

Zadanie 1. Przy jakiej wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

ma najmniejszą wartość

Zadanie 2. Dowieść, że jeżeli równania $x^2 + mx + n$ i $x^2 + px + q$ mają wspólny pierwiastek, to między współczynnikami tych równań zachodzi związek

$$(n - q)^2 + (m - p)(np - mq) = 0.$$

Udowodnić twierdzenie odwrotne (w dziedzinie zespolonej)

Wzory Viete'a dla wielomianów wyższych stopni

Oznaczmy przez σ_i współczynnik (bez znaku) stojący przy t^{n-i} w wielomianie monicznym o pierwiastkach $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla wielomianu stopnia 3 mamy np.

$$\sigma_1 = x + y + z, \quad \sigma_2 = xy + yz + zx, \quad \sigma_3 = xyz$$

oraz

$$P(t) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3.$$

Oznaczmy przez S_k sumę k -tych potęg pierwiastków

$$S_k = x^k + y^k + z^k.$$

Zadanie 3. Wykaż, że $S_0 = 3$, $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ oraz

$$S_{k+3} = S_{k+2}\sigma_1 - S_{k+1}\sigma_2 + S_k\sigma_3$$

Zadanie 4. Liczby x, y, z spełniają układ

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb jest równa a .

Zadanie 5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

Zadanie 6. Udowodnij, że jeśli $x + y + z = 0$, to zachodzą równości

(a) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(b) $\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$

(c) $\frac{x^7 + y^7 + z^7}{7} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}$

Zadanie 7. Udowodnij, że dla nieujemnych liczb x, y, z o sumie równej 1 zachodzi nierówność

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Zadanie 8. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Zadanie 9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ x^3 + y^3 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

Zadanie 10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$$