

Graf $G = (V, E)$ nazywamy k -dzielny, jeśli V da się rozbić na k -rozłącznych podzbiorów $V_1, \dots, V_k$ takich, że nie ma krawędzi między elementami tego samego zbioru tzn. jeśli $u, v \in V_i$ to $(u, v) \notin E$. Piszemy wówczas $G = (V_1, V_2, \dots, V_k, E)$.

Jeśli istnieją wszystkie inne krawędzie poza wykluczonymi z definicji graf nazywamy *pełnym grafem* k -dzielny i oznaczamy $K_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ gdzie $m_i = \#V_i$.

Zadanie 1. Wykaż, że graf dwudzielny nie zawiera trójkątów.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli graf o n wierzchołkach nie posiada trójkątów, to ma on co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ krawędzi.

Zadanie 3. Graf posiada 20 wierzchołków i 101 krawędzi. Wykaż, że istnieją w nim dwa trójkąty o wspólnej krawędzi.

Zadanie 4. Wykaż, że w grafie, który posiada n wierzchołków i m krawędzi jest co najmniej $\frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4} \right)$ trójkątów.

Zadanie 5. Wykaż, że liczba krawędzi w pełnym grafie k -dzielny jest maksymalna, jeśli rozmiary części podziałów różnią się co najwyżej o 1.

Zadanie 6. Niech $n = mk + r$. Oznaczmy przez $T_m(n)$ pełny graf m -dzielny $K_{n_1, \dots, n_m}$ gdzie $n_1 = n_2 = \dots = n_r = k + 1$ oraz $n_{r+1} = \dots = n_m = k$. Wykaż, że $T_m(n)$ ma

$$e_m(n) = \binom{n-k}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2}$$

krawędzi. Powyższy graf nazywamy *grafem Turána*.

Zadanie 7. Niech G będzie grafem m -dzielny o n wierzchołkach. Wykaż, że $e(G) \leq e_m(n)$.

Zadanie 8. (Twierdzenie Turána) Jeśli graf G ma n wierzchołków i nie zawiera grafu pełnego (kliki) K_{m+1} , to $e(G) \leq e_m(n)$. Co więcej, równość zachodzi *tylko* dla grafu Turána $T_m(n)$.

Zadanie 9. Na płaszczyźnie dane jest 6 punktów, żadne trzy nie są współliniowe. Narysowano losowo 13 odcinków między tymi punktami. Wykaż, że istnieją cztery punkty, które wszystkie są ze sobą połączone.

Zadanie 10. Grupa 14 turystów doszła do schroniska i chciała zagrać w brydża. Mają oni zasadę, że cztery osoby mogą zagrać partię, jeśli żadna para spośród nich nie grała jeszcze razem w drużynie. Dotychczas (w poprzednich schroniskach) każdy z turystów grał w parze łącznie z dokładnie pięcioma innymi osobami. Tutaj rozegrano 3 partie, a teraz kierownik schroniska chciałby dołączyć do zabawy. Wykaż, że można dobrać mu trzech graczy, zgodnie z obowiązującymi w grupie regułami.