

Grafem prostym nazywamy parę  $(V, E)$  gdzie  $V$  jest niepustym zbiorem (nazywany zbiorem wierzchołków), a  $E \subset \{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}$  (nazywamy go zbiorem krawędzi).

Graf nazywamy pełnym jeżeli wszystkie jego wierzchołki są wzajemnie przyległe (istnieje krawędź między dowolną parą wierzchołków). Graf pełny o  $n$  wierzchołkach oznaczamy  $K_n$ .

Stopniem wierzchołka  $v \in V$  w grafie  $G$  nazywamy liczbę  $d_G(v)$  równą liczbie krawędzi wychodzących z  $v$ .

**Zadanie 1.** Rozważmy szachownicę  $3 \times 3$  i cztery skoczki ustawione w narożnikach w kolejności cyklicznej  $(B, C, C, B)$ . Czy można tak przestawiać skoczki, aby na końcu stały w narożnikach w kolejności  $(B, C, B, C)$ ?

**Zadanie 2.** Mamy  $n > 3$  osób, niektóre się znają, inne nie. Przynajmniej jedna osoba nie zna wszystkich pozostałych (może znać niektórych, ale nie zna wszystkich). Jaka jest największa możliwa liczba osób, które znają wszystkich?

**Zadanie 3.** Danych jest  $n$  osób  $A_1, \dots, A_n$ . Niektóre osoby się znają, a każde dwie osoby, które się nie znają, mają jednego lub dwóch wspólnych znajomych. Przypuśćmy, że  $A_1$  i  $A_2$  się znają, ale nie mają wspólnych znajomych. Wykaż, że oboje mają równoliczną grupę znajomych.

**Zadanie 4.** Dziewięciu matematyków spotkało się na konferencji. Każdy z nich zna co najwyżej 3 języki, a w każdej trójce osób znajdują się dwie, które mogą porozumieć się we wspólnym języku. Wskaż, że istnieje troje matematyków, którzy mówią wspólnym językiem.

**Zadanie 5.** Niech  $G = (V, E)$ . Jeśli  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  to  $d_G(v_1) + \dots + d_G(v_n) = 2\bar{E}$ .

**Zadanie 6.** Wykaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta.

**Zadanie 7.** W zawodach tenisa stołowego biorą udział 24 mieszane pary. Niektórzy z zawodników uściskali dłoń przed zawodami, inni nie, ale na pewno zawodnicy z tej samej pary nie ściskali sobie rąk. Na koniec gry jeden z mężczyzn zapytał wszystkich z iloma osobami ściskali ręce i otrzymał wszystkie różne wyniki. Z iloma osobami uścisnęła rękę partnerka tego mężczyzny?

**Zadanie 8.** Z każdego miasta w pewnym państwie wychodzi 20 ulic do innych miast tak, że istnieje droga (być może przez inne miasta) między dowolnymi dwoma miastami. Jedną z ulic zamknięto do remontu. Wykaż, że nadal można się przemieścić między dwoma dowolnymi miastami.

**Zadanie 9.** W klubie brydżowym jest 99 członków. Każdy z nich zna co najmniej 67 osób i każdy twierdzi, że będzie grał tylko ze znajomymi. Wykaż, że da się w tej grupie znaleźć cztery osoby, które zagrają razem.

**Zadanie 10.** Na płaszczyźnie danych jest  $n$  punktów tak, że odległość między dowolnymi dwoma jest co najmniej 1. Wykaż, że da się znaleźć co najwyżej  $3n$  par punktów takich, że w każdej parze punkty odległe są o dokładnie 1.

**Zadanie 11.** Na płaszczyźnie mamy dane  $n$  punktów. Wykaż, że liczba par punktów, których odległość wynosi 1 nie może przekroczyć  $\frac{n}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}n^{\frac{3}{2}}$ .