Algebraiczna geometria rzutowa

Andrzej Nowicki

Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki,
ul. Chopina 12–18, 87–100 Toruń, (e-mail: anow@mat.uni.torun.pl)

Czerwiec 2003

Spis treści

1 Domknięte zbiory rzutowe

1.1 Przestrzeń rzutowa

Niech k będzie ciałem i n liczbą naturalną. W zbiorze $k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ definiujemy następującą relację $\sim$ typu równoważności

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \iff \underset{0 \neq a \in k}{\exists} \ \underset{i \in \{0,\dots,n\}}{\forall} \ y_i = a x_i \ .$$

Klasę abstrakcji każdego elementu $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ (względem tej relacji) oznaczamy przez $(x_0 : \dots : x_n)$. Zbiór wszystkich klas abstrakcji oznaczamy przez $\mathbb{P}^n(k)$ i nazywamy *n-wymiarową przestrzenią rzutową nad ciałem k*. Jeżeli $x \in \mathbb{P}^n(k)$, to każdy ciąg $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ taki, że $x = (x_0 : \dots : x_n)$ nazywamy *ciągiem współrzędnych jednorodnych punktu x*.

Niech $i \in \{0, \dots, n\}$. Jeśli punkt $x \in \mathbb{P}^n(k)$ posiada ciąg jednorodnych współrzędnych z niezerowym elementem na i-tym miejscu, to każdy ciąg jednorodnych współrzędnych punktu x ma niezerowe i-te miejsce. Zbiór wszystkich punktów $x \in \mathbb{P}^n(k)$ z niezerowym i-tym miejscem oznaczać będziemy przez $\mathbb{A}^n_i$ lub $\mathbb{A}^n_i(k)$. Jest oczywiste, że $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n_0 \cup \dots \cup \mathbb{A}^n_n$.

Niech $\mu_i : \mathbb{A}^n_i \longrightarrow k^n$, $\nu_i : k^n \longrightarrow \mathbb{A}^n_i$ będą funkcjami zdefiniowanymi następująco:

$$\begin{aligned} (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) &\overset{\mu_i}{\longmapsto} \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\tfrac{x_i}{x_i}}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}\right), \\ (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) &\overset{\nu_i}{\longmapsto} (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że μ_i jest dobrze określone. Funkcje te są wzajemnie odwrotne. Każde więc $\mathbb{A}^n_i$ możemy interpretować jako afiniczną przestrzeń k^n.

Niech $H_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k);\ x_i = 0\}$. Zbiór H_i nazywamy *hiperpłaszczyzną w nieskończoności.* Bijekcja

$$(x_0 : \dots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \dots : x_n) \longmapsto (x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n)$$

pozwala interpretować H_i jako przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^{n-1}(k)$, którą w tym przypadku będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}^{n-1}_i$. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n_i \cup \mathbb{P}^{n-1}_i.$$

Przestrzeń $\mathbb{P}^n(k)$ możemy interpretować jako zbiór wszystkich prostych w k^{n+1} przechodzących przez punkt $(0, \dots, 0)$ lub równoważnie jako zbiór wszystkich jednowymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej k^{n+1}.

Z równości $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{A}^n_i \cup \mathbb{P}^{n-1}_i$ wynika, że n-wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^n(k)$ jest sumą n-wymiarowej przestrzeni afinicznej k^n i zbioru wszystkich kierunków w k^n. Mamy np. $\mathbb{P}^2(k) = A^2_0 \cup \mathbb{P}^1_0$. Przestrzń $\mathbb{P}^2(k)$ jest zbiorem wszystkich prostych w k^3 przechodzących przez 0. Te wszystkie proste, które leżą na płaszczyźnie 0XY tworzą jednowymiarową przestrzeń rzutową. Pozostałe proste przecinają ustaloną płaszczyznę (np. $Z = 1$), równoległą do płaszczyzny 0XY. Każdy punkt tej równoległej płaszczyzny wyznacza dokładnie jedną prostą w k^3

przechodzącą przez 0. Zatem $\mathbb{P}^2(k)$, to $\mathbb{P}^1(k)$ plus płaszczyzna afiniczna. W podobny sposób widzimy, że $\mathbb{P}^1(k)$, to punkt (czyli $\mathbb{P}^0(k)$) plus prosta afiniczna.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Ideały jednorodne

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ będzie pierścieniem wielomianów nad ciałem k. Mówimy że wielomian $f \in k[S]$ jest *jednorodny stopnia* m (lub, że jest *formą stopnia* m), jeśli f jest sumą jednomianów stopnia m. Zanotujmy dobrze znane fakty (patrz np. [Now94a] 19).

Stwierdzenie 1.2.1. *Niech $f \in k[S]$. Jeżeli ciało k jest nieskończone, to następujące warunki są równoważne.*

(1) *f jest wielomianem jednorodnym stopnia m.*

(2) *$f(au_0, \dots, au_n) = a^m f(u_0, \dots, u_n)$, dla wszystkich $u_0, \dots, u_n \in k$ oraz $a \in k \smallsetminus \{0\}$.*

(3) *W pierścieniu wielomianów $k[t][S_0, \dots, S_n]$ zachodzi równość*

$$f(tS_0, \dots, tS_n) = t^m f(S_0, \dots, S_n). \boxtimes$$

Stwierdzenie 1.2.2. *Niech $f \in k[S]$. Jeżeli k jest ciałem charakterystki zero, to następujące warunki są równoważne.*

(1) *f jest wielomianem jednorodnym stopnia m.*

(4) (*Tożsamość Eulera*) $S_0 \frac{\partial f}{\partial S_0} + \dots + S_n \frac{\partial f}{\partial S_n} = mf$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.2.3. *Jeśli iloczyn niezerowych wielomianów $f, g \in k[S]$ jest wielomianem jednorodnym, to wielomiany f, g są jednorodne.* $\boxtimes$

Każdy wielomian $f \in k[S]$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci $\sum_i f_i$, gdzie każde f_i jest wielomianem jednorodnym stopnia i. W tym przypadku wielomiany f_i nazywamy *składowymi jednorodnymi wielomianu* f.

Mówimy, że ideał $A \subseteq k[S]$ jest *jednorodny*, jeśli z tego, że $f \in A$ wynika, że każda składowa jednorodna wielomianu f należy do A. Ideały 0 i $k[S]$ są oczywiście jednorodne. Łatwo wykazać następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1.2.4. *Niech $A \subseteq k[S]$ będzie ideałem w $k[S]$. Wtedy A jest ideałem jednorodnym $\iff$ ideał A jest generowany przez zbiór wielomianów jednorodnych.* $\boxtimes$

Dowód następnego stwierdzenia można znaleźć np. w [ZarSam] t2 str. 152.

Stwierdzenie 1.2.5.

(1) *Sumy, przekroje i iloczyny ideałów jednorodnych są ideałami jednorodnymi.*

(2) *Jeżeli A, B są ideałami jednorodnymi, to ideał $A : B$ też jest jednorodny.*

(3) *Jeżeli A jest ideałem jednorodnym, to radykał $\sqrt{A}$ jest też ideałem jednorodnym.*

(4) *Każdy jednorodny ideał A posiada nieskracalny rozkład prymarny $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_r$, w którym ideały prymarne $Q_1, \dots, Q_r$ są jednorodne.*

(5) *Ideały pierwsze, stowarzyszone z ideałem jednorodnym, są ideałami jednorodnymi.* $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.2.6. *Niech A będzie jednorodnym ideałem w $k[S]$ różnym od $k[S]$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *A jest ideałem pierwszym.*

(2) *Jeśli $f, g \in k[S]$ są jednorodnymi wielomianami takimi, że $fg \in A$, to $f \in A$ lub $g \in A$.*

Dowód. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) jest oczywista. Dla dowodu implikacji (2) $\Rightarrow$ (1) załóżmy, że f, g są dowolnymi wielomianami z $k[S]$ takimi, że $fg \in A$. Niech $f = f_r + \cdots + f_0$, $g = g_s + \cdots + g_0$ będą rozkładami na składowe jednorodne. Przypuśćmy, że $f \notin A$ oraz $g \notin A$. Istnieją wtedy liczby p i q takie, że $f_p \notin A$, $g_q \notin A$. Załóżmy, że liczby p, q są największe z możliwych. Oznaczmy: $F = f_p + \cdots + f_0$, $G = g_q + \cdots + g_0$, $a = f_r + \cdots + f_{p+1}$, $b = g_s + \cdots + g_{q+1}$. Wtedy $f = a + F$, $g = b + G$ oraz $a, b \in A$. Z tego, że $fg \in A$ wynika, że $FG \in A$. Ponieważ ideał A jest jednorodny, więc każda składowa jednorodna wielomianu FG należy do A. W szczególności do tego ideału należy wielomian $f_p g_q$ (gdyż jest to składowa jednorodna wielomianu FG najwyższego stopnia). Teraz z (2) wynika, że $f_p \in A$ lub $g_q \in A$, ale to jest sprzecznością. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Zbiory domknięte w przestrzeni rzutowej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ będzie pierścieniem wielomianów nad nieskończonym ciałem k.

Definicja 1.3.1. Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{P}^n(k)$ jest *zerem wielomianu* $f \in k[S]$, jeśli

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

dla każdego ciągu $(x_0, \dots, x_n)$ jednorodnych współrzędnych punktu x.

Przykład 1.3.2. Niech $n = 2$, $k[S] = k[S_0, S_1, S_2]$. Punkt $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2(k)$ jest zerem wielomianu $f = 2S_1 - 3S_2 \in k[S]$. Punkt $(0 : 3 : 2) \in \mathbb{P}^2(k)$ jest zerem wielomianu $g = S_0^2 + 2S_1 - 3S_2 \in k[S]$. Natomiast punkt $(0 : 3 : 6) \in \mathbb{P}^2(k)$ nie jest zerem wielomianu $h = S_0^2 + 2S_1^2 - 3S_2 \in k[S]$. Mamy tu $h(0, 3, 6) = 0$ jednakże $(0 : 3 : 6) = (0 : 1 : 2)$ i $h(0, 1, 2) = -4 \neq 0$ (przy założeniu, że $\operatorname{char}(k) \neq 2$). ⊠

Lemat 1.3.3. *Punkt $x \in \mathbb{P}^n(k)$ jest zerem wielomianu $f \in k[S]$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest zerem każdej składowej jednorodnej wielomianu f.*

Dowód. Niech $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ i niech $f = f_m + \cdots + f_r$ będzie rozkładem wielomianu f na jednorodne składowe. Wtedy

$$0 = f(ax_0, \dots, ax_n) = a^m f_m(x_0, \dots, x_n) + \cdots + a^r f_r(x_0, \dots, x_n),$$

dla każdego $a \in k \setminus \{0\}$. Stąd wynika, że $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0$, dla wszystkich $i = m, \dots, r$ (gdyż ciało k jest nieskończone), a zatem x jest zerem każdej formy $f_m, \dots, f_r$. ⊠

Definicja 1.3.4. Jeżeli $F \subseteq k[S]$ jest podzbiorem, to oznaczmy:

$$\mathrm{V_p}(F) = \{x \in \mathbb{P}^n(k);\ x \text{ jest zerem każdego wielomianu } f \in F\}.$$

Każdy podzbiór w $\mathbb{P}^n(k)$ postaci $\mathrm{V_p}(F)$ nazywamy *rzutowym zbiorem algebraicznym* lub *rzutowym zbiorem domkniętym*.

Stwierdzenie 1.3.5. *Jeśli $F \subseteq k[S]$ jest podzbiorem, to*

$$\mathrm{V_p}(F) = \mathrm{V_p}((F)) = \mathrm{V_p}(A) = \mathrm{V_p}(\sqrt{A}),$$

gdzie A jest najmniejszym ideałem jednorodnym w $k[S]$ zawierającym zbiór F. ⊠

Jest oczywiste, że dla każdego zbioru $F \subseteq k[S]$ istnieje najmniejszy ideał jednorodny zawierający F. Zbiór jednorodnych ideałów zawierających F jest bowiem niepusty (cały pierścień $k[S]$ jest takim ideałem jednorodnym). Przekrój ideałów jednorodnych jest ideałem jednorodnym. Zatem przekrój wszystkich jednorodnych ideałów zawierających F jest najmniejszym ideałem jednorodnym zawierającym F.

Najmniejszy ideał jednorodny zawierający zbiór F jest zwykłym ideałem generowanym przez wszystkie składowe jednorodne wszystkich wielomianów ze zbioru F.

