d^{l_d}} \right| &\leqslant (l_1 + ... + l_d)! \frac{|u|}{(1-|u|)^2} \left(\frac{1}{1-|u|}\right)^{l_1+...+l_d} \\
&\leqslant l_1!...l_d! \frac{|u|}{(1-|u|)^2} \left(\frac{d}{1-|u|}\right)^{l_1+...+l_d}.
\end{aligned}$$

Zatem f jest funkcją analityczną na W. ■

Twierdzenie 6.6 *Niech X będzie rzeczywistą zwartą rozmaitością analityczną. Wówczas istnieje podprzestrzeń E przestrzeni wszystkich funkcji analitycznych na X taka, że E jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni $C(X)$ oraz dla każdego ciągu $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elementów E istnieje rosnący ciąg $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych taki, że dla dowolnej liczby zespolonej $u \in \mathcal{D}$ szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} g_k$$

zbiega w $C(X)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} g_k$ jest funkcją analityczną na X.

Dowód. Niech $\varphi : X \to \mathbb{R}^d$ będzie analitycznym włożeniem rozmaitości analitycznej X w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^d$ (patrz [18]). Przez E' oznaczmy przestrzeń wielomianów na $\mathbb{R}^d$ oraz oznaczmy

$$E = \{f : X \to \mathbb{C}; f \circ \varphi^{-1} \in E'\}.$$

Korzystając z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, E' jest gęstą podprzestrzenią $C(\varphi(X))$, a stąd E jest gęstą podprzestrzenią $C(X)$ oraz każda funkcja $f \in E$ jest analityczna.

Niech $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem elementów E oraz niech $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wielomianów na $\mathbb{R}^d$ takim, że $g_k = P_k \circ \varphi$ dla każdego naturalnego k. Niech W będzie otwartym ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^d$, który zawiera zbiór $\varphi(X)$. Wówczas istnieją rosnące ciągi $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych takie, że

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in W} \left| \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_d} P_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_d^{l_d}} \right| \leqslant R_k M_k^{l_1+\ldots+l_d}$$

dla wszystkich $l_1, \ldots, l_d \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Połóżmy $r_k = R_k M_k$. Na mocy lematu 6.5, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} P_k$ jest jednostajnie zbieżny na $\varphi(X)$ oraz funkcja $\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} P_k$ jest analityczna na W dla dowolnej liczby zespolonej $u \in \mathcal{D}$. Zatem szereg $\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} g_k$ zbiega jednostajnie na X oraz funkcja

$$\sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} u^{r_k} P_k \circ \varphi$$

jest analityczna na X. ■

Wniosek 6.6 *Załóżmy, że* X *jest zwartą rozmaitością analityczną, zaś* μ *skończoną miarą borelowską na* X. *Wówczas dla dowolnego operatora unitarnego* $U : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ *istnieje funkcja analityczna na* X *realizująca maksymalny typ spektralny operatora* U. ■

A Kilka uwag na temat krotności spektralnej produktów Anzaia

W tym rozdziale zajmiemy się tematyką związana z pytaniem A. Iwanika: jakie krotności spektralne są realizowane przez skośne produkty Anzaia. łatwo pokazać, że zbiory $\{1\}$ i $\{1,\infty\}$ są realizowane. Z ogólnej metody konstruowania kocyklu wyznaczającego automorfizm o zadanym zbiorze wartości krotności ([36]) wynika, że zbiór $\{1,2\}$ jest również realizowany w klasie skośnych produktów Anzaia. W tym rozdziale będziemy rozważać skośne produkty Anzaia w przypadku, gdy $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ jest funkcją absolutnie ciągłą, zaś jej pochodna jest funkcją kawałkami absolutnie ciągła z dwoma punktami nieciągłości i sumą skoków zero. Pokażemy, że dla większości rozważanych funkcji skośny produkt T_φ ma widmo singularne i ciągłe na $L_1^{2\perp}$ oraz maksymalna krotność spektralna jest co najwyżej 2. Ponadto pokażemy, że wśród rozważnych automorfizmów są zarówno produkty z widmem prostym, jak i z maksymalną krotnością spektralną równą 2.

