Analiza Matematyczna II.
Lista 2. Ekstrema.

Zadanie 1. Napisz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w zadanym punkcie:

a) $f(x,y) = x^2\sqrt{y+1}$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,3,2)$,

b) $f(x,y) = e^{x+2y}$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,-1,1)$,

c) $f(x,y) = \frac{\arcsin x}{\arccos y}$, $(x_0,y_0,z_0) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$,

d) $f(x,y) = x^y$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,4,16)$.

Zadanie 2. Napisz wzór Taylora z drugą resztą dla funkcji f w punkcie (x_0,y_0):

a) $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 2$, $(x_0,y_0) = (1,-2)$,

b) $f(x,y) = e^{xy}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$,

c) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$,

d) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$,

e) $f(x,y) = e^x \cos y$, $(x_0,y_0) = (0,0)$,

f) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$,

Zadanie 3. Znajdź, posługując się różniczką zupełną, przybliżoną wartość wyrażenia:

a) $0,96^{1,04}$,

b) $\sqrt{0,95^3 + 2,02^3}$,

c) $1,01^2 \cdot 2,02^3 \cdot 3,03^4$,

d) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$.

Zadanie 4. Znajdź ekstrema lokalne następujących funkcji dwu zmiennych:

a) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$,

b) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$,

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

d) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$,

e) $f(x,y) = xy^2(12-x-y)$, $x,y > 0$,

f) $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x,y > 0$,

g) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$, $x,y > 0$,

h) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$, $(x,y) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$,

i) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,

j) $f(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}xy^4 + 3x + 2$,

k) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$.

Zadanie 5. Znajdź ekstrema lokalne następujących funkcji trzech zmiennych:

a) $f(x,y,z) = x^4 - y^3 + 2z^3 - 2x^2 + 6y^2 - 3z^2$,

b) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$,

c) $f(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$,

d) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $x, y, z > 0$,

e) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,

f) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$, $0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi$,

g) $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $a > 0$,

Zadanie 6. Znajdź ekstrema lokalne następujących funkcji czterech i n zmiennych:

a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_3x_4 - (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)$,

b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_3x_4 - (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)$,

c) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_n - 1} + \frac{2}{x_n}$, $x_1, x_2, ..., x_n > 0$.

Zadanie 7. Znajdź ekstrema warunkowe funkcji f jeśli

a) $f(x,y) = x + y$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$,

b) $f(x,y) = xy$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 2$,

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ pod warunkiem $x^3 + y^3 = 16$,

d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ pod warunkiem $x + y = 3$,

e) $f(x,y) = 2x^2y^2$ pod warunkiem $x^4 + y^4 = 1$,

f) $f(x,y) = x^4 + y^4$ pod warunkiem $x^2y^2 = 1$,

g) $f(x,y) = x^4 + y^4$ pod warunkiem $x^2 - y^2 = 1$,

h) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ pod warunkiem $x - y = \frac{\pi}{2}$,

i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ pod warunkiem $x + y + z = 1$,

j) $f(x, y, z) = x + y + z$ pod warunkiem $xyz = 1$ 1

k) $f(x, y, z) = x + y + z$ pod warunkiem $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$,

l) $f(x, y, z) = xyz$ pod warunkiem $x + y + z = 1$,

Zadanie 8. Znajdź ekstrema warunkowe funkcji f jeśli

a) $f(x, y, z) = xyz$ pod warunkami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x + y + z = 0$,

b) $f(x, y, z) = x + y + z$ pod warunkami $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + z^2 = 1$,

c) $f(x, y, z) = xy + yz$ pod warunkami $x^2 + y^2 = 2$ i $y + z = 2$, $(x, y, z > 0)$.

Zadanie 9. Znajdź ekstrema funkcji f na zbiorze M jeśli:

a) $f(x, y) = x^2 - 2y^2, \; M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leqslant 36\}$,

b) $f(x, y) = x^2 y - 8x - 4y, \; M$ jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0).(0, 4), (4, 0)$,

c) $f(x, y, z) = xyz, \; M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + y + z = 1, \; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.