Z twierdzenia Hilberta o bazie wynika:

Stwierdzenie 1.3.6. *Każdy rzutowy zbiór algebraiczny w $\mathbb{P}^n(k)$ jest postaci $\mathrm{V_p}(F)$, gdzie F jest skończonym zbiorem jednorodnych wielomianów w $k[S]$.* ⊠

Operacja $\mathrm{V_p}$ ma podobne własności co operacja V w sytuacji afinicznej.

Stwierdzenie 1.3.7.

(1) $\emptyset = \mathrm{V_p}(\{1\}) = \mathrm{V_p}(k[S]), \quad \mathbb{P}^n(k) = \mathrm{V_p}(0)$,

(2) $\bigcap_\alpha \mathrm{V_p}(F_\alpha) = \mathrm{V_p}(\bigcup_\alpha F_\alpha) = \mathrm{V_p}(\sum_\alpha (F_\alpha))$,

(3) *Jeśli A i B są jednorodnymi ideałami w $k[S]$, to*

$$\mathrm{V_p}(A) \cup \mathrm{V_p}(B) = \mathrm{V_p}(A \cap B) = \mathrm{V_p}(AB). \quad ⊠$$

Zbiory postaci $\mathrm{V_p}(F)$ zadają więc na przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(k)$ pewną topologię. Nazywamy ją *topologią Zariskiego na* $\mathbb{P}^n(k)$.

Stwierdzenie 1.3.8. *Każdy zbiór jednoelementowy $\{x\} \subset \mathbb{P}^n(k)$ jest rzutowym zbiorem algebraicznym.*

Dowód. Niech $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ będzie ciągiem jednorodnych współrzędnych punktu x. Istnieje wtedy $i \in \{0, \dots, n\}$ takie, że $x_i \neq 0$. Załóżmy, że $x_0 \neq 0$ i rozpatrzmy jednorodny ideał A w $k[S]$ generowany przez wszystkie wielomiany postaci $x_i S_0 - x_0 S_i$, dla $i = 0, \dots, n$. Jest oczywiste, że $\{x\} = \mathrm{V_p}(A)$. ⊠

Oznacza to, że topologia Zariskiego na $\mathbb{P}^n(k)$ jest T_1-topologią.

Stwierdzenie 1.3.9. *Każdy domknięty zbiór rzutowy w $\mathbb{P}^1(k)$ jest albo całą przestrzenią $\mathbb{P}^1(k)$ albo zbiorem skończonym.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^1(k)$ będzie domkniętym zbiorem rzutowym różnym od $\mathbb{P}^1(k)$. Wtedy $X = \mathrm{V_p}(f_1, \dots, f_r)$, gdzie $f_1, \dots, f_r$ są pewnymi niezerowymi wielomianami jednorodnymi należącymi do $k[S] = k[S_0, S_1]$. Oczywiście $X \subset \mathrm{V_p}(f_1)$. Wystarczy zatem pokazać, że $\mathrm{V_p}(f_1)$ jest zbiorem skończonym.

Ponieważ f_1 jest niezerowym wielomianem jednorodnym, więc

$$f_1 = a_0 S_0^m + a_1 S_0^{m-1} S_1 + \cdots + a_{m-1} S_0^1 S_1^{m-1} + a_m S_1^m,$$

gdzie $a_0, \dots, a_m$ są elementami ciała k, z których co najmniej jeden jest niezerowy.

Niech $x = (x_0 : x_1)$ będzie zerem wielomianu f_1. Jeśli $x_0 = 0$, to $x_1 \neq 0$ i wtedy $x = (0 : x_1) = (0 : 1)$. Wielomian f_1 zeruje się więc w conajwyżej jednym takim punkcie z $x_0 = 0$. Dalej załóżmy, że $x_0 \neq 0$. Wtedy $x = (x_0 : x_1) = (1 : \frac{x_1}{x_0})$. Z tego, że $f_1(x_0, x_1) = 0$ wynika, że

$$0 = a_0 + a_1 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^1 + a_2 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_m \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^m,$$

to znaczy, że $\frac{x_1}{x_0}$ jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu $a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m \in k[t]$. Pierwiastków takich jest oczywiście co najwyżej m, a więc skończenie wiele. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Ideały jednorodne postaci $\mathbf{I}_p(\mathbf{X})$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wszystkie fakty podane w tym podrozdziale są podobne do odpowiednich faktów z geometrii afinicznej. Zakładamy, tak jak poprzednio, że k jest ciałem nieskończonym.

Definicja 1.4.1. Jeżeli $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ jest podzbiorem, to oznaczmy:

$$\mathrm{I_p}(X) = \{f \in k[S];\ \text{każdy punkt } x \in X \text{ jest zerem wielomianu } f\}.$$

W szczególności $\mathrm{I_p}(\emptyset) = k[S]$.

Stwierdzenie 1.4.2.

(1) $\mathrm{I_p}(X)$ *jest radykalnym ideałem jednorodnym w* $k[S]$.

(2) *Jeżeli* $X \subseteq Y$, *to* $\mathrm{I_p}(Y) \subseteq \mathrm{I_p}(X)$.

(3) *Jeżeli* $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, *to* $X \subseteq \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X)$.

(4) *Jeżeli* $F \subseteq k[S]$, *to* $F \subseteq \mathrm{I_p}\mathrm{V_p}(F)$.

(5) $\mathrm{V_p}\mathrm{I_p}\mathrm{V_p} = \mathrm{V_p}$.

(6) $\mathrm{I_p}\mathrm{V_p}\mathrm{I_p} = \mathrm{I_p}$. ⊠

Jeżeli $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ jest podzbiorem, to przez $\overline{X}$ oznaczamy domknięcie zbioru X w topologii Zariskiego na $\mathbb{P}^n(k)$.

Stwierdzenie 1.4.3. $\overline{X} = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X)$.

Dowód. Z 1.4.2(3) widzimy, że $\mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X)$ jest zbiorem domkniętym zawierającym X. Niech $W = \mathrm{V_p}(F)$, gdzie $F \subseteq k[S]$, będzie dowolnym zbiorem domkniętym zawierającym X. Wtedy $X \subseteq W$ więc $\mathrm{I_p}(W) \subseteq \mathrm{I_p}(X)$, więc $X \subseteq \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X) \subseteq \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(W) = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}\mathrm{V_p}(F) = \mathrm{V_p}(F) = W$. Zatem każdy zbiór domknięty zawierający X zawiera zbiór $\mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X)$. ⊠

Stwierdzenie 1.4.4. *Jeżeli* $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ *jest podzbiorem, to* $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X})$.

Dowód. Wiemy, że $\overline{X} = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X)$. Zatem $\mathrm{I_p}(\overline{X}) = \mathrm{I_p}\mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(X)$. ⊠

Stwierdzenie 1.4.5. *Niech* $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ *będzie podzbiorem. Wtedy* $\mathrm{I_p}(X) = 0 \iff \overline{X} = \mathbb{P}^n(k)$.

Dowód. Jeśli $\mathrm{I_p}(X) = 0$, to z 1.4.3 mamy: $\mathbb{P}^n(k) = \mathrm{V_p}(0) = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X) = \overline{X}$. Niech $\mathbb{P}^n(k) = \overline{X}$. Wtedy (na mocy Stwierdzenia 1.4.4 oraz założenia o nieskończoności ciała k) $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X}) = \mathrm{I_p}(\mathbb{P}^n(k)) = 0$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Operacje podnoszenia i opuszczania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wprowadziliśmy (dla każdego $i \in \{0,\dots,n\}$) dwa, wzajemnie odwrotne, odwzorowania $\mu_i : \mathbb{A}^n_i \longrightarrow k^n$, $\nu_i : k^n \longrightarrow \mathbb{A}^n_i$,

$$(x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \xmapsto{\mu_i} \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\tfrac{x_i}{x_i}}, \dots, \tfrac{x_n}{x_i}\right),$$
$$(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \xmapsto{\nu_i} (x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n).$$

Jeśli $i = 0$, to odwzorowania te będziemy oznaczać przy pomocy symbolu $\square$, pisanego odpowiednio u dołu i u góry. Jeśli $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k)$ jest punktem należącym do $\mathbb{A}^n_0$, to $x_\square$ jest punktem afinicznej przestrzeni k^n równym punktowi $(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$. Jeśli natomiast $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$, to $y^\square = (1 : y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{A}^n_0$. Zachodzą następujące równości:

$$(x_\square)^\square = x, \text{ dla } x \in \mathbb{A}^n_0 \quad \text{oraz} \quad (y^\square)_\square = y, \text{ dla } y \in k^n.$$

Podobne oznaczenia stosować będziemy dla podzbiorów.

$$X_\square = \{x_\square;\ x \in X\}, \text{ gdy } X \subseteq \mathbb{A}^n_0 \quad \text{oraz} \quad Y^\square = \{y^\square;\ y \in Y\}, \text{ gdy } Y \subseteq k^n.$$

Wtedy $(X_\square)^\square = X$ i $(Y^\square)_\square = Y$. W szczególności $(\mathbb{A}^n_0)_\square = k^n$ oraz $(k^n)^\square = \mathbb{A}^n_0$.

Wprowadzimy teraz podobne oznaczenia dla wielomianów. Niech $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$, $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ będą pierścieniami wielomianów. Przez $\mathrm{Form}_k[S] = \mathrm{Form}_k[S_0, \dots, S_n]$ oznaczmy zbiór wszystkich jednorodnych wielomianów należących do $k[S]$.

Definicja 1.5.1. Jeżeli $F \in \mathrm{Form}_k[S]$ i $G \in k[T]$, to przez $F_\square$ i $G^\square$ oznaczmy wielomiany, należące odpowiednio do $k[T]$ i $\mathrm{Form}_k[S]$, określone następująco:

$$\begin{aligned} F_\square(T_1, \dots, T_n) &= F(1, T_1, \dots, T_n), \\ G^\square(S_0, \dots, S_n) &= S_0^{\deg G} G\left(\tfrac{S_1}{S_0}, \dots, \tfrac{S_n}{S_0}\right), \quad \text{gdy } G \neq 0 \end{aligned}$$

i $G^\square = 0$ dla $G = 0$.

Przykład 1.5.2.

(1) Dla $F(S_0, S_1, S_2) = S_1^2 S_2 + S_0^2 S_1 + S_0 S_1 S_2 + S_0^3 \in k[S_0, S_1, S_2]$, mamy:

$$F_\square(T_1, T_2) = T_1^2 T_2 + T_1 T_2 + T_1 + 1.$$

(2) Jeśli $G = 2T_1T_2 + T_2 + 3 \in k[T_1, T_2]$, to $G^\square(S_0, S_1, S_2) = 2S_1S_2 + S_0S_2 + 3S_0^2$. ⊠

Podamy teraz podstawowe własności wielomianów postaci $F_\square$ i $G^\square$.

Stwierdzenie 1.5.3. *Niech* $F \in \mathrm{Form}_k[S]$. *Wtedy:*

(1) $\deg F_\square \leqslant \deg F$*;*

(2) *jeśli* $S_0 \nmid F$, *to* $\deg F_\square = \deg F$*;*

(3) *jeśli* $S_0 \nmid F$, *to* $(F_\square)^\square = F$. ⊠

Stwierdzenie 1.5.4. *Niech $G \in k[T]$. Wtedy:*

(1) $\deg G^{\square} = \deg G$;

(2) $(G^{\square})_{\square} = G$;

(3) *jeśli* $G \neq 0$, *to* $S_0 \nmid G^{\square}$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.5.5. *Jeśli* $F_1, F_2 \in \mathrm{Form}_k[S]$, *to* $F_1F_2 \in \mathrm{Form}_k[S]$ *i* $(F_1F_2)_{\square} = F_{1\square}F_{2\square}$. *Jeśli* $G_1, G_2 \in k[T]$, *to* $(G_1G_2)^{\square} = G_1^{\square}G_2^{\square}$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.5.6. *Niech* $F_1, F_2 \in \mathrm{Form}_k[S]$ *oraz* $G_1, G_2 \in k[T]$. *Jeśli formy* F_1 *i* F_2 *są tego samego stopnia, to* $F_1 + F_2 \in \mathrm{Form}_k[S]$ *i* $(F_1 + F_2)_{\square} = F_{1\square} + F_{2\square}$. *Jeśli wielomiany* G_1, G_2 *oraz* $G_1 + G_2$ *są tego samego stopnia, to* $(G_1 + G_2)^{\square} = G_1^{\square} + G_2^{\square}$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.5.7. *Niech* $F \in \mathrm{Form}_k[S]$, $G \in k[T]$, $F \notin k$, $G \notin k$ *oraz* $S_0 \nmid F$.