Załóżmy, że $\alpha\in S_0^2$, tzn.

$$\liminf_{n\to\infty} q_n^3\|q_n\alpha\| = 0$$

oraz $Tz=e^{2\pi i\alpha}z$.

Twierdzenie A.1 *Istnieje zbiór $B\subset\mathbb{T}$ miary pełnej taki, że jeśli $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ jest funkcją absolutnie ciągłą postaci $\varphi(e^{2\pi ix})=e^{2\pi i\tilde{\varphi}(x)}$, przy czym $\tilde{\varphi}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, zaś $D\tilde{\varphi}$ jest funkcją kawałkami absolutnie ciągłą o sumie skoków zero, dla której 0 i β są jedynymi punktami nieciągłości oraz $\beta\in B$, to rozszerzenie T_φ ma widmo singularne i ciągłe o maksymalnej krotności spektralnej nie większej niż 2 na przestrzeni $L_1^{2\perp}$. Ponadto, dla każdego $\beta\in B$ istnieje zbiór $A\subset\mathbb{T}$ miary pełnej taki, że dla każdego $a\in A$ skośny produkt $T_{\varphi\exp 2\pi ia}$ ma widmo proste, singularne i ciągłe na przestrzeni $L_1^{2\perp}$.*

Dowód. Niech $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie podciągiem ciągu mianowników liczby α takim, że

$$\lim_{n\to\infty} q_n^3\|q_n\alpha\| = 0.$$

Przez B oznaczmy zbiór elementów $\beta\in\mathbb{T}$ takich, że ciąg $\{q_n\beta\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w zbiorze $\mathbb{T}$. Wówczas B jest zbiorem pełnej miary, patrz [34] rozdział 1 §4.

Zauważmy, że funkcję $\tilde{\varphi}$ można przedstawić jako sumę funkcji $\tilde{\varphi} = \phi + \psi$, gdzie $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest funkcją C_0^{1+AC}, zaś funkcja $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest postaci

$$\psi(x) = c + d(1-\beta)x\mathbf{1}_{[0,\beta)}(x) + d\beta(1-x)\mathbf{1}_{[\beta,1)}(x),$$

gdzie $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$. Wówczas

$$D\psi = d(1-\beta) + d\mathbf{1}_{[\beta,1)}.$$

Dla $0 \leqslant j < q_n$ przez $h_1^{(j)}$, $h_2^{(j)}$ oznaczmy jedyne liczby całkowite $0 \leqslant h_1^{(j)}, h_2^{(j)} < q_n$ spełniające warunki

$$h_1^{(j)}p_n + j = [q_n\beta] \bmod q_n, \quad h_2^{(j)}p_n + j = 0 \bmod q_n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \beta - h_1^{(j)}\alpha &= \frac{[q_n\beta]}{q_n} + \frac{\{q_n\beta\}}{q_n} - h_1^{(j)}\frac{p_n}{q_n} - h_1^{(j)}\frac{\delta_n}{q_n} \\ &= \frac{j}{q_n} + \frac{\{q_n\beta_i\}}{q_n} - \frac{h_1^{(j)}\delta_n}{q_n} \end{aligned} \tag{51}$$

oraz

$$-h_2^{(j)}\alpha = -h_2^{(j)}\frac{p_n}{q_n} - h_2^{(j)}\frac{\delta_n}{q_n} = \frac{j}{q_n} - \frac{h_2^{(j)}\delta_n}{q_n}, \tag{52}$$

gdzie $|\delta_n| = \|q_n\alpha\|$. Stąd wynika, że dla $j = 0, ..., q_n - 1$ mamy

$$-h_2^{(j)}\alpha \tilde{<} \beta - h_1^{(j)}\alpha \tilde{<} - h_2^{(j+1)}\alpha.$$

