

Zadanie 1. Wyraż $\cos(3\alpha)$ za pomocą $\cos \alpha$ oraz $\sin(3\alpha)$ za pomocą $\sin \alpha$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4xy(2x^2 - 1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 5. Niech

$$f(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}}.$$

Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$f(a, c) \leq f(a, b) + f(b, c).$$

Zadanie 6. Ciąg (x_n) jest określony następująco

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n$.

Zadanie 7. Rozwiąż równanie

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$$

gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 8. Zbadaj ile rozwiązań w przedziale $[0, 1]$ posiada równanie

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$