

Zadanie 1. Korzystając z aksjomatów liczb rzeczywistych udowodnij następujące własności:

- W.1 $\forall_{x \in \mathbb{R}} 0 \leq x \Rightarrow -x \leq 0$,
W.2 $\forall_{x \in \mathbb{R}} -(-x) = x$,
W.3 $\forall_{x \in \mathbb{R}} (x + x = x) \Rightarrow x = 0$
W.4 $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \cdot 0 = 0$,
W.5 $\forall_{x \in \mathbb{R}} -1 \cdot x = -x$,
W.6 $-0 = 0, 0^2 = 0, (-1)^2 = 1$,
W.7 $\forall_{x \in \mathbb{R}, x \neq 0} x^2 > 0$,
W.8 $0 < 1$,
W.9 $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} x > 1 \wedge y > 1 \Rightarrow x \cdot y > 1$,
W.10 $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} x > 1 \Rightarrow x^n > 1$,
W.11 $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
W.12 $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} x > y > 0 \Rightarrow y^{-1} > x^{-1} > 0$,
W.13 $\forall_{x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$,
W.14 $\forall_{x, y, z \in \mathbb{R}} (x < y \wedge 0 < z) \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$,
W.15 $\forall_{x, y, z, t \in \mathbb{R}} (0 < x < y \wedge 0 < z < t) \Rightarrow 0 < x \cdot z < y \cdot t$.

Zadanie 2. Udowodnij, że w zbiorze liczb rzeczywistych elementy 0 i 1 są wyznaczone jednoznacznie (np. jeżeli istnieją dwa zera, to są sobie równe).

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 1$ istnieje $x > 1$, dla którego $x^2 = a$. (istnienie pierwiastka kwadratowego)

Zadanie 4. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej postaci $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnego $a > 1$ istnieje $x > 1$, takie że $x^n = a$.

Zadanie 5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej postaci $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnego $0 < a < 1$ istnieje $0 < x < 1$, takie że $x^n = a$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli $a > 1$ oraz $x^{2^k} = a$, to $a > x > 1$. Jeśli jednak $0 < a < 1$, to $0 < a < x < 1$.

Zadanie 7. Niech $a > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}, n \leq 2k$. Wykaż kolejno, że:

- zbiór $P = \{p > 0 : p^n \leq a\}$ posiada kres górny $s := \sup P$,
- jeśli $s^n < a$, to istnieje liczba $q > 1$ taka, że $(s \cdot q)^n < a$,
- jeśli $s^n > a$, to istnieje liczba $q < 1$ taka, że $(s \cdot q)$ jest ograniczeniem górnym zbioru P ,
- z powyższych wynika, że $s^n = a$.