

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdego ciągu nieujemnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ mamy

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Zadanie 2. Przypuśćmy, że $p_1, \dots, p_n$ są nieujemnymi liczbami wymiernymi, które sumują się do jedynki. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots p_n a_n.$$

Zadanie 3. Przypuśćmy, że $p_1, \dots, p_n$ są nieujemnymi liczbami *rzeczywistymi*, które sumują się do jedynki. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots p_n a_n$$

oraz zbadaj kiedy zachodzi równość.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in [1, \infty)$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Zadanie 5. Wykaż, że dla dodatnich liczb x, y, α, β zachodzi

$$x^\alpha y^\beta \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x^{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y^{\alpha + \beta}$$

i wywnioskuj, że

$$x^{2018} y + xy^{2018} \leq x^{2019} + y^{2019}.$$

Zadanie 6. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$$

Zadanie 7. Wykaż, że dla rzeczywistych liczb nieujemnych $a_1, \dots, a_n$ zachodzi

$$a_n \left[\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right]^{n-1} \leq \left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right]^n.$$

Zadanie 8. Udowodnij, że dla nieujemnych liczb $a_k, b_k, 1 \leq k \leq n$ mamy

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{1/n}$$

Zadanie 9. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c , dla których $a + b + c = 1$ zachodzi

$$\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \leq \sqrt{15}.$$

Zadanie 10. Udowodnij, że dla dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{x}{x^3 + 4} \leq \frac{2x + 3}{25}.$$

Zadanie 11. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$, że $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Wykaż, że

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \dots \cdot (a_n + a_1) \geq 2^n.$$

Zadanie 12. Udowodnić, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Zadanie 13. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c , dla których $abc = 1$. Wykaż, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$