(1) F *jest formą nierozkładalną* $\iff$ $F_{\square}$ *jest wielomianem nierozkładalnym.*

(2) G *jest wielomianem nierozkładalnym* $\iff$ $G^{\square}$ *jest formą nierozkładalną.*

Dowód. Załóżmy, że G jest wielomianem nierozkładalnym i przypuśćmy, że $G^{\square} = F_1F_2$, gdzie $F_1, F_2 \in k[S] \smallsetminus k$. Wtedy $F_1, F_2 \in \mathrm{Form}_k[S]$. Ponieważ $S_0 \nmid G^{\square}$ (Stwierdzenie 1.5.4), formy F_1 i F_2 nie są podzielne przez S_0. Zatem $G = (G^{\square})_{\square} = (F_1F_2)_{\square} = (F_1)_{\square}(F_2)_{\square}$ oraz $(F_1)_{\square} \notin k$ i $(F_2)_{\square} \notin k$. Otrzymaliśmy sprzeczność z nierozkładalnością wielomianu G. Podobnie wykazujemy pozostałe części tego stwierdzenia. $\boxtimes$

Z powyższych stwierdzeń wynika:

Stwierdzenie 1.5.8. *Niech* $F \in \mathrm{Form}_k[S]$, $F \notin k$, $S_0 \nmid F$, $G \in k[T]$, $G \notin k$.

(1) *Jeśli* $F = F_1 \cdots F_r$ *jest rozkładem formy* F *na czynniki nierozkładalne, to* $F_{\square} = F_{1\square} \cdots F_{r\square}$ *jest rozkładem wielomianu* $F_{\square}$ *na czynniki nierozkładalne.*

(2) *Jeśli* $G = G_1 \cdots G_r$ *jest rozkładem wielomianu* G *na czynniki nierozkładalne, to* $G^{\square} = G_1^{\square} \cdots G_r^{\square}$ *jest rozkładem formy* $G^{\square}$ *na czynniki nierozkładalne.* $\boxtimes$

Jeśli $A \subseteq k[T]$ jest podzbiorem, to afiniczny zbiór domknięty $\mathrm{V}(A)$ będziemy teraz oznaczać przez $\mathrm{V_a}(A)$. Ideały pierścienia $k[T]$ postaci $\mathrm{I}(X)$ oznaczać będziemy przez $\mathrm{I_a}(X)$.

Stwierdzenie 1.5.9.

(1) *Jeśli* $F_1, \dots, F_r \in \mathrm{Form}_k[S]$, *to* $\mathrm{V_p}(F_1, \dots, F_r) \cap \mathbb{A}_0^n = \mathrm{V_a}(F_{1\square}, \dots, F_{r\square})^{\square}$.

(2) *Jeśli* $G_1, \dots, G_r \in k[T]$, *to* $\mathrm{V_a}(G_1, \dots, G_r)^{\square} = \mathrm{V_p}(G_1^{\square}, \dots, G_r^{\square}) \cap \mathbb{A}_0^n$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.5.10. *Niech* $X \subseteq \mathbb{A}_0^n$, $F \in \mathrm{Form}_k[S]$ *oraz* $G \in k[T]$. *Wtedy:*

(1) $F_{\square} \in \mathrm{I_a}(X_{\square}) \iff F \in \mathrm{I_p}(X)$;

(2) $G \in \mathrm{I_a}(X_{\square}) \iff G^{\square} \in \mathrm{I_p}(X)$.

Dowód. Dla wielomianów zerowych jest to oczywiste. Załóżmy, że $F \neq 0$ i $G \neq 0$.
Niech $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in X$. Wtedy $x_0 \neq 0$ oraz

$$F(x) = F(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg F} F(1, \tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}) = x_0^{\deg F} F_{\square}(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}) = x_0^{\deg F} F_{\square}(x_{\square}).$$

Stąd wynika, że $F(x) = 0 \iff F_{\square}(x_{\square}) = 0$. Mamy więc własność (1). Własność (2) wynika z równości $G^{\square}(x) = G^{\square}(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg G} G(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = x_0^{\deg G} G(x_{\square})$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 1.5.11. *Jeśli X jest niepustym zbiorem zawartym w $\mathbb{A}_0^n$, następujące warunki są równoważne.*

(1) $\mathrm{I_a}(X_\square)$ *jest ideałem pierwszym w* $k[T]$.

(2) $\mathrm{I_p}(X)$ *jest ideałem pierwszym w* $k[S]$.

Dowód. Ponieważ $X \neq \emptyset$, więc $\mathrm{I_a}(X_\square) \neq k[T]$ i $\mathrm{I_p}(X) \neq k[S]$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Niech $P, Q \in Form_k[S]$. Załóżmy, że $PQ \in \mathrm{I_p}(X)$. Wtedy (Stwierdzenie 1.5.10) $P_\square Q_\square \in \mathrm{I_a}(X_\square)$, a zatem $P_\square \in \mathrm{I_a}(X_\square)$ lub $Q_\square \in \mathrm{I_a}(X_\square)$. To implikuje (na mocy Stwierdzenia 1.5.10), że $P \in \mathrm{I_p}(X)$ lub $Q \in \mathrm{I_p}(X)$. Ze Stwierdzenia 1.2.6 wynika więc, że $\mathrm{I_p}(X)$ jest ideałem pierwszym. Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1) jest prostą konsekwencją Stwierdzenia 1.5.10. ⊠

Stwierdzenie 1.5.12. *Załóżmy, że ciało k jest algebraicznie domknięte. Niech* $F \in \mathrm{Form}_k[S]$, $S_0 \nmid F$ *i niech*

$$X = \mathrm{V_p}(F) \cap \mathbb{A}_0^n.$$

Jeśli $X \neq \emptyset$, to $\overline{X} = \mathrm{V_p}(F)$, gdzie $\overline{X}$ jest domknięciem zbioru X w $\mathbb{P}^n(k)$.

Dowód. Ponieważ $\mathrm{V_p}(F)$ jest zbiorem domkniętym zawierającym X, więc $\overline{X} \subseteq \mathrm{V_p}(F)$. Udowodnimy inkluzję w przeciwnym kierunku. W tym celu załóżmy, że $\overline{X} = \mathrm{V_p}(G_1, \dots, G_r)$, gdzie $G_1, \dots, G_r$ są pewnymi jednorodnymi wielomianami z $k[S] \smallsetminus k$. Rozpatrzmy wielomian G_1. Ponieważ każdy punkt $x \in X$ jest zerem wielomianu G_1, więc wielomian ten nie jest postaci aS_0^p, gdzie $a \in k \smallsetminus \{0\}$, $p > 0$. Załóżmy, że $G_1 = S_0^p H$, gdzie $p \geqslant 0$, $H \in Form_k[S]$, $S_0 \nmid H$, $\deg H \geqslant 1$.

Niech $y = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ będzie takim punktem, że $F_\square(y) = 0$. Pokażemy, że $H_\square(y) = 0$. Zauważmy najpierw, że $F(y^\square) = 0$. Istotnie, ponieważ $y^\square = (1 : y_1 : \dots : y_n)$ więc

$$F(1, y_1, \dots, y_n) = F_\square(y_1, \dots, y_n) = F_\square(y) = 0.$$

Zatem $y^\square \in X$. To implikuje, że $G_1(y^\square) = 0$, czyli $H(y^\square) = 0$ (bo $G_1 = S_0^p H$). Ale $H = (H_\square)^\square$, więc

$$0 = (H_\square)^\square(y^\square) = 1^{\deg H_\square} H_\square(y) = H_\square(y).$$

Wykazaliśmy zatem, że wielomian $H_\square$ zeruje się we wszystkich takich punktach $y \in k^n$, w których zeruje się wielomian $F_\square$. Z afinicznego twierdzenia Hilberta o zerach wynika więc, że wielomian $H_\square$ należy do radykału ideału $(F_\square)$. Zatem

$$(H_\square)^q = PF_\square, \quad \text{gdzie } q > 0,\ P \in k[T].$$

Stąd wynika, że

$$H^q = ((H_\square)^\square)^q = ((H_\square)^q)^\square = (PF_\square)^\square = P^\square (F_\square)^\square = P^\square F,$$

a zatem H należy do radykału ideału (F) pierścienia $k[S]$. Stąd dalej wynika, że $G_1 = S_0^p H$ należy też do tego radykału. W ten sam sposób pokazujemy, że wszystkie wielomiany $G_1, \dots, G_r$ należą do radykału ideału (F). Mamy więc:

$$(G_1, \dots, G_r) \subseteq \sqrt{(F)},$$

a zatem $\overline{X} = \mathrm{V_p}(G_1, \dots, G_r) \supseteq \mathrm{V_p}(F)$. ⊠

Poniższy przykład pokazuje, że założenie "$S_0 \nmid F$", występujące w Stwierdzeniu 1.5.12, jest istotne.

Przykład 1.5.13. *Niech $F = S_0 S_1$ i niech $X = \mathrm{V_p}(F) \cap \mathbb{A}_0^1$. Wtedy $\mathrm{V_p}(F) = \{(1 : 0), (0 : 1)\}$ oraz $X = \{(1 : 0)\}$. Zatem $\overline{X} = X \neq \mathrm{V_p}(F)$.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Stożek

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Z każdym podzbiorem $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ możemy stowarzyszyć podzbiór $\operatorname{cone}(X) \subseteq k^{n+1}$, zwany *stożkiem nad* X, zdefiniowany następująco:

$$\operatorname{cone}(X) = \{(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1};\ (x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \text{ lub } (x_0 : \dots : x_n) \in X\}.$$

Przykład 1.6.1. Niech $X = \{(2:5)\} \subset \mathbb{P}^1(k)$. Wówczas

$$\operatorname{cone}(X) = \{(0,0)\} \cup \{(2r, 5r);\ 0 \neq r \in k\} = \{(2r, 5r);\ r \in k\},$$

czyli $\operatorname{cone}(X)$ jest zbiorem wszystkich punktów $(x, y) \in k^2$ takich, że

$$\begin{cases} x = 2r, \\ y = 5r, \end{cases}$$

gdzie $r \in k$. Jest to więc prosta w k^2 przechodząca przez punkty $(0,0)$ i $(2,5)$. ⊠

Przykład 1.6.2. Niech $X = \mathrm{V_p}(S_1^2 + S_2^2 - S_0^2)$. Wtedy $\operatorname{cone}(X)$ jest zbiorem wszystkich punktów w k^3 leżących na prostych postaci $l_{(x,y)}$, gdzie $l_{(x,y)}$ oznacza prostą w k^3 przechodzącą przez punkty $(0,0,0)$ i $(1,x,y)$, przy czym $x^2 + y^2 = 1$. W tym przypadku $\operatorname{cone}(X)$ jest więc zwykłym stożkiem w k^3. ⊠

Stwierdzenie 1.6.3 ([Fult78] 90).

(1) *Jeśli X jest niepustym podzbiorem w $\mathbb{P}^n(k)$, to*

$$\mathrm{I_a}(\operatorname{cone}(X)) = \mathrm{I_p}(X).$$

(2) *Jeśli A jest jednorodnym ideałem w $k[S]$ takim, że $\mathrm{V_p}(A) \neq \emptyset$, to*

$$\operatorname{cone}(\mathrm{V_p}(A)) = \mathrm{V_a}(A).$$

Dowód. (1). Niech $f \in \mathrm{I_a}(\operatorname{cone}(X))$. Pokażemy, że $f \in \mathrm{I_p}(X)$. Niech x będzie dowolnym punktem należącym do X i niech $(x_0, \dots, x_n)$ będzie dowolnym ciągiem jednorodnych współrzędnych punktu x. Wtedy $(x_0, \dots, x_n) \in \operatorname{cone}(X)$, a więc $f(x_0, \dots, x_n) = 0$. Oznacza to, że punkt x jest zerem wielomianu f. Każdy więc punkt $x \in X$ jest zerem wielomianu f. Zatem $f \in \mathrm{I_p}(X)$.

Załóżmy teraz, że $f \in \mathrm{I_p}(X)$. Ponieważ $X \neq \emptyset$, więc wielomian f nie ma wyrazu stałego. Zatem $f((0, \dots, 0)) = 0$. Niech $(x_0, \dots, x_n)$ będzie punktem w k^{n+1}, różnym od punktu zerowego, takim, że $(x_0 : \dots : x_n) \in X$. Wtedy $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ (bo $f \in \mathrm{I_p}(X)$). Wielomian f zeruje się więc w każdym punkcie $(x_0, \dots, x_n)$ należącym do $\operatorname{cone}(X)$. Zatem $f \in \mathrm{I_a}(\operatorname{cone}(X))$.

