

**Zadanie 1. (E)** W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  punkt  $M$  jest środkiem boku  $BC$ . Niech  $P$  będzie rzutem punktu  $C$  na prostą  $AM$ . Oraz niech  $Q$  będzie drugim punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie  $ABP$  z odcinkiem  $CB$ . Wykaż, że jeśli  $N$  jest środkiem odcinka  $AQ$ , to  $NB = NC$ .

**Rozwiązanie 1.** Zadanie z USAMO 2023.

Niech  $D$  będzie spodkiem wysokości a wierzchołką  $A$ . Czworokąt  $ADPC$  jest wówczas cykliczny. Z potęgi punktu  $M$  względem dwóch okręgów mamy

$$MB \cdot MQ = MA \cdot MP = MC \cdot MD,$$

czyli dzięki założeniu  $MB = MC$  mamy  $MQ = MD$ . Z twierdzenia o linii środkowej mamy  $MN \parallel AD$ , co daje tezę.

**Zadanie 2. (E)** W zapisie dziesiętnym ułamki  $A, B \in (0, 1/2)$  są okresowe, o okresie *minimalnym* odpowiednio 6 i 12. Jakie są wszystkie możliwe okresy minimalne liczby  $A + B$ ?

**Rozwiązanie 2.** Ułamek okresowy  $P$  o okresie minimalnym  $k$  może być zapisany w postaci

$$P = \frac{X}{10^m(10^k - 1)}.$$

Suma lub różnica dwóch liczb tej postaci (z ustalonym  $k$ ) także jest tej postaci, więc jeśli dwa ułamki mają okres  $k$ , to ich suma i różnica również. W konsekwencji 12 jest okresem ułamka  $A + B$ , więc kandydatami są dzielniki liczby 12.

6 nie może być okresem liczby  $A + B$ , gdyż wówczas byłoby okresem liczby  $B = (A + B) - A$ . Wykluczamy więc dzielniki liczby 6 i jedynymi możliwościami są 4 i 12. Te wartości są realizowane przez:

$$A = 0.(000001), \quad B = 0.(000000000001), \quad A + B = 0.(000001000002),$$

$$A = 0.(000001), \quad B = 0.(011100110110), \quad A + B = 0.(0111).$$

**Zadanie 3. (E)** Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b$  zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$$

**Rozwiązanie 3.** Jeśli suma  $a + b$  jest nieujemna, to także  $a^3 + b^3 \geq 0$ . Jeśli jest ujemna to podstawiając  $(a, b) = (-a, -b)$  otrzymujemy do udowodnienia tę samą nierówność z nieujemną sumą. Oznaczmy przez  $P_k$  średnią potęgową liczb  $a$  i  $b$  stopnia  $k$ . Problem ma więc postać  $P_1 P_2^2 P_3^3 \leq P_6^6$ . Z nierówności AM-GM (dla liczb dodatnich) i nierówności o średnich potęgowych (z ewentualnym przejściem przez wartość bezwzględną tzn.  $\frac{x+y}{2} \leq \frac{|x|+|y|}{2} \leq \sqrt[6]{\frac{|x|^6+|y|^6}{2}} = \sqrt[6]{\frac{x^6+y^6}{2}}$ ) mamy

$$P_1 P_2^2 P_3^3 \leq \left( \frac{P_1 + 2P_2 + 3P_3}{6} \right)^6 \leq \left( \frac{6P_6}{6} \right)^6 = P_6^6.$$

**Zadanie 4. (M)** Na okręgu obrano  $n > 2$  punktów i każdy z nich połączono odcinkiem z każdym innym. Czy można narysować łamaną, która zawierać będzie wszystkie te odcinki, każdy dokładnie raz i zakończy się tym samym punkcie, którym się zaczęła?

**Rozwiązanie 4.** Jeśli  $n$  jest parzyste, to nie - każdy z wierzchołków ma stopień nieparzysty, a powinien mieć parzysty (tyle razy do punktu wchodzimy, co wychodzimy). Skonstruujemy indukcyjnie taką łamaną dla  $n = 2k + 1$ . Dla  $k = 1$  teza jest oczywista.

Przypuśćmy, że potrafimy skonstruować taką łamaną dla  $2k - 1$  punktów i rozważmy  $2k + 1$  punktów. Dla punktów  $A_1, \dots, A_{2k-1}$  istnieje odpowiednia łamana startująca w  $A_1$ . Oznaczmy ją przez  $L$ . Zauważmy

teraz, że potrafimy skonstruować łamaną  $K$ , która będzie zawierać wszystkie odcinki od zbioru  $\{B, C\}$  do zbioru  $\{A_1, \dots, A_{2k-1}\}$  oraz odcinek  $BC$ . Istotnie, taką łamaną jest:

$$K = A_1 B A_2 C A_3 A \dots A_{2k-3} B A_{2k-2} C A_{2k-1} B C A_1.$$

Sklejamy te łamane idąc po  $K$ , a następnie po  $L$ .

---