Korzystając z (41) otrzymujemy, że

$$D\psi^{(q_n)}(x) = \begin{cases} d(1-\{q_n\beta\}) & \text{dla} \quad x \in (-h_2^{(j)}\alpha, \beta - h_1^{(j)}\alpha) \\ -d\{q_n\beta\} & \text{dla} \quad x \in (\beta - h_1^{(j)}\alpha, -h_2^{(j+1)}\alpha). \end{cases}$$

Dla każdej liczby naturalnej n zdefiniujmy funkcję $\rho_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ następująco

$$\rho_n(x) = \begin{cases} d(1-\{q_n\beta\}) & \text{dla} \quad x \in (\frac{j}{q_n}, \frac{j}{q_n} + \frac{\{q_n\beta\}}{q_n}) \\ -d\{q_n\beta\} & \text{dla} \quad x \in (\frac{j}{q_n} + \frac{\{q_n\beta\}}{q_n}, \frac{j+1}{q_n}). \end{cases}$$

Korzystając z (51) oraz (52) otrzymujemy

$$\|D\psi^{(q_n)} - \rho_n\|_{L^1} \leqslant 2|d|q_n\|q_n\alpha\|.$$

Ponieważ
$$\|D\psi^{(q_n^2)} - q_n D\psi^{(q_n)}\|_{L^1} \leqslant 2|d|q_n^3\|q_n\alpha\|,$$
więc
$$\|D\psi^{(q_n^2)} - q_n\rho_n\|_{L^1} \leqslant 4|d|q_n^3\|q_n\alpha\|.$$
Dla dowolnego naturalnego n zdefiniujmy funkcję $\xi_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ następująco
$$\xi_n(x) = \psi^{(q_n^2)}(0) + \int_0^x q_n\rho_n d\lambda.$$
Ponieważ dla dowolnych funkcji absolutnie ciągłych $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ takich, że $f(0) = g(0)$ mamy
$$|f(x) - g(x)| = |\int_0^x (Df - Dg)d\lambda| \leqslant \|Df - Dg\|_{L^1},$$
więc
$$\|\psi^{(q_n^2)} - \xi_n\|_{L^1} \leqslant \|D\psi^{(q_n^2)} - q_n\rho_n\|_{L^1} \leqslant 4|d|q_n^3\|q_n\alpha\|.$$
Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 4.1, dla dowolnej niezerowej liczby całkowitej m rozważmy ciąg
$$\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m\tilde{\varphi}^{(q_n^2)}(x)}dx.$$
Na mocy wniosku 5.1, ciąg $\phi^{(q_n^2)}$ zbiega jednostajnie do zera, $\tilde{\varphi}^{(q_n^2)} = \phi^{(q_n^2)} + \psi^{(q_n^2)}$ oraz
$$\lim_{n\to\infty} \|\psi^{(q_n^2)} - \xi_n\|_{L^1} = 0,$$
a zatem wystarczy zbadać ciągu
$$C_n = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m\xi_n(x)}dx.$$
Dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{T}$, $\int_x^{x+1/q_n} \rho_n d\lambda = 0$, a zatem funkcja ξ_n jest okresowa o okresie $1/q_n$ oraz na odcinku $[0, 1/q_n)$ wyraża się wzorem
$$\begin{aligned}\xi_n(x) \;&=\; \psi^{(q_n^2)}(0) + d(1 - \{q_n\beta\})q_n x\mathbf{1}_{[0,\frac{\{q_n\beta\}}{q_n})}(x)\\ &\quad + d(\{q_n\beta\})(1 - q_n x)\mathbf{1}_{[\frac{\{q_n\beta\}}{q_n},\frac{1}{q_n})}(x).\end{aligned}$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
C_n &= q_n \int_0^{1/q_n} e^{2\pi i m \xi_n(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m \xi_n(x/q_n)} dx \\
&= e^{2\pi i m \psi^{(q_n^2)}(0)} \Big(\int_0^{\{q_n\beta\}} e^{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})x} dx + \int_{\{q_n\beta\}}^1 e^{2\pi i m d(\{q_n\beta\})(1-x))x} dx \Big) \\
&= e^{2\pi i m \psi^{(q_n^2)}(0)} \Big(\frac{e^{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}} - 1}{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})} + \frac{1 - e^{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}}}{-2\pi i m d\{q_n\beta\}} \Big) \\
&= e^{2\pi i m \psi^{(q_n^2)}(0)} \frac{e^{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}} - 1}{2\pi i m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}} \\
&= e^{\pi i m (2\psi^{(q_n^2)}(0) + d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\})} \frac{\sin \pi m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}}{\pi m d(1-\{q_n\beta\})\{q_n\beta\}}.
\end{aligned}
$$