(2). Niech $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$ będzie punktem należącym do $\mathrm{V_a}(A)$. Jeśli $(x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, to oczywiście $(x_0, \dots, x_n) \in \operatorname{cone}(\mathrm{V_p}(A))$. Niech więc $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Pokażemy, że wtedy $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathrm{V_p}(A)$. W tym celu rozpatrzmy dowolny wielomian $f \in A$. Ponieważ $(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{V_a}(A)$, więc $f(x_0, \dots, x_n) = 0$. Z jednorodności ideału A wynika zatem, że $f(ax_0, \dots, ax_n) = 0$, dla wszystkich $a \in k \smallsetminus \{0\}$. To oznacza, że punkt $(x_0 : \dots : x_n)$ jest zerem wielomianu f i tak jest dla każdego $f \in A$. Zatem $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathrm{V_p}(A)$, czyli $(x_0, \dots, x_n) \in \operatorname{cone}(\mathrm{V_p}(A))$. W ten sposób pokazaliśmy, że $\mathrm{V_a}(A) \subseteq \operatorname{cone}(\mathrm{V_p}(A))$.

Niech teraz, że $(x_0, \dots, x_n) \in \operatorname{cone}(\mathrm{V_p}(A))$. Z tego, że $\mathrm{V_p}(A) \neq \emptyset$ wynika, że $A \neq k[S]$ i stąd wynika, że $A \subset (S_0, \dots, S_n)$ (bo ideał A jest jednorodny). Zatem $(0, \dots, 0) \in \mathrm{V_a}(A)$. Możemy więc założyć, że $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Wtedy $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathrm{V_p}(A)$, więc $(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{V_a}(A)$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Rzutowe twierdzenie Hilberta o zerach

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeżeli s jest liczbą naturalną, to przez J_s oznaczamy ideał w $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ generowany przez wszystkie jednomiany w $k[S]$ stopnia $\geqslant s$. Ideał ten zawiera w szczególności wszystkie jednomiany $S_0^s, \dots, S_n^s$. Jego radykałem $\sqrt{J_s}$ jest ideał $(S_0, \dots, S_n)$. Zauważmy, że $J_s = (S_0, S_1, \dots, S_n)^s$. Jest oczywiste, że $\mathrm{V_p}(J_s) = \emptyset$.

Poniższe twierdzenie jest rzutową wersją twierdzenia Hilberta o zerach.

Twierdzenie 1.7.1. *Załóżmy, że ciało k jest algebraicznie domknięte.*

(1) *Jeśli A jest jednorodnym ideałem w $k[S]$, to*

$$\mathrm{V_p}(A) = \emptyset \iff \underset{s \geqslant 1}{\exists} J_s \subseteq A.$$

(2) *Jeśli A jest jednorodnym ideałem w $k[S]$ takim, że $\mathrm{V_p}(A) \neq \emptyset$, to $\mathrm{I_p V_p}(A) = \sqrt{A}$.*

(3) *Operacje $\mathrm{V_p}$, $\mathrm{I_p}$ ustalają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy rzutowymi zbiorami domkniętymi w $\mathbb{P}^n(k)$, a jednorodnymi ideałami radykalnymi w $k[S]$, różnymi od $(S_0, \dots, S_n)$.*

Dowód. (1). Wiemy już, że jeśli $J_s \subseteq A$, to $\mathrm{V_p}(A) = \emptyset$. Załóżmy teraz, że A jest jednorodnym ideałem w $k[S]$ takim, że $\mathrm{V_p}(A) = \emptyset$. Niech $F_1, \dots, F_r \in \mathit{Form}_k[S]$ będą generatorami ideału A. Rozpatrzmy wielomiany $f_1 = F_{1\square}, \dots, f_r = F_{r\square}$ należące do pierścienia $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. Zauważmy, że $\mathrm{V_a}(f_1, \dots, f_r) = \emptyset$. Wynika to ze Stwierdzenia 1.5.9:

$$\mathrm{V_a}(f_1, \dots, f_r) = (\mathrm{V_p}(F_1, \dots, F_r) \cap \mathbb{A}_0^n)_\square = (\emptyset \cap \mathbb{A}_0^n)_\square = \emptyset.$$

Z afinicznej wersji twierdzenia Hilberta o zerach wynika więc, że $1 \in (f_1, \dots, f_r)$. Istnieją zatem wielomiany $g_1, \dots, g_r \in k[T]$ takie, że

$$1 = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r.$$

Podstawiając do tej równości $T_i = S_i/S_0$, dla $i = 1, \dots, n$, oraz mnożąc stronami przez odpowiednią potęgę zmiennej S_0 stwierdzamy, że istnieje liczba naturalna p_0 taka, że $S_0^{p_0} \in A$.

W ten sam sposób dowodzimy, że dla każdego $i = 1, \dots, n$ istnieje liczba naturalna p_i taka, że $S_i^{p_i} \in A$. Stąd łatwo wynika, że $J_s \subseteq A$, dla $s = p_0 + \dots + p_n$.

(2). Wynika to ze stwierdzenia 1.6.3 i afinicznego twierdzenia Hilberta o zerach. Mamy bowiem:

$$\mathrm{I_p V_p}(A) = \mathrm{I_a}(\mathrm{cone}(\mathrm{V_p}(A))) = \mathrm{I_a V_a}(A) = \sqrt{A}.$$

(3). Niech X będzie domkniętym zbiorem rzutowym w $\mathbb{P}^n(k)$. Wtedy $X = \mathrm{V_p}(A)$, dla pewnego ideału $A \subseteq k[S]$ i mamy:

$$\mathrm{V_p I_p}(X) = \mathrm{V_p I_p V_p}(A) = \mathrm{V_p}(A) = X.$$

Niech A będzie radykalnym ideałem jednorodnym w $k[S]$, różnym od $(S_0, \dots, S_n)$. Jeśli $A = k[S]$, to $\mathrm{I_p V_p}(A) = \mathrm{I_p V_p}(k[S]) = \mathrm{I_p}(\emptyset) = k[S] = A$. Załóżmy, że $A \neq k[S]$. Wtedy nie istnieje żadna liczba naturalna s taka, że $J_s \subseteq A$, a zatem (na mocy (1)) $\mathrm{V_p}(A) \neq \emptyset$ i stąd, korzystając z (2), mamy: $\mathrm{I_p V_p}(A) = \sqrt{A} = A$. ⊠

Zanotujmy prosty wniosek wynikający z rzutowego Twierdzenia Hilberta o zerach.

Stwierdzenie 1.7.2. *Załóżmy, że ciało k jest algebraicznie domknięte. Jeśli $Q \in k[S]$ jest jednorodnym wielomianem takim, że $\mathrm{V_p}(Q) = \emptyset$, to Q jest niezerową stałą (należącą do k).*

Dowód. Z rzutowego twierdzenia Hilberta o zerach wynika, że $J_s \in (Q)$, dla pewnego naturalnego s. W szczególności wielomiany $S_0^s, \dots, S_n^s$ należą do ideału (Q). Musimy pokazać, że $(Q) = k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy $\deg Q \geqslant 1$ oraz $Q \mid S_0^s$. Z jednoznaczności rozkładu pierścienia $k[S]$ wynika więc, że Q jest potęgą wielomianu S_0 (z dokładnością do niezerowej stałej). Ale $n \geqslant 1$, więc $Q \mid S_1^n$, czyli Q jest potęgą wielomianu S_1 (też z dokładnością do stałej). Zatem $aS_0^p = bS_1^q$, dla pewnych niezerowych $a, b \in k$ oraz naturalnych p, q. Jest to sprzeczne z jednoznacznością rozkładu w $k[S]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Topologia podzbioru przestrzeni rzutowej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(k)$. Wtedy X jest przestrzenią topologiczną z topologią indukowaną przez topologię Zariskiego przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$. Każdy zbiór domknięty w X jest postaci $V \cap X$, gdzie V jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n(k)$.

Lemat 1.8.1. *Jeżeli $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ jest podzbiorem i B jest jednorodnym ideałem w $k[S]$, to*

$$\mathrm{V_p I_p}(\mathrm{V_p}(B) \cap X) \cap X = \mathrm{V_p}(B) \cap X.$$

Dowód. Niech $W = \mathrm{V_p}(B) \cap X$. Mamy wykazać, że $\mathrm{V_p I_p}(W) \cap X = W$. Ponieważ $W \subseteq \mathrm{V_p I_p}(W)$ oraz $W \subseteq X$, więc $W \subseteq \mathrm{V_p I_p}(W) \cap X$. Inkluzję w przeciwną stronę wykazujemy kolejno w następujący sposób: $W \subseteq \mathrm{V_p}(B)$, $\mathrm{I_p}(W) \supseteq \mathrm{I_p V_p}(B)$, $\mathrm{V_p I_p}(W) \subseteq \mathrm{V_p I_p V_p}(B) = \mathrm{V_p}(B)$, $\mathrm{V_p I_p}(W) \cap X \subseteq \mathrm{V_p}(B) \cap X = W$. ⊠

Stwierdzenie 1.8.2. *Niech X będzie podzbiorem przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$ i niech W będzie podzbiorem zbioru X. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *W jest zbiorem domkniętym w X.*

(2) *Istnieje jednorodny ideał C w $k[S]$ taki, że $C \supseteq \mathrm{I_p}(X)$ oraz $W = \mathrm{V_p}(C) \cap X$.*

Dowód. Implikacja (2) ⇒ (1) jest oczywista. Załóżmy, że $W = \mathrm{V_p}(B) \cap X$, gdzie B jest pewnym ideałem jednorodnym w $k[S]$. Niech $C = \mathrm{I_p}(W)$. Wtedy C jest ideałem jednorodnym w $k[S]$ zawierającym ideał $\mathrm{I_p}(X)$ oraz (na mocy Lematu 1.8.1) $\mathrm{V_p}(C) \cap X = \mathrm{V_p I_p}(\mathrm{V_p}(B) \cap X) = \mathrm{V_p}(B) \cap X = W$. ⊠

Każdy domknięty zbiór rzutowy w $\mathbb{P}^n(k)$ jest podzbiorem zbioru $\mathbb{P}^n(k)$. Jest więc zatem przestrzenią topologiczną z topologia indukowaną z topologii Zariskiego na $\mathbb{P}^n(k)$. Poniższe stwierdzenie opisuje wszystkie jej zbiory domknięte.

Stwierdzenie 1.8.3. *Niech $X = \mathrm{V_p}(A)$ będzie rzutowym zbiorem domkniętym określonym przez jednorodny ideał $A \subseteq k[S]$. Niech $W \subseteq X$ będzie podzbiorem. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *W jest zbiorem domkniętym w X.*

(2) *$W = \mathrm{V_p}(B)$, gdzie B jest jednorodnym ideałem w $k[S]$ zawierającym A.*

Dowód. (1) ⇒ (2). Niech $W = \mathrm{V_p}(C) \cap X$, gdzie C jest pewnym ideałem jednorodnym w $k[S]$. Wtedy $W = \mathrm{V_p}(C) \cap \mathrm{V_p}(A) = \mathrm{V_p}(A + C)$. Ideał $A + C$ jest jednorodny i zawiera oczywiście ideał A.

(2) ⇒ (1). $W = \mathrm{V_p}(B) = \mathrm{V_p}(B + A) = \mathrm{V_p}(B) \cap \mathrm{V_p}(A) = \mathrm{V_p}(B) \cap X$. ⊠

Podzbiorami przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$ są w szczególności zbiory $\mathbb{A}_0^n, \dots, \mathbb{A}_n^n$. Zbiory te, dzięki odwzorowaniom $\mu_i : \mathbb{A}_i^n \longrightarrow k^n$, $\nu_i : k^n \longrightarrow \mathbb{A}_i^n$, mają własną topologię przeniesioną z topologii

Zariskiego afinicznej przestrzeni k^n. Każdy zbiór domknięty w $\mathbb{A}_0^n$ z taką topologią jest postaci $\mathrm{V_a}(A)^{\square}$, gdzie A jest ideałem w pierścieniu $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. Każdy zbiór postaci $\mathbb{A}_i^n$ ma więc dwie topologie. Poniższe stwierdzenie jest konsekwencją Stwierdzenia 1.5.9.

