

Zadanie 1. (E) Udowodnij nierówność Cauchy'ego-Schwarza

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Rozwiązanie 1.

- indukcyjnie
- przez unormowanie i skorzystanie z nierówności $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
- przez iloczyn skalarny (dzięki temu mamy mnóstwo wniosków)

Zadanie 2. (E) Wykaż, że dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n} (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rozwiązanie 2. W pierwszym $b_i = 1$, a w drugim $a_i = a_k^{\frac{1}{3}}$, $b_i = a_k^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 3. (E) Dane są liczby dodatnie p_j takie, że $p_1 + \dots + p_n = 1$. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a_i, b_i takich, że $a \leq a_i b_i$ dla $i = 1, \dots, n$ zachodzi

$$a \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n p_i b_i \right).$$

Rozwiązanie 3. Stosuje się bezpośrednio nierówność C-S. Przykład: ciekawą nierówność mamy dla $b_i = 1/a_i$.

Zadanie 4. (E, więcej ciągów) Wykaż, że

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^2 \sum_{k=1}^n b_k^4 \sum_{k=1}^n c_k^4$$

oraz

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Rozwiązanie 4. Stosujemy 3 razy C-S: najpierw do a_k i $b_k c_k$, a potem do pojedynczych. W drugiej części korzystamy z pierwszej i prostej nierówności $\sum b_i^4 \leq (\sum b_i^2)^2$.

Zadanie 5. (M, nierówności symetryczne) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi

$$\left(\frac{x+y}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y+z}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z+x}{x+y+z} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 6^{\frac{1}{2}},$$
$$x+y+z \leq 2 \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right).$$

Rozwiązanie 5. Mnożymy przez $(x+y+z)^{1/2}$, korzystamy z C-S dla każdego składnika, a potem średnie na koniec. W drugiej części rozbijamy $x+y+z = \frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}}$.

Zadanie 6. (M) Wiadomo, że $f(x) = \cos(\beta x)$ spełnia $f^2(x) = \frac{1}{2}(1 + f(2x))$. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $p_1, p_2, \dots, p_n$ takich, że $p_1 + \dots + p_n = 1$ zachodzi $g^2(x) \leq \frac{1}{2}(1 + g(2x))$, gdzie

$$g(x) = \sum_{k=1}^n p_k \cos(\beta_k x).$$

Rozwiązanie 6. Wystarczy rozbić $p_k = p_k^{\frac{1}{2}} \cdot p_k^{\frac{1}{2}}$ i zastosować C-S, a potem skorzystać z danej tożsamości.

Zadanie 7. (M) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_j mamy

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^n (-1)^j a_j \right|^2 \leq (n+2) \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

Rozwiązanie 7. Lewą stronę wyliczamy jako $2 \sum a_j^2 + 4 \sum_{(k,l) \in S} a_k a_l$, gdzie $S = \{(k,l) : 2|k+l\}$. Następnie drugi składnik szacujemy ze wzoru skróconego mnożenia. Dalej $\sum_{(k,l) \in S} a_k^2 + a_l^2 = \sum i = 1^n n_i a_i^2$, gdzie n_i to liczba par z S , w których jedna liczba to i . Wówczas $n_i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, bo badamy pary o ustalonej jednej ze współrzędnych z jednego narożnika tablicy i to w dodatku co drugą parę. Łącząc te szacowania dostajemy tezę.

Zadanie 8. (H) Dana jest tablica liczb rzeczywistych $\{a_{jk} : 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$. Wykaż, że

$$m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^2 + n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^2 + mn \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2.$$

Ponadto wykaż, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy istnieją ciągi α_j i β_k takie, że $a_{jk} = \alpha_j + \beta_k$.

Rozwiązanie 8. Traktując macierz jako wektor długości mn mamy (z C-S z jedyneką) $\left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{jk} \right)^2 \leq mn \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{jk}^2$. Stosujemy tę nierówność dla $x_{jk} = a_{jk} - r_j/n - c_k/m$ gdzie r_j to suma wiersza, c_k to suma kolumny. Bezpośrednio otrzymujemy wtedy żadaną nierówność. Równość mamy, jeśli x_{jk} jest stałe równe D , czyli mamy $\alpha_j = D + r_j/n$, $\beta_k = c_k$.