

Zadanie 1. Oblicz

$$NWD(2020 + 2, 2020^2 + 2, 2020^3 + 2, \dots).$$

Zadanie 2. W pewnej grze zawodnik może zdobyć jednorazowo 3 punkty lub 7 punktów. Znajdź największą liczbę naturalną n , taką że zawodnik nie ma możliwości zebrać n punktów.

Zadanie 3. W jaki sposób odmierzyć 2 litry wody mając do dyspozycji pojemnik 9-litrowy, pojemnik 5-litrowy oraz kran z wodą?

Zadanie 4. (Twierdzenie Bézout) Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych m, n istnieją liczby całkowite x, y takie, że

$$NWD(n, m) = (m, n) = xn + ym.$$

Zadanie 5. Wykaż, że $(ca, cb) = c(a, b)$.

Zadanie 6. Wykaż, że jeśli $a|bc$ oraz $(a, b) = 1$, to $a|c$.

Zadanie 7. Niech $a > 1$, $m, n > 0$ będą całkowite. Wykaż, że

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m, n)} - 1$$

Zadanie 8. Przypuśćmy, że $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$, $a \neq b$, $(a, b, c) = 1$ oraz $\frac{ab}{a-b} = c$. Wykaż, że $a - b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 9. Niech n będzie liczbą naturalną. Znajdź $NWD\left(\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \dots, \binom{2n}{2n-1}\right)$.

Zadanie 10. Niech $n, a, b \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a \neq b$ oraz $n|(a^n - b^n)$. Wykaż, że $n|\frac{a^n - b^n}{a - b}$.

Zadanie 11. Niech a i b będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi, takimi że $ab(a + b)$ jest podzielne przez $a^2 + ab + b^2$. Wykaż, że $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

Zadanie 12. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k - 1$.

Zadanie 13. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q , takie że $p + q = (p - q)^3$.