Stwierdzenie 1.8.4. *Topologia indukowana z $\mathbb{P}^n(k)$ na $\mathbb{A}_i^n$ jest zgodna z topologią przestrzeni $\mathbb{A}_i^n$ jako przestrzeni afinicznej.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Nieprzywiedlne zbiory rzutowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przepisując dowód odpowiedniego stwierdzenia geometrii afinicznej otrzymujemy

Stwierdzenie 1.9.1. *Przestrzeń topologiczna $\mathbb{P}^n(k)$ (z topologią Zariskiego) jest noetherowska.* ⊠

Stąd w szczególności wynika, że każdy zbiór domknięty w $\mathbb{P}^n(k)$ ma jedyne nieskracalne przedstawienie w postaci skończonej sumy nieprzywiedlnych zbiorów domkniętych w $\mathbb{P}^n(k)$.

Lemat 1.9.2. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie niepustym zbiorem domkniętym. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *X jest zbiorem nieprzywiedlnym.*

(2) *$\mathrm{I_p}(X)$ jest ideałem pierwszym.*

Dowód. Ponieważ $X \neq \emptyset$, więc $\mathrm{I_p}(X) \neq k[S]$.

(1) ⇒ (2). Niech f, g będą jednorodnymi wielomianami w $k[S]$ takimi, że $fg \in \mathrm{I_p}(X)$. Wtedy $X \subseteq \mathrm{V_p}(fg) = \mathrm{V_p}(f) \cup \mathrm{V_p}(g)$ i z nieprzywiedlności wynika, że $X \subseteq \mathrm{V_p}(f)$ lub $X \subseteq \mathrm{V_p}(g)$. To implikuje, że $f \in \mathrm{I_p}(X)$ lub $g \in \mathrm{I_p}(X)$. Wiemy, że ideał $\mathrm{I_p}(X)$ jest jednorodny. Zatem, na mocy Stwierdzenia 1.2.6, $\mathrm{I_p}(X)$ jest ideałem pierwszym.

(2) ⇒ (1). Przypuśćmy, że $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$, gdzie X_1, X_2 są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{P}^n(k)$. Wtedy $X_1 \subsetneq X$, a zatem $\mathrm{I_p}(X) \subsetneq \mathrm{I_p}(X_1)$ (gdyby $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(X_1)$, to $X = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{V_p}\mathrm{I_p}(X_1) = X_1$). Analogicznie $\mathrm{I_p}(X) \subsetneq \mathrm{I_p}(X_2)$. Istnieją więc jednorodne wielomiany $f_1, f_2 \in k[S]$ takie, że $f_1 \in \mathrm{I_p}(X_1) \smallsetminus \mathrm{I_p}(X)$ oraz $f_2 \in \mathrm{I_p}(X_2) \smallsetminus \mathrm{I_p}(X)$. Wtedy wielomian $f_1 f_2$ należy do ideału pierwszego $\mathrm{I_p}(X)$. Zatem $f_1 \in \mathrm{I_p}(X)$ lub $f_2 \in \mathrm{I_p}(X)$, co jest sprzecznością. ⊠

W dowodzie implikacji (2) ⇒ (1) powyższego lematu wykorzystaliśmy założenie o domkniętości zbioru X. To założenie nie jest jednak potrzebne. Mamy bowiem:

Stwierdzenie 1.9.3. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *X jest zbiorem nieprzywiedlnym.*

(2) *$\mathrm{I_p}(X)$ jest ideałem pierwszym.*

Dowód. Jeśli $X \neq \emptyset$, to oczywiście $\overline{X} \neq \emptyset$. Wiadomo, że X jest zbiorem nieprzywiedlnym $\iff$ $\overline{X}$ jest zbiorem nieprzywiedlnym. Ponadto, $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X})$ (Stwierdzenie 1.4.4). Teza wynika zatem z Lematu 1.9.2. ⊠

Wniosek 1.9.4. *Jeżeli k jest ciałem nieskończonym, to przestrzeń $\mathbb{P}^n(k)$ jest nieprzywiedlna.*

Dowód. $\mathrm{I}_\mathrm{p}(\mathbb{P}^n(k)) = 0$ (patrz Stwierdzenie 1.4.5) jest ideałem pierwszym w $k[S]$. ⊠

Poniższe stwierdzenie jest konsekwencją Stwierdzeń 1.9.3 i 1.5.11.

Stwierdzenie 1.9.5. *Jeśli X jest niepustym podzbiorem w $\mathbb{A}_i^n$, to X jest zbiorem nieprzywiedlnym w $\mathbb{A}_i^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X_\square$ jest nieprzywiedlny.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10 Romaitości quasi-rzutowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Definicja 1.10.1. *Rozmaitością quasi-rzutową* nazywamy każdy podzbiór przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(k)$, który jest postaci $Y \cap U$, gdzie Y jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n(k)$, a U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^n(k)$.

Z definicji tej wynika, że podzbiór X przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$ jest rozmaitością quasi-rzutową dokładnie wtedy, gdy X jest podzbiorem otwartym pewnego domkniętego zbioru rzutowego lub równoważnie, gdy X jest podzbiorem domkniętym pewnego otwartego zbioru w $\mathbb{P}^n(k)$.

Stwierdzenie 1.10.2. *Podzbiór X przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(k)$ jest rozmaitością quasi-rzutową wtedy i tylko wtedy, gdy X jest postaci $Y_1 \smallsetminus Y_2$, gdzie Y_1, Y_2 są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{P}^n(k)$.*

Dowód. Wynika, to z równości $Y_1 \smallsetminus Y_2 = Y_1 \cap (\mathbb{P}^n(k) \smallsetminus Y_2)$. ⊠

Każda rozmaitość quasi-rzutowa jest przestrzenią topologiczną z topologią indukowaną przez topologię Zariskiego na $\mathbb{P}^n(k)$. Jest to więc w szczególności przestrzeń noetherowska (bo każda podprzestrzeń przestrzeni noetherowskiej jest przestrzenią noetherowską). Zatem każda rozmaitość quasi-rzutowa X ma dokładnie jedno nieskracalne przedstawienie w postaci skończonej sumy nieprzywiedlnych zbiorów domkniętych w X.

Podamy teraz przykłady rozmaitości quasi-rzutowych.

Stwierdzenie 1.10.3. *Następujące podzbiory w $\mathbb{P}^n(k)$ są rozmaitościami quasi-rzutowymi.*

(1) *Rzutowy zbiór domknięty.*
(2) *Otwarty zbiór w $\mathbb{P}^n(k)$.*
(3) *Afiniczna przestrzeń postaci $\mathbb{A}_i^n$.*
(4) *Zbiór domknięty w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_i^n$.*
(5) *Zbiór otwarty w przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_i^n$.*
(6) *Zbiór domknięty rozmaitości quasi-rzutowej.*
(7) *Zbiór otwarty rozmaitości quasi-rzutowej.*

Dowód. (1). $X = X \cap \mathbb{P}^n(k)$.
(2). $X = \mathbb{P}^n(k) \cap X$.
(3). $\mathbb{A}_i^n = \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus H_i$, gdzie $H_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k);\ x_i = 0\} = \mathrm{V}_\mathrm{p}(S_i)$. To oznacza, że $\mathbb{A}_i^n$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^n(k)$, a zatem - na mocy (2) - jest rozmaitością quasi-rzutową.
(6), (7). Niech $X = Y \cap U$, gdzie Y domknięte i U otwarte, będzie rozmaitością quasi rzutową. Jeśli zbiór $D \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym w X, to $D = Z \cap X$, dla pewnego domkniętego $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Wtedy $D = Z \cap X = Z \cap (Y \cap U) = (Z \cap Y) \cap U$, więc D jest quasi-rzutowe. Analogicznie, gdy D jest zbiorem otwartym w X.
(4), (5). Wynika to z (3) i (6), (7). ⊠

Przekrój dwóch rozmaitości quasi rzutowych jest oczywiście rozmaitością quasi-rzutową. Czy suma mnogościowa dwóch rozmaitości quasi-rzutowych jest rozmaitością quasi-rzutową?

Definicja 1.10.4. Jeśli X jest rozmaitością quasi-rzutową, to każdy podzbiór zbioru X, będący rozmaitością quasi-rzutową, nazywamy *podrozmaitością quasi-rzutową rozmaitości* X.

2 Płaszczyzna afiniczna i płaszczyzna rzutowa

2.1 Płaszczyzna afiniczna

Definicja 2.1.1. *Płaszczyzną afiniczną* nazywamy każdą parę $(\mathbb{A}, \mathcal{L})$, w której

$\mathbb{A}$ jest niepustym zbiorem zwanym zbiorem punktów,
$\mathcal{L}$ jest rodziną niepustych podzbiorów zbioru $\mathbb{A}$ zwaną rodziną prostych,

przy czym spełnione są następujące warunki:

(A_1) Dla dowolnych dwóch różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta zawierająca te punkty.

(A_2) Dla każdej prostej l i każdego punktu P istnieje dokładnie jedna prosta l' zawierająca punkt P taka, że $l = l'$ lub $l \cap l' = \emptyset$.

(A_3) Istnieją trzy niewspółliniowe punkty.

Definicja 2.1.2. Mówimy, że dwie płaszczyzny afiniczne $(\mathbb{A}, \mathcal{L})$ i $(\mathbb{A}', \mathcal{L}')$ są *izomorficzne* jeśli istnieje bijekcja $\sigma : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ taka, że $\sigma(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}'$.

Jeśli dwie proste l i l' danej płaszczyzny afinicznej są takie, że $l = l'$ lub $l \cap l' = \emptyset$, to mówimy, że proste te są *równoległe*. Piszemy wówczas $l \parallel l'$. Aksjomat (A_2) mówi zatem, że dla każdej prostej l i każdego punktu P istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do l.

Stwierdzenie 2.1.3. *Równoległość na płaszczyźnie afinicznej jest relacją typu równoważności.* ([Hart67] 11 ros., [Bebe76]) .

Dowód. Relacja $\parallel$ jest oczywiście zwrotna i symetryczna. Niech l, l', l'' będą prostymi takimi, że $l \parallel l'$ i $l' \parallel l''$. Wykażemy, że $l \parallel l''$. Jeśli $l = l''$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że $l \neq l''$ i przypuśćmy, że $l \cap l'' \neq \emptyset$. Niech A będzie punktem należącym do l i l''. Wówczas l jest prostą równoległą do l' i przechodzącą przez A. Podobnie, l'' jest prostą równoległą do l' i przechodzącą przez A. Zatem, na mocy (A_2), $l = l''$; sprzeczność. ⊠

Z definicji płaszczyzny afinicznej łatwo wynikają następujące stwierdzenia.

Stwierdzenie 2.1.4. *Dwie różne proste płaszczyzny afinicznej albo są równoległe albo przecinają się w dokładnie jednym punkcie.* ⊠ ([Hart67] 11 ros.) .

Stwierdzenie 2.1.5. *Na płaszczyźnie afinicznej istnieją trzy różne proste parami przecinające się w trzech różnych punktach.* ⊠ ([Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.1.6. *Każda prosta płaszczyzny afinicznej posiada co najmniej dwa punkty.* ⊠ ([Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.1.7. *Każde dwie proste płaszczyzny afinicznej są równoliczne.* ⊠
([Hart67] 146 ros, [Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.1.8. *Przez każdy punkt płaszczyzny afinicznej przechodzą co najmniej trzy proste.* ⊠ ([Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.1.9. *Płaszczyzna afiniczna posiada co najmniej cztery punkty.* ⊠ ([Hart67] 11 ros.) .

Stwierdzenie 2.1.10. *Płaszczyzna afiniczna posiada co najmniej* 6 *prostych.* ⊠

Pękiem prostych równoległych płaszczyzny afinicznej nazywamy każdą rodzinę wszystkich prostych równoległych do danej prostej.

Pękiem prostych przechodzących przez dany punkt P płaszczyzny afinicznej nazywamy rodzinę wszystkich prostych przechodzących przez P.

Stwierdzenie 2.1.11. *Każde dwa pęki prostych równoległych płaszczyzny afinicznej mają jednakową moc.* ⊠ ([Hart67] 146 ros, [Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.1.12. *Każde dwa pęki prostych przechodzących przez punkty płaszczyzny afinicznej mają jednakową moc.* ⊠ ([Bebe76]) .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.2 Płaszczyzna afiniczna $\mathbf{k}^2$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech k będzie ciałem i niech $\mathbb{A} = k^2 = \{(a,b);\ a,b \in k\}$. Prostą w k^2 nazywamy każdy zbiór postaci

$$\{(x,y) \in k^2;\ Ax + By = C\},$$

gdzie $A, B, C \in k$, przy czym $A \neq 0$ lub $B \neq 0$. Niech $\mathbb{L}$ będzie zbiorem wszystkich zwykłych prostych w k^2. Wówczas para $(\mathbb{A}, \mathbb{L})$ jest płaszczyzną afiniczną. Mówić będziemy, że jest to *płaszczyzna afiniczna k^2*.

