

Zadanie 1. Chcemy podzielić kwadrat na n mniejszych niepokrywających się kwadratów. Podział na cztery kwadraty jest oczywisty.

- (a) Wykaż, że kwadrat można podzielić na 6, 7, 8 kwadratów.
- (b) Wykaż, że kwadrat może być podzielony na n kwadratów dla dowolnego $n > 8$.

Zadanie 2. Chcemy podzielić trójkąt równoboczny na n mniejszych niepokrywających się trójkątów równobocznych. Podział na cztery jest oczywisty.

- (a) Wykaż, że można wykonać ten podział na 6, 7, 8 trójkątów.
- (b) Wykaż, że podział jest możliwy dla dowolnego $n > 8$.

Zadanie 3. Czy jest możliwe skonstruowanie bryły przestrzennej o n -krawędziach?

- (a) Wykonaj szkic takiej bryły dla $n = 8, 9, 10$.
- (b) Wykaż, że taka bryła istnieje dla dowolnego $n > 10$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeśli $x > -1$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Zadanie 5. Niech $(F_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Fibonacciego, tj. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Wykaż, że dla dowolnego n zachodzi:

- (a) $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.
- (b) $|F_{n+2}F_n - (F_{n+1})^2| = 1$.
- (c) 5 dzieli n wtedy i tylko wtedy, gdy 5 dzieli F_n .

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Zadanie 7. Wykaż, że $3^n > n^3$ dla dowolnego $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8. Przypuśćmy, że dla dodatniej liczby rzeczywistej a liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba $a^n + \frac{1}{a^n}$ jest całkowita.

Zadanie 9. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Wykaż, że dla $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ zachodzi

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Zadania trudniejsze

Zadanie 10. Na uszkodzonym kalkulatorze działają tylko przyciski $\sin$, $\cos$, tg , $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1} , a początkowo wyświetla się liczba 0. Wykaż, że dowolną dodatnią liczbę wymierną można uzyskać wciskając skończenie wiele przycisków. Przyjmij, że kalkulator liczy z nieskończoną dokładnością i oblicza kąty w radianach.

Zadanie 11. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ o elementach w zbiorze $\{0, 1\}$ nazwiemy zbalansowanym jeśli $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$. Wykaż, że dowolny $\{0, 1\}$ -ciąg o $2n+1$ elementach posiada zbalansowany podciąg $2n$ -elementowy.

Zadanie 12. Niech $x_1, \dots, x_n$ oraz $y_1, \dots, y_m$ będą liczbami naturalnymi. Przypuśćmy, że $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_m < mn$. Wykaż, że można usunąć pewne wyrazy (nie wszystkie) z lewej i prawej strony powyższej równości, aby nadal była ona prawdziwa.

Zadanie 13. Wykaż, że dla dodatnich liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ zachodzi nierówność

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2,$$

gdzie równość jest wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Zadanie 14. Liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n$ są nie mniejsze niż 1. Wykaż, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}.$$