

Analiza Matematyczna II.
Lista 4. Równania różniczkowe

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego o rozdzielonych zmiennych. Naszkicować wykresy rozwiązań.

a) $\sin x \frac{dy}{dx} = y \cos x;$

b) $\frac{dy}{dx} = y^2;$

c) $\frac{dy}{dx} = 2xy.$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania różniczkowego o rozdzielonych zmiennych i rozwiązać odpowiedni problem Cauchy'ego.

a) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad y(0) = -1/2;$

b) $2x^2 \frac{dy}{dx} = y, \quad y(1) = 1;$

c) $(1 + x)y + (1 - y)x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1;$

d) $e^y \frac{dy}{dx} = x(1 + e^y), \quad y(\sqrt{\ln 2}) = 0;$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} y}{x^2}, \quad y(1/\ln 2) = \pi/6.$

Zadanie 3. Rozwiązać równanie różniczkowe jednorodne lub odpowiedni problem Cauchy'ego.

a) $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2;$

b) $2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2;$

c) $(x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} = 2xy;$

d) $x \frac{dy}{dx} = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(2) = \pi/3;$

e) $x \frac{dy}{dx} = y + y \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = e^2;$

f) $x + y + x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 1/2.$

Zadanie 4. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe lub odpowiedni problem Cauchy'ego.

a) $\frac{dy}{dx} = xy + xe^{x^2};$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2x^2;$

c) $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} + x^2 \cos x;$

d) $x \frac{dy}{dx} + y = x \sin x;$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^3;$

f) $x \frac{dy}{dx} = 2y + x + 1, \quad y(1) = 1/2;$

g) $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{ctg} x = 2 \cos x, \quad y(\pi/6) = 1.$

Zadanie 5. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach lub odpowiedni problem Cauchy'ego.

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0;$

b) $y'' + 4y' + 13y = 0;$

c) $4y'' + 12y' + 9y = 0;$

d) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4;$

e) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

f) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

g) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$

h) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1;$

i) $y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$

j) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0;$

k) $y''' + 8y = 0$;

l) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$;

m) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$;

n) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$;

o) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 6$;

p) $y''' - y'' = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

Zadanie 5. Rozwiązać układ równań różniczkowe liniowych lub odpowiedni problem Cauchy'ego.

a) $x' = 2x + 4y$, $y' = 4x + 2y$;

b) $x' = x + 5y$, $y' = -x - 3y$;

c) $x' = -3x - y$, $y' = x - y$;

d) $x' = -7x + y$, $y' = -x - 5y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

e) $x' = -2x - 4y$, $y' = -x + y$, $x(0) = 2$, $y(0) = 3$;

f) $x' = x + 5y$, $y' = -x - 3y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

g) $x' = 3x + 8y$, $y' = -x - 3y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$;

h) $x' = x + y$, $y' = -4x - 3y$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$;