Każda prosta w k^2 ma przedstawienie parametyczne:

$$(x,y) = (x_0, y_0) + (a,b)t, \quad t \in k,$$

gdzie $(x_0, y_0) \in k^2$ i $(a,b) \in k^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ są ustalonymi elementami.

Niech R będzie pierścieniem przemiennym nie będącym ciałem. Rozpatrzmy zbiór $R^2 = R \times R = \{(a,b);\ a,b \in R\}$ z rodziną wszystkich prostych w powyższym parametrycznym sensie, tzn., $t \in R$, $(x_0,y_0) \in R^2$ oraz $(a,b) \in R^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Czy R^2 jest płaszczyzną afiniczną? Poniższe fakty wykazują, że tak nie jest.

Stwierdzenie 2.2.1. *Zbiór $\mathbb{Z}^2$ nie jest płaszczyzną afiniczną.*

Dowód. Proste $(x,y) = (1,1) + (4,4)t$ i $(x,y) = (1,1) + (8,8)t$ są dwiema różnymi prostymi równoległymi do prostej $(x,y) = (0,0) + (2,2)t$ i przechodzącymi przez punkt $(1,1)$. Aksjomat (A_2) więc tutaj nie zachodzi. ⊠

Stwierdzenie 2.2.2. *Niech R będzie pierścieniem nie będącym ciałem. Wtedy R^2 nie jest płaszczyzną afiniczną.*

Dowód. Niech $a \in R$ będzie nieodwracalnym elementem różnym od zera. Rozważmy proste $(x, y) = (0, 0) + (1, 1)t$ i $(x, y) = (0, 0) + (a, a)t$. Punkt $(1, 1)$ leży na pierwszej prostej i nie leży na drugiej (ponieważ element a nie jest odwracalny). Zauważmy, że punkty $(0, 0)$ i (a, a) leżą na tych prostych. Są to więc dwie różne proste przechodzące przez $(0, 0)$ i (a, a). Nie zachodzi zatem aksjomat (A_1). ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.3 Skończone płaszczyzny afiniczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że dana płaszczyzna afiniczna ma *rząd n* jeśli istnieje na niej prosta posiadająca dokładnie n punktów.

Stwierdzenie 2.3.1. *Rząd płaszczyzny afinicznej jest* $\geqslant 2$.

Stwierdzenie 2.3.2. *Jeśli płaszczyzna afiniczna ma rząd* n*, to*

(1) *każda prosta tej płaszczyzny ma dokładnie* n *punktów;*
(2) *płaszczyzna ta ma dokładnie* n^2 *punktów;*
(3) *płaszczyzna ta ma dokładnie* $n^2 + n$ *prostych;*
(4) *przez każdy punkt tej płaszczyzny przechodzi dokładnie* $n + 1$ *prostych;*
(5) *każdy pęk prostych równoległych ma dokładnie* n *prostych.*

([Hart67] 146 ros, [Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.3.3. *Jeśli* n *jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* n.

Dowód. Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje skończone ciało k mocy n. Wówczas płaszczyzna afiniczna k^2 ma rząd n. ⊠

Stwierdzenie 2.3.4. *Jeśli* $n \in \mathbb{N}$ *jest postaci* $4k + 1$ *lub* $4k + 2$ *i w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby* n *występuje co najmniej jedna liczba pierwsza postaci* $4k + 3$ *w potędze nieparzystej, to nie istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* n. ([Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.3.5. *Istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* 2. *Ma ona dokładnie* 4 *punkty i* 6 *prostych.* ([Hart67], [Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.3.6. *Istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* 3. *Ma ona dokładnie* 9 *punktów i* 12 *prostych.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.3.7. *Każde dwie* 9*-cio elementowe płaszczyzny afiniczne są izomorficzne.* ([Hart67] 147) .

Stwierdzenie 2.3.8. *Rząd grupy wszystkich automorfizmów* 9*-cio punktowej płaszczyzny afinicznej jest równy* $432 = 9 \cdot 8 \cdot 6$. ([Hart67] 33) .

Stwierdzenie 2.3.9. *Istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* 4. *Ma ona dokładnie* 16 *punktów i* 20 *prostych.* ([Hart67] 147) .

Stwierdzenie 2.3.10 (Euler). *Nie istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* 6.
([Hart67] 147, [Bebe76], wynika z 2.3.4) .

Stwierdzenie 2.3.11. *Jeśli* $n \leqslant 100$, *to nie istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* n, *gdy*

$$n = 6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, 66, 69, 70, 77, 78, 86, 93, 94.$$

([Bebe76], wynika z 2.3.4) .

Stwierdzenie 2.3.12. *Nie wiemy czy istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* 10. ([Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.3.13. *Jeśli* $n \leqslant 100$, *to nie wiemy czy istnieje płaszczyzna afiniczna rzędu* n, *gdy* n *jest jedną z liczb:*

$$\begin{array}{l} 10, 12, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 48, \\ 50, 51, 52, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 76, 80, \\ 82, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98, 99, 100. \end{array}$$

([Bebe76]) .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.4 Płaszczyzna rzutowa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Płaszczyzną rzutową nazywamy każdą parę $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$, w której $\mathbb{P}$ jest niepustym zbiorem zwanym zbiorem punktów oraz $\mathbb{L}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{P}$ zwaną rodziną prostych, przy czym spełnione są następujące warunki:

(π_1) Dla dowolnych dwóch różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta zawierające te punkty.

(π_2) Dowolne dwie proste przecinają się w co najmniej jednym punkcie.

(π_3) Istnieją trzy niewspółliniowe punkty.

(π_4) Każda prosta ma co najmniej trzy punkty.

Mówimy, że dwie płaszczyzny rzutowe $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ i $(\mathbb{P}', \mathbb{L}')$ są *izomorficzne* jeśli istnieje bijekcja $\sigma : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ taka, że $\sigma(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}'$.

Stwierdzenie 2.4.1. *Niech* k *będzie ciałem i niech* O *będzie ustalonym punktem w* k^3. *Niech* $\mathbb{P}$ *będzie zbiorem wszystkich prostych w* k^3 *przechodzących przez* O. *Niech* $\mathbb{L}$ *będzie zbiorem wszystkich płaszczyzn w* k^3 *przechodzących przez* O. *Wtedy para* $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ *jest płaszczyzną afiniczną.*

Stwierdzenie 2.4.2. *Dwie różne proste płaszczyzny rzutowej przecinają się w dokładnie jednym punkcie.*

Stwierdzenie 2.4.3. *Płaszczyzna rzutowa posiada co najmniej siedem punktów.*

Stwierdzenie 2.4.4. *Płaszczyzna rzutowa posiada co najmniej* 7 *prostych.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.5 Płaszczyzna rzutowa powstała z płaszczyzny afinicznej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W rozdziale "Geometria afiniczna" podaliśmy definicję i podstawowe własności płaszczyzny afinicznej. Z każdej płaszczyzny afinicznej można otrzymać płaszczyznę rzutową. Oto konstrukcja:

Stwierdzenie 2.5.1. *Niech* $(\mathbb{A}, \mathcal{L})$ *będzie płaszczyzną afiniczną. Dla każdej prostej* $l \in \mathcal{L}$ *oznaczmy przez* $[l]$ *pęk wszystkich prostych równoległych do* l*; pęk ten nazywa się* punktem w nieskończoności *prostej* l*. Niech*

$$\mathbb{P} := \mathbb{A} \cup \{[l];\ l \in \mathcal{L}\}.$$

Prostą w $\mathbb{P}$ *nazywamy zbiór* $\{[l];\ l \in \mathcal{L}\}$ *oraz każdą prostą* $l \in \mathcal{L}$ *wzbogaconą o punkt* $[l]$*. Niech* $\mathbb{L}$ *będzie rodziną wszystkich prostych w* $\mathbb{P}$*. Wtedy para* $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ *jest płaszczyzną rzutową.* ([Hart67] 13 (ros)) .

Przykład 2.5.2. Niech $\mathcal{A} = (\mathbb{A}, \mathcal{L})$ będzie czteroelementową płaszczyzną afiniczną; $\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{L} = \{\updownarrow_\infty, \updownarrow_\in, \dots, \updownarrow\}$, $l_1 = \{a, b\}$, $l_2 = \{a, c\}$, $l_3 = \{a, d\}$, $l_4 = \{b, c\}$, $l_5 = \{b, d\}$, $l_6 = \{c, d\}$. Mamy tu $l_1 \parallel l_6$, $l_2 \parallel l_5$ oraz $l_3 \parallel l_4$. W terminologii 2.5.1 mamy więc trzy punkty w nieskończoności:

$$x = [l_1] = [l_6], \quad y = [l_2] = [l_5], \quad z = [l_3] = [l_4].$$

Niech $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ będzie płaszczyzną rzutową skonstruowaną w 2.5.1. Wówczas
$\mathbb{P} = \{a, b, c, d, x, y, z\}$ oraz

$$\mathbb{L} = \{\{a, b, x\},\ \{a, c, y\},\ \{a, d, z\},\ \{b, c, z\},\ \{b, d, y\},\ \{c, d, x\},\ \{x, y, z\}\}.$$

Otrzymaliśmy siedmiopunktową płaszczyznę rzutową. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.6 Płaszczyzna afiniczna powstała z płaszczyzny rzutowej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Stwierdzenie 2.6.1. *Niech* $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ *będzie płaszczyzną rzutową. Ustalmy jedną prostą* $l_0 \in \mathbb{L}$*. Niech*

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbb{P} \setminus l_0, \\ \mathcal{L} &= \{l \cap \mathbb{A};\ l \in \mathbb{L}\}. \end{aligned}$$

Wtedy para $(\mathbb{A}, \mathcal{L})$ *jest płaszczyzną afiniczną. Płaszczyzna rzutowa powstała z tej płaszczyzny afinicznej w sposób* 2.5.1 *pokrywa się z wyjściową płaszczyzną rzutową* $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$. ([Hart67] 146 ros) .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.7 Płaszczyzna rzutowa $\mathbf{P}^2(\mathbf{k})$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech k będzie ciałem. Niech $\sim$ będzie relacją zbiorze $k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ określoną następująco:

$$(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2) \ \text{ jeśli } \underset{0 \neq r \in k}{\exists} y_0 = rx_0, y_1 = rx_1, y_2 = rx_2.$$

Jest to relacja typu równoważności. Klasę abstrakcji punktu (x_0, x_1, x_2) względem tej relacji oznaczamy przez $(x_0 : x_1 : x_2)$. Zbiór wszystkich klas abstrakcji oznaczamy przez $\mathbb{P}^2(k)$. Prostą w $\mathbb{P}^2(k)$ nazywamy każdy zbiór postaci

$$\Big\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2(k);\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\Big\},$$

gdzie $(a_0, a_1, a_2) \in k^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$.

Stwierdzenie 2.7.1. *Jeśli k jest ciałem (niekoniecznie przemiennym) to zbiór $\mathbb{P}^2(k)$ wraz z rodziną prostych w powyższym sensie jest płaszczyzną rzutową.* ([Hart67] 84 ros.) .

W przypadku, gdy k jest ciałem $\mathbb{R}$ (liczb rzeczywistych), $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nazywamy rzeczywistą płaszczyzną rzutową.

Stwierdzenie 2.7.2. *Startując w* 2.5.1 *od płaszczyzny afinicznej $\mathbb{R}^2$ otrzymujemy rzeczywistą płaszczyznę rzutową $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

Stwierdzenie 2.7.3. *$\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}_2)$ jest 7-mio punktową płaszczyzną rzutową z przykładu* 2.5.2.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.8 Płaszczyzna rzutowa i dualność

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $\pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ będzie płaszczyzną rzutową. *Pękiem prostych* w π nazywamy zbiór wszystkich prostych w π przechodzących przez dany punkt. Jeśli $A \in \mathbb{P}$, to przez pęk(A) oznaczamy pęk prostych przechodzących przez A.

Rozpatrzmy nową parę $\pi^* = (\mathbb{P}^*, \mathbb{L}^*)$, w której

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^* &= \mathbb{L}, \\ \mathbb{L}^* &= \{\text{pęk}(A);\ A \in \mathbb{P}\}. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 2.8.1. *π^* jest płaszczyzną rzutową. Nazywamy ją* płaszczyzną rzutową dualną do płaszczyzny rzutowej π*.* ([Hart67] 51 ros) .