Przypomnijmy, że $U_\varphi^{(m)} f(z) = (\varphi(z))^m f(Tz)$. Najpierw pokażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej $m \neq 0$ maksymalny typ spektralny σ_m operatora $U_\varphi^{(m)}$ jest ciągły i singularny. Wybierzmy liczbę rzeczywistą $\frac{3}{16}|md| < \gamma < \frac{1}{4}|md|$ tak, aby $\sin \pi\gamma \neq 0$. Następnie wybierzmy podciąg $\{q_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tak, aby

$$
\lim_{j\to\infty} |md|(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\} = \gamma
$$

oraz ciąg $\{e^{\pi i m (2\psi^{(q_{n_j}^2)}(0) + d(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\})}\}_{j\in\mathbb{N}}$ był zbieżny. Wówczas operator $U_\varphi^{(m)}$ jest $\delta^{(m)}$-słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{q_{n_j}^2\}_{j\in\mathbb{N}}$ oraz

$$
0 < |\delta^{(m)}| = |\sin \pi\gamma / \pi\gamma| < 1.
$$

Zatem na mocy wniosku 4.1, miara σ_m jest singularna i ciągła.

Następnie pokażmy, że dla dowolnych liczb całkowitych $|m_1| \neq |m_2|$ maksymalne typy spektralne σ_{m_1} oraz σ_{m_2} są ortogonalne. Wybierzmy liczbę rzeczywistą $\frac{3}{16}|d| < \gamma < \frac{1}{4}|d|$ tak, aby

$$
\Big|\frac{\sin \pi m_1 \gamma}{\pi m_1 \gamma}\Big| \neq \Big|\frac{\sin \pi m_2 \gamma}{\pi m_2 \gamma}\Big|.
$$

Następnie wybierzmy podciąg $\{q_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tak, aby

$$
\lim_{n\to\infty} |d|(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\} = \gamma
$$

oraz ciąg $\{e^{\pi i(2\psi^{(q^2_{n_j})}(0)+d(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\})}\}_{n\in\mathbb{N}}$ był zbieżny. Wówczas operator $U^{(m_i)}_{\varphi}$ jest $\delta^{(m_i)}$-słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{q^2_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, $i=1,2$ oraz

$$|\delta^{(m_1)}| = |\frac{\sin \pi m_1 \gamma}{\pi m_1 \gamma}| \neq |\frac{\sin \pi m_2 \gamma}{\pi m_2 \gamma}| = |\delta^{(m_2)}|.$$

Zatem na mocy twierdzenia 4.2, miary σ_{m_1}, σ_{m_2} są ortogonalne. M. Guenais w [19] pokazała, że dowolny operator unitarny $V : L^2(\mathbb{T},\lambda) \to L^2(\mathbb{T},\lambda)$ postaci

$$Vf(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi ig(x)} f(Te^{2\pi ix}),$$

gdzie $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ jest funkcją absolutnie ciągłą ma proste widmo. Zatem każdy z operatorów $U^{(m)}_{\varphi}$ ma proste widmo. Ponieważ miary σ_m, $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ są singularne i ciągłe oraz $\sigma_{m_1} \perp \sigma_{m_2}$ dla $|m_1| \neq |m_2|$, więc skośny produkt T_{φ} ma widmo singularne i ciągłe o maksymalnej krotności spektralnej nie większej niż 2 na przestrzeni $L^{2\perp}_1$.

