

Zadanie 1. Niech $x > -1$ oraz $\alpha > 0$. Wykaż, że jeśli $0 < \alpha < 1$, to

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x,$$

jeżeli zaś $\alpha > 1$, to

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x.$$

Zadanie 2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (0, 1)$ zachodzi

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1} > \frac{1-x^n}{n} \sqrt{x}.$$

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb α, β takich, że $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} > \frac{\beta}{\alpha}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Zadanie 5. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi

$$\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x \geq 2 + n^2 \cos^2(2x).$$

Zadanie 6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniających warunki $a \geq b \geq c$ zachodzi nierówność

$$a^c \cdot b^a \cdot c^b \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a.$$