Powyższy fakt jest konsekwencją nastąpującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 2.8.2. *Płaszczyzna rzutowa $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ spełnia następujące cztery warunki.*

(1) *Dla dowolnych dwóch różnych prostych istnieje dokładnie jeden pęk prostych zawierający te proste.*

(2) *Dwa pęki prostych posiadają co najmniej jedną wspólną prostą.*

(3) *Istnieją trzy proste nie należące do wspólnego pęku.*

(4) *Każdy pęk prostych ma co najmniej trzy proste.*

Przykład 2.8.3. *Niech $\pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ będzie siedmiopunktową płaszczyzną rzutową. Wówczas*

$$\mathbb{P} = \{a, b, c, d, x, y, z\}, \quad \mathbb{L} = \{abx, acy, adz, bcz, bdy, cdx, xyz\},$$

gdzie abx oznacza prostą $\{a, b, x\}$ itp. Wtedy płaszczyzna dualna $\pi^* = (\mathbb{P}^*, \mathbb{L}^*)$ jest również siedmiopunktowa. Mamy tu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^* &= \mathbb{L} = \{abx, acy, adz, bcz, bdy, cdx, xyz\}, \\ \mathbb{L}^* &= \{pęk(a),\ pęk(b),\ pęk(c),\ pęk(d),\ pęk(x),\ pęk(y),\ pęk(z)\}, \end{aligned}$$

przy czym $pęk(a) = \{abx, acy, adz\}$, $pęk(b) = \{abx, bcz, bdy\}$, $pęk(c) = \{acy, bcz, cdx\}$, $pęk(d) = \{adz, bdy, cdx\}$, $pęk(x) = \{abx, cdx, xyz\}$, $pęk(y) = \{acy, bdy, xyz\}$, $pęk(z) = \{adz, bcz, xyz\}$. ⊠

Stwierdzenie 2.8.4 (Zasada dualności). *Niech S będzie pewnym twierdzeniem zachodzącym dla płaszczyzny rzutowej π. Wówczas zachodzi twierdzenie S^* powstałe z twierdzenia S przez zamianę słów:*

punkt	$\longleftrightarrow$	*prosta,*
punkt leży na prostej	$\longleftrightarrow$	*prosta przechodzi przez punkt,*
punkty współliniowe	$\longleftrightarrow$	*proste przecinające się w punkcie,*
punkt przecięcia dwóch prostych	$\longleftrightarrow$	*prosta przechodząca przez dwa punkty,*

itp. ([Hart67] 54 ros) .

Stwierdzenie 2.8.5. *Odwzorowanie $\pi \to \pi^{**}$, które punktowi A przyporządkowuje* pęk(A), *jest izomorfizmem płaszczyzn rzutowych.* ([Hart67] 54 ros) .

Stwierdzenie 2.8.6. *Płaszczyzny rzutowe π i π^{**} są izomorficzne. Natomiast płaszczyzny π i π^* nie muszą być izomorficzne. Istnieje płaszczyzna rzutowa π rzędu* 9 (10 *punktów na każdej prostej*), *która nie jest izomorficzna z π^*.* ([Hart67] 54 ros) .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.9 Aksjomat Desarques'a

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $\pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ będzie płaszczyzną rzutową. *Aksjomatem Desarques'a* (czyt. Dezarga) na płaszczyźnie π nazywamy następujące zdania.

(π_5) *Dane są trzy proste przechodzące przez punkt O. Niech punkty A, A' leżą na pierwszej prostej, punkty B, B' na drugiej oraz punkty C, C' na trzeciej. Wtedy punkty przecięcia prostych AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ oraz BC i $B'C'$ leżą na jednej prostej.*

Stwierdzenie 2.9.1. *Istnieją płaszczyzny rzutowe, dla których aksjomat Desarques'a nie zachodzi.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.9.2. *Aksjomat Desarques'a zachodzi w każdej trójwymiarowej przestrzeni rzutowej, przy czym w wysłowieniu tego aksjomatu dane trzy proste nie muszą leżeć w jednej płaszczyźnie. W szczególności aksjomat Desarquesa zachodzi dla każdej płaszczyzny rzutowej leżącej w trójwymiarowej przestrzeni rzutowej.* ([Hart67] 21 ros) .

Stwierdzenie 2.9.3. *Aksjomat Desarques'a zachodzi dla każdej płaszczyzny rzutowej $\mathbb{P}^2(k)$, gdzie k jest ciałem niekoniecznie przemiennym.* ([Hart67] 88) .

Stwierdzenie 2.9.4. *Dowolna płaszczyzna rzutowa π jest izomorficzna z płaszczyzną rzutową $\mathbb{P}^2(k)$, gdzie k jest ciałem niekoniecznie przemiennym, wtedy i tylko wtedy, gdy dla π zachodzi aksjomat Desarques'a* ([Hart67] 119) .

Stwierdzenie 2.9.5. *Jeśli płaszczyzna rzutowa spełnia aksjomat Desarques'a, to dualna do niej płaszczyzna rzutowa również ten aksjomat spełnia.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.9.6. *Dualny aksjomat Desarques'a (czyli aksjomat Desarques'a dla płaszczyzny rzutowej π^*) ma następującą postać.*

Dane są trzy punkty A, B, C płaszczyzny rzutowej π, leżące na jednej prostej. Niech a i a' będą prostymi przecinającymi się w punkcie A , niech b i b' będą prostymi przecinającymi się w punkcie B oraz niech c i c' będą prostymi przecinającymi się w punkcie C. Niech x będzie prostą przechodzącą przez punkty $a \cap b$ i $a' \cap b'$, niech y będzie prostą przechodzącą przez punkty $a \cap c$ i $a' \cap c'$ oraz niech z będzie prostą przechodzącą przez punkty $b \cap c$ i $b' \cap c'$. Wówczas proste x, y, z przecinają się w jednym punkcie.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.10 Aksjomat Pappa

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $\pi = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ będzie płaszczyzną rzutową. *Aksjomatem Pappa* na płaszczyźnie π nazywamy następujące zdania.

(π_6) *Niech l i l' będą prostymi w π przecinającymi się w punkcie X. Niech A, B, C będą trzema różnymi punktami prostej l, różnymi od X. Niech A', B', C' będą trzema różnymi punktami prostej l', różnymi od X. Niech P, Q, R będą punktami przecięcia odpowiednio prostych AB' i $A'B$, AC' i $A'C$ oraz BC' i $B'C$. Wówczas punkty P, Q, R są współliniowe.*

Stwierdzenie 2.10.1. *Istnieją płaszczyzny rzutowe, dla których aksjomat Pappa nie zachodzi. Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{P}^2(\mathbb{H})$, gdzie $\mathbb{H}$ jest ciałem (nieprzemiennym) kwaternionów nie spełnia aksjomatu Pappa.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.10.2. *Jeśli płaszczyzna rzutowa spełnia aksjomat Pappa, to dualna do niej płaszczyzna rzutowa również ten aksjomat spełnia.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.10.3. *Jeśli płaszczyzna rzutowa spełnia aksjomat Pappa, to spełnia aksjomat Desarques'a.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.10.4. *Aksjomat Pappa zachodzi dla każdej płaszczyzny rzutowej $\mathbb{P}^2(k)$, gdzie k jest ciałem przemiennym.* ([Hart67]) .

Stwierdzenie 2.10.5. *Dowolna płaszczyzna rzutowa π jest izomorficzna z płaszczyzną rzutową $\mathbb{P}^2(k)$, gdzie k jest ciałem przemiennym, wtedy i tylko wtedy, gdy dla π zachodzi aksjomat Pappa* ([Hart67] 92) .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.11 Skończone płaszczyzny rzutowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że dana płaszczyzna rzutowa ma *rząd n* jeśli istnieje na niej prosta posiadająca dokładnie $n + 1$ punktów.

Stwierdzenie 2.11.1. *Rząd płaszczyzny rzutowej jest $\geqslant 2$.*

Stwierdzenie 2.11.2. *Jeśli płaszczyzna rzutowa ma rząd n, to*

(1) *każda prosta tej płaszczyzny ma dokładnie $n + 1$ punktów;*

(2) *przez każdy punkt tej płaszczyzny przechodzi dokładnie $n + 1$ prostych;*

(3) *płaszczyzna ta ma dokładnie $n^2 + n + 1$ punktów;*

(4) *płaszczyzna ta ma dokładnie $n^2 + n + 1$ prostych.* ([MatEn], [Tull67] 37, [Kart76] 3) .

Stwierdzenie 2.11.3. *Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n.*

Dowód. Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje skończone ciało k mocy n. Wówczas płaszczyzna rzutowa $\mathbb{P}^2(k)$ ma rząd n. ⊠

Stwierdzenie 2.11.4. *Jeśli $n \in \mathbb{N}$ jest postaci $4k+1$ lub $4k+2$ i w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n występuje co najmniej jedna liczba pierwsza postaci $4k+3$ w potędze nieparzystej, to nie istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n.* ([MatEn]) .

Stwierdzenie 2.11.5 (Euler). *Nie istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu* 6. (wynika z 2.11.4) .

Stwierdzenie 2.11.6. *Jeśli $n \leqslant 100$, to nie istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n, gdy*

$$n = 6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, 66, 69, 70, 77, 78, 86, 93, 94.$$

(2.11.4) .

Stwierdzenie 2.11.7. *Nie wiemy czy istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu* 10. ([MatEn]) .

Stwierdzenie 2.11.8. *Jeśli $n \leqslant 100$, to nie wiemy czy istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n, gdy n jest jedną z liczb:*

$$\begin{array}{l} 10, 12, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 48, \\ 50, 51, 52, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 76, 80, \\ 82, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98, 99, 100. \end{array}$$

([MatEn], [Bebe76]) .

Stwierdzenie 2.11.9. *Rząd grupy wszystkich automorfizmów 7-mio punktowej płaszczyzny rzutowej jest równy $168 = 7 \cdot 6 \cdot 4$.* ([Hart67] 31) .

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.12 Trójwymiarowa przestrzeń rzutowa

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Trójwymiarową przestrzenią rzutową nazywamy każdą trójkę $(\mathbb{P}, \mathbb{L}, \mathbb{H})$, w której

$\mathbb{P}$ jest niepustym zbiorem zwanym zbiorem punktów,
$\mathbb{L}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{P}$ zwaną rodziną prostych,
$\mathbb{H}$ jest rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{P}$ zwaną rodziną płaszczyzn,

przy czym spełnione są następujące warunki:

(T_1) Dla dowolnych dwóch różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta zawierające te punkty.

(T_2) Przez każde trzy niewspółliniowe punkty przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

(T_3) Dla każdej prostej i każdej płaszczyzny istnieje co najmniej jeden punkt wspólny.

(T_4) Dwie płaszczyzny mają co najmniej jedną wspólną prostą.

(T_5) Istnieją cztery punkty nie leżące na jednej płaszczyźnie, przy czym każde trzy z tych punktów nie są współliniowe.

(T_6) Każda prosta ma co najmniej trzy punkty.

Stwierdzenie 2.12.1. *Z warunków* $(T_1) - (T_6)$ *wynika:*

(1) *Jeśli dwa różne punkty leżą na płaszczyźnie* α*, to prosta przechodząca przez te punkty też leży na płaszczyźnie* α*.*

(2) *Płaszczyzna i prosta na niej nie leżąca mają dokładnie jeden punkt wspólny.*

(3) *Dwie różne płaszczyzny mają dokładnie jedną wspólną prostą.*

(4) *Przez prostą i punkt nie leżący na tej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.* ([Hart67] 146 ros) .

Stwierdzenie 2.12.2. *Każda płaszczyzna należąca do trójwymiarowej przestrzeni rzutowej jest płaszczyzną rzutową.* ([Hart67] 146 ros) .

---

3 Odwzorowania regularne podzbiorów rzutowych

Zakładamy, że k jest ciałem. Ponadto $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$, $k[S] = k[S_0, \ldots, S_n]$ są pierścieniami wielomianów nad k.

3.1 Jednorodne funkcje wymierne

Niech $k(S) = k(S_0, \ldots, S_n)$ będzie ciałem funkcji wymiernych, tzn. ciałem ułamków pierścienia wielomianów $k[S]$. Niech t będzie dodatkową zmienną.