Niech β będzie dowolnym elementem zbioru B. Wybierzmy podciąg $\{q_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tak, aby ciągi

$$\{e^{\pi i(2\psi^{(q^2_{n_j})}(0)+d(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\})}\}_{j\in\mathbb{N}}$$

oraz

$$\{d(1-\{q_{n_j}\beta\})\{q_{n_j}\beta\}\}_{j\in\mathbb{N}}$$

były zbieżne odpowiednio do $e^{2\pi i\eta}$ oraz $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Przez A oznaczmy zbiór elementów $a \in \mathbb{T}$ takich, że ciąg $\{q^2_{n_j}a\}_{j\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w $\mathbb{T}$. Wystarczy pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m maksymalne typy spektralne σ_m oraz σ_{-m} odpowiednio operatorów unitarnych $U^{(m)}_{\varphi\exp 2\pi ia}$ oraz $U^{(-m)}_{\varphi\exp 2\pi ia}$ są ortogonalne. Wybierzmy podciąg $\{q_{n_{j_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ tak, aby

$$\lim_{l\to\infty} e^{2\pi i(\eta+q^2_{n_{j_l}}a)} = e^{2\pi i\gamma},$$

gdzie γ jest liczbą rzeczywistą niewymierną. Wówczas operator unitarny $U^{(m)}_{\varphi\exp 2\pi ia}$ jest δ_m–słabo mieszający oraz operator $U^{(-m)}_{\varphi\exp 2\pi ia}$ jest δ_{-m}–słabo mieszający wzdłuż ciągu $\{q^2_{n_{j_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$\delta_m = e^{2\pi im\gamma}\frac{\sin \pi m\theta}{\pi m\theta} \quad \text{oraz} \quad \delta_{-m} = e^{-2\pi im\gamma}\frac{\sin \pi m\theta}{\pi m\theta}.$$

Ponieważ $e^{2\pi im\gamma} \neq e^{-2\pi im\gamma}$, więc miary σ_m oraz σ_{-m} są ortogonalne, co kończy dowód twierdzenia. ■

Na zakończenie podamy przykład funkcji $\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ absolutnie ciągłej, której pochodna $D\tilde{\varphi}$ jest funkcją KAC z dwoma punktami nieciągłości 0 i β, $\beta \in B$ i sumą skoków zero takiej, że zbiór tych $a \in \mathbb{T}$, że maksymalna krotność spektralna rozszerzenia $T_{\varphi \exp 2\pi i a}$ jest równa 2, jest zbiorem gęstym w $\mathbb{T}$.

Lemat A.2 *Jeśli $-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x-\gamma)$ dla pewnej liczby $\gamma \in \mathbb{T}$, to dla dowolnej liczby wymiernej $a \in \mathbb{T}$ maksymalna krotność spektralna produktu skośnego $T_{\varphi \exp 2\pi i a}$ jest przynajmniej równa 2.*

Dowód. Niech $a = p/q$, gdzie $\mathrm{nwd}(p,q) = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned}((U^{(-q)}_{\varphi \exp 2\pi i a})^n 1, 1) &= \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i q(\tilde{\varphi}^{(n)}(x)+np/q)} dx = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q \tilde{\varphi}^{(n)}(-x-\gamma-(n-1)\alpha)} dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i q(\tilde{\varphi}^{(n)}(x)+np/q)} dx = ((U^{(q)}_{\varphi \exp 2\pi i a})^n 1, 1).\end{aligned}$$

Zatem miary spektralne funkcji 1 dla operatorów $U^{(q)}_{\varphi \exp 2\pi i a}$ oraz $U^{(-q)}_{\varphi \exp 2\pi i a}$ są sobie równe (na mocy lematu1.15, operatory $U^{(q)}_{\varphi \exp 2\pi i a}$ i $U^{(-q)}_{\varphi \exp 2\pi i a}$ są wręcz unitarnie równoważne), a zatem maksymalna krotność spektralna skośnego produktu $T_{\varphi \exp 2\pi i a}$ jest przynajmniej 2. ■

Dla dowolnych liczb $\beta \in \mathbb{T}$, $d \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy funkcję $\tilde{\varphi}_{\beta,d} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ następująco

$$\tilde{\varphi}_{\beta,d}(x) = d(1-\beta)x\mathbf{1}_{[0,\beta)}(x) + d\beta(1-x)\mathbf{1}_{[\beta,1)}(x) - \frac{1}{2}d\beta(1-\beta).$$

Zauważmy, że

$$-\tilde{\varphi}_{\beta,d}(x) = \tilde{\varphi}_{\beta,d}(-x-\beta).$$

Zatem, jeśli $\beta \in B$, to dla dowolnej liczby wymiernej $a \in \mathbb{T}$ maksymalna krotność spektralna skośnego produktu $T_{\exp 2\pi i(\tilde{\varphi}_{\beta,d}+a)}$ jest równa 2.

Literatura

[1] O.N. Agiejew (О.Н. Агеев), *Динамические системы с четнократной лебеговской компонентой в спектре,* Математический Сборник **136(178)** (1988), 307-319.

[2] W.M. Aleksiejew (В.М. Алексеев), *Существование огрниченной функции максимального спектрльного типа*, Вестник Московского Университета **5** (1958), 13-15.

[3] H. Anzai, *Ergodic skew product transformations on the torus*, Osaka J. Math. **3** (1951), 83-99.

[4] S. Bochner, W.T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton, 1948.

[5] G.H. Choe, *Spectral properties of cocycles*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1987.

[6] I.P. Cornfeld, S.W. Fomin, J.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[7] H. Dye, *On group of measure–preserving transformations I, II*, Amer. J. Math. **81** (1959), 110-159, **85** (1963), 551-576.

[8] I. Filipowicz, *Product* $\mathbb{Z}^d$*–action on a Lebesgue space and their applications*, Studia Math. **122** (1997), 289-298.

[9] K.M. Frączek, *Spectral properties of cocycles over rotations*, preprint.

[10] K.M. Frączek, *Cyclic space isomorphism of unitary operators*, Studia Math. **124** (1997), 259-267.

[11] K.M. Frączek, *On a function that realizes the maximal spectral type*, Studia Math. **124**, 1-7.

[12] K.M. Frączek, *Extensions of* $\mathbb{Z}^d$*–rotations on d–dimensional torus*, preprint.

[13] K.M. Frączek, *Some examples of cocycles with simple continuous singular spectrum*, preprint.

[14] K.M. Frączek, *On ergodicity of some cylinder flows*, preprint.

[15] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformations on the torus*, Amer. J. Math. **83** (1961), 573-601.

[16] P. Gabriel, M. Lemańczyk, P. Liardet, *Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzai*, Mémoire SMF no. **47**, tom 119, 1991.

[17] G.R. Goodson, J. Kwiatkowski, M. Lemańczyk, P. Liardet, *On the multiplicity function of ergodic group extensions of rotations*, Studia Math. **102** (1992), 157-174.

[18] H. Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real–analytic manifolds*, Annals of Math. **68** (1958), 460-472.

[19] M. Guenais, *Une majortion de la multiplicité spectrale d'opérateurs associés à des cocycles réguliers*, praca przyjęta do druku w Isr. J. Math..

[20] M. Guenais, *Morse cocycles and simple Lebesgue spectrum*, praca przyjęta do druku w Erg. Th. Dyn. Syst..

[21] P. Hellekalek, G. Larcher, *On the ergodicity of a class of skew products*, Isr. J. Math. **54** (1986), 301-306.

[22] H. Helson, *Cocycles on the circle*, J. Operator Th. **16** (1986), 189-199.

[23] H. Helson, W. Parry, *Cocycles and spectra*, Arkiv. Mat. **16** (1978), 195-206.

[24] M. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Mat. IHES **49** (1979), 5-234.

[25] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol II, Springer-Verlag, 1970.

[26] E.W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable*, vol 1, Cambridge Univ. Press, 1950.

[27] A. Iwanik, *Generic smooth cocycles of degree zero over irrational rotations*, Studia Math. **115** (1995), 241-250.

[28] A. Iwanik, *Anzai skew products with Lebesgue component of infinite multiplicity*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 223-235.

[29] A. Iwanik, M. Lemańczyk, C. Mauduit, *Piecewise absolutely continuous cocycles over irrational rotation*, praca przyjęta do druku w J. London Math. Soc..

[30] A. Iwanik, M. Lemańczyk, D. Rudolph, *Absolutely continuous cocycles over irrational rotations*, Isr. J. Math. **83** (1993), 73-95.

[31] A.Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Univ. of Chicago Press, 1964.

[32] A.W. Koczergin (А.В. Кочергин), *Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и потоков на торе*, Даклады Академи Наук СССР **205** (1972), 515-518.

[33] C. Kraaikamp, P. Liardet, *Good approximations and continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 303-309.

[34] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[35] A.G. Kusznirenko (А.Г. Кушниренко), *Спектрльные свойства некоторых динамических систем со степенным разбеганем,* Вестник Московского Университета **1** (1974), 101-108.

[36] J. Kwiatkowski Jr., M. Lemańczyk, *On the multiplicity function of ergodic group extensions.II*, Studia Math. **116** (1995), 207-215.

[37] M. Lemańczyk, *Teoplitz Z_2–extensions*, Ann. H. Poincaré **24** (1988), 1-43.

[38] M. Lemańczyk, *Introduction to Ergodic Theory from the Point of View of the Spectral Theory*, Lecture Notes of the Tenth KAIST Math. Workshop, Taejon, 1995.

[39] M. Lemańczyk, C. Mauduit, *Ergodicity of class of cocycles over irrational rotations*, J. London Math. Soc. **49** (1994), 124-132.

[40] M. Lemańczyk, F. Parreau, D. Volný, *Ergodic properties of real cocycles end pseudo–homogeneous Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4919-4938.

[41] S. łojasiewicz, *An Introduction to Theory of Real Functions*, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[42] J. Mathew, M.G. Nadkarni, *Measure–preserving transformation whose spectrum has Lebesgue component of multiplicity two*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 402-406.

[43] H.A. Medina, *Spectral types of unitary operator arising from irrational rotation on the circle group*, Michigan Math. J. **41** (1994), 39-49.

[44] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa, 1990.

[45] W. Parry, *Topics in Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1981.

[46] D. Pask, *Skew products over irrational rotation*, Isr. J. Math. **69** (1990), 65-74.

[47] D. Pask, *Ergodicity of certain cylinder flows*, Isr. J. Math. **76** (1991), 129-152.

[48] E.A. Robinson, *Ergodic measure–preserving transformations with arbitrary finite spectral multiplicity,* Invent. Math. **72** (1983), 299–314.

[49] E.A. Robinson, *Transformations with highly non–homogenous spectrum of finite multiplicity,* Isr. J. Math. **56** (1986), 75–88.

[50] K. Schmidt, *Cocycles of Ergodic Transformation Groups*, Lect. Notes in Math. Vol.1, Macmillan Co. of India, 1977.