Definicja 3.1.1. Mówimy, że element $\varphi \in k(S)$ jest *jednorodny stopnia* m, gdzie m jest liczbą całkowitą, jeżeli w ciele $k(t, S) = k(t, S_0, \ldots, S_n)$ zachodzi równość:

$$\varphi(tS_0, \ldots, tS_n) = t^m \varphi(S_0, \ldots, S_n).$$

W szczególności 0 jako element z $k(S)$ jest elementem jednorodnym dowolnego stopnia.

Stwierdzenie 3.1.2. *Niech f, g będą niezerowymi względnie pierwszymi wielomianami z $k[S]$ i niech $\varphi = f/g \in k(S)$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Element φ jest jednorodny stopnia m.*

(2) *Wielomiany f, g są jednorodne odpowiednio stopni p, q, gdzie $p - q = m$.*

Dowód. Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1) jest oczywista. Wykażemy implikację (1) $\Rightarrow$ (2).

Niech $f = f_{p_1} + \cdots + f_{p_r}$, $g = g_{q_1} + \cdots + g_{q_s}$, gdzie $p_1 < \cdots < p_r = p$ i $q_1 < \cdots < q_s = q$, będą rozkładami wielomianów f i g na składowe jednorodne. Oznaczmy: $S = (S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $tS = (tS_0, tS_1, \ldots, tS_n)$. Ponieważ $\varphi(tS) = t^m\varphi(S)$, więc w pierścieniu $k(t)[S]$ mamy równość $f(tS)g(S) = t^m f(S)g(tS)$, czyli

$$\left(t^{p_1} f_{p_1}(S) + \cdots + t^{p_r} f_{p_r}(S)\right) g(S) = t^m f(S) \left(t^{q_1} g_{q_1}(S) + \cdots + t^{q_s} g_{q_s}(S)\right).$$

Porównując w tej równości stopnie względem t stwierdzamy, że $p = m + q$ oraz, że $f_p(S)g(S) = f(S)g_q(S)$. Wielomiany f i g są względnie pierwsze, więc $f_p = fh$, $g_q = gh$ dla pewnego $h \in k[S]$. Ale f_p jest wielomianem jednorodnym, więc z równości $f_p = fh$ wynika, że wielomian f jest jednorodny. Analogicznie, z równości $g_q = gh$ wynika, że wielomian g jest również jednorodny. ⊠

Stwierdzenie 3.1.3. *Załóżmy, że* $\operatorname{char}(k) = 0$ *i niech $\varphi \in k(S)$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Element φ jest jednorodny stopnia m.*

(3) $S_0 \frac{\partial \varphi}{\partial S_0} + \cdots + S_n \frac{\partial \varphi}{\partial S_n} = m\varphi$. ⊠ ([Now94a] 2.1.3) .

Zbiór wszystkich elementów z $k(S)$ jednorodnych stopnia zero oznaczać będziemy przez $k\{S\} = k\{S_0, \ldots, S_n\}$. Z powyższego stwierdzenia wynika, że element $\varphi \in k(S)$ należy do $k\{S\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest ilorazem dwóch jednorodnych wielomianów z $k[S]$ tego samego stopnia. W szczególności $k\{S_0\} = k$ i łatwo wykazać, zbiór $k\{S\}$ jest podciałem ciała $k(S)$ zawierającym k.

Stwierdzenie 3.1.4. *Ciało $k\{S\}$ jest izomorficzne z ciałem $k(T) = k(T_1, \dots, T_n)$.*

Dowód. Rozpatrzmy k-algebrowy homomorfizm $f : k[T] \longrightarrow k\{S\}$, $T_i \mapsto S_i/S_0$, $i = 1, \dots, n$. Niech $F = F_0 + \cdots + F_m$ będzie rozkładem wielomianu $F \in k[T]$ na składowe jednorodne. Wtedy $f(F) = S_0^{-m}(S_0^m F_0 + S_0^{m-1}F_1 + \cdots + F_m)$. Jeśli $f(F) = 0$, to wielomian $S_0^m F_0 + S_0^{m-1}F_1 + \cdots + F_m \in k[S_1, \dots, S_n][S_0]$ jest zerowy, a zatem wtedy $F_0 = F_1 = \cdots = F_m = 0$, czyli $F = 0$. Homomorfizm f jest więc różnowartościowy. Istnieje zatem homomorfizm ciał $\overline{f} : k(T) \longrightarrow k\{S\}$, $F/G \mapsto f(F)/f(G)$. Jest oczywiste, że $\overline{f}$ jest surjekcją. ⊠

Niech φ będzie ustalonym elementem ciała $k\{S\}$. Rozpatrzmy zbiór D_φ składający się z tych wszystkich punktów $x \in \mathbb{P}^n(k)$, dla których istnieją wielomiany jednorodne $P, Q \in k[S]$, tego samego stopnia takie, że $Q(x) \neq 0$ oraz $\varphi = \frac{P}{Q}$. Zbiór D_φ jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$. Nazywamy go *dziedziną* elementu φ.

Stwierdzenie 3.1.5. *Niech $\varphi \in k\{S\}$. Niech $\varphi = \frac{F}{G}$, gdzie $F, G \neq 0$ są względnie pierwszymi jednorodnymi wielomianami z $k[S]$ tego samego stopnia. Wówczas $D_\varphi = \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(G)$.*

Dowód. Inkluzja $\mathbb{P}^n(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(G) \subseteq D_\varphi$ jest oczywista. Niech $x \in D_\varphi$. Istnieją wtedy jednorodne wielomiany $P, Q \in k[S]$, tego samego stopnia takie, że $Q(x) \neq 0$ oraz $\varphi = \frac{P}{Q}$. Wtedy $\frac{P}{Q} = \varphi = \frac{F}{G}$, czyli $PG = QF$. Ponieważ wielomiany F i G są względnie pierwsze, więc $P = HF$ i $Q = HG$, dla pewnego jednorodnego wielomianu $H \in k[S]$. Wtedy $0 \neq Q(x) = H(x)G(x)$, a zatem $G(x) \neq 0$. Oznacza to, że $x \in \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(G)$. ⊠

Stąd w szczególności wynika:

Wniosek 3.1.6. *D_φ jest niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^n(k)$.* ⊠

Zanotujmy również oczywiste stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.1.7. *Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in k\{S\}$, to:*

(1) $D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2} \subseteq D_{\varphi_1 + \varphi_2}$,

(2) $D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2} \subseteq D_{\varphi_1 \cdot \varphi_2}$. ⊠

Niech $\varphi = P/Q \in k\{S\}$, gdzie $P, Q \neq 0$ są jednorodnymi wielomianami z $k[S]$ tego samego stopnia p. Niech $x \in \mathbb{P}^n(k)$ i niech $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ będzie takim ciągiem jednorodnych współrzędnych punktu x, że $Q(x_0, \dots, x_n) \neq 0$. Jeśli $(y_0, \dots, y_n) \in k^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ jest innym ciągiem jednorodnych współrzędnych punktu x, to $(y_0, \dots, y_n) = (ax_0, \dots, ax_n)$, dla pewnego $a \in k \smallsetminus \{0\}$, i wtedy $Q(y_0, \dots, y_n) = Q(ax_0, \dots, ax_n) = a^p Q(x_0, \dots, x_n) \neq 0$. Mamy wtedy ponadto

$$\frac{P(y_0, \dots, y_n)}{Q(y_0, \dots, y_n)} = \frac{P(ax_0, \dots, ax_n)}{Q(ax_0, \dots, ax_n)} = \frac{a^p P(x_0, \dots, x_n)}{a^p Q(x_0, \dots, x_n)} = \frac{P(x_0, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_n)}.$$

Każdemu więc punktowi $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(Q)$ możemy przyporządkować dokładnie jeden element $\varphi(x) \in k$ określony wzorem

$$\varphi(x) = \frac{P(x_0, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_n)}.$$

Wartość $\varphi(x)$, jak łatwo sprawdzić, nie zależy od wyboru jednorodnych wielomianów P i Q, określających element φ.

Zatem każdy element φ ciała $k\{S\}$ jest funkcją częściową $\varphi : \mathbb{P}^n(k) \underset{\circ}{\longrightarrow} k$. Jest oczywiste, że zbiór D_φ jest dziedziną tej częściowej funkcji.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.2 Funkcje regularne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla każdego podzbioru $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ zdefiniujemy taką k-algebrę, która w przypadku gdy X jest afinicznym zbiorem domkniętym, pokrywać się będzie z k-algebrą $k[X]$, funkcji regularnych na X.

W poprzednich rozdziałach rozważaliśmy różne funkcje. Pewne z nich były funkcjami częściowymi. Dla zaznaczenia, że funkcja, o której w danej chwili mówimy, nie jest funkcją częściową, mówić będziemy, że jest to *zwykła funkcja*.

Definicja 3.2.1. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie dowolnym podzbiorem. Mówimy, że zwykła funkcja $f : X \longrightarrow k$ jest *regularna na* X, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieją $\varphi \in k\{S\}$ oraz zbiór otwarty $U \subseteq X$ zawierający x takie, że $U \subseteq D_\varphi$ i $f|U = \varphi|U$.

Stwierdzenie 3.2.2. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie dowolnym podzbiorem i niech $f : X \longrightarrow k$ będzie zwykłą funkcją. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *f jest funkcją regularną na X.*

(2) *Dla każdego $x \in X$ istnieją jednorodne wielomiany $P_x, Q_x \in k[S]$ takie, że*

  (*a*) $\deg P_x = \deg Q_x$,
  (*b*) $Q_x(x) \neq 0$,
  (*c*) $f(y) = P_x(y)/Q_x(y)$, *dla wszystkich $y \in X$ takich, że $Q_x(y) \neq 0$.*

Dowód. (2) $\Rightarrow$ (1). Niech $U = X \cap (\mathbb{P}^n(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(Q_x))$ i niech $\varphi = P_x/Q_x$. Wtedy $\varphi \in k\{S\}$, U jest zbiorem otwartym w X zawartym w D_φ oraz $f|U = \varphi|U$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Niech $x \in X$ i niech $\varphi \in k\{S\}$, $x \in U \subseteq D_\varphi$, $f|U = \varphi|U$, gdzie U jest zbiorem otwartym w X. Istnieją wtedy jednorodne wielomiany $F, G \in k[S]$, tego samego stopnia takie, że $\varphi = F/G$ i $G(x) \neq 0$. Zbiór U (jako otwarty podzbiór w X) jest postaci $X \cap (\mathbb{P}^n(k) \smallsetminus Y)$, gdzie Y jest pewnym rzutowym zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n(k)$. Ponieważ $x \in U$, więc $x \notin Y$. Istnieje zatem jednorodny wielomian $H \in \mathrm{I_p}(Y)$ taki, że $H(x) \neq 0$. Przyjmijmy

$$P_x = HF, \quad Q_x = HG.$$

Wtedy P_x, Q_x są wielomianami jednorodnymi tego samego stopnia oraz $Q_x(x) = H(x)G(x) \neq 0$.

Niech $y \in X$ będzie takim punktem, że $Q_x(y) \neq 0$. Wtedy $H(y) \neq 0$ (bo $0 \neq Q_x(y) = H(y)G(y)$) zatem $y \notin Y$ (bo $H \in \mathrm{I_p}(Y)$), a zatem $y \in X \cap (\mathbb{P}^n(k) \smallsetminus Y) = U$. Wobec tego

$$f(y) = \frac{F(y)}{G(y)} = \frac{H(y)F(y)}{H(y)G(y)} = \frac{P_x(y)}{Q_x(y)}$$

i to kończy dowód naszego stwierdzenia. ⊠

Następne stwierdzenie jest oczywiste.

Stwierdzenie 3.2.3. *Każda funkcja stała $f : X \longrightarrow k$ jest regularna na X.* ⊠

Zbiór wszystkich funkcji regularnych na podzbiorze $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ oznaczmy przez $\mathrm{Reg}(X, k)$. Jest oczywiste, że $\mathrm{Reg}(X, k)$ jest pierścieniem przemiennym zawierającym ciało k. Pierścień ten nazywamy *k-algebrą funkcji regularnych na X*.

Przypomnijmy, że jeśli $X \subseteq k^n$ jest afinicznym zbiorem domkniętym, to przez $k[X]$ oznaczaliśmy k-algebrę wszystkich funkcji regularnych na X. Elementami tej algebry są zwykłe funkcje $f : X \to k$ postaci $f = F|X$, gdzie F jest wielomianem należącym do $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$. Wykażemy teraz, że jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte, to k-algebra $k[X]$ jest izomorficzna z k-algebrą $\operatorname{Reg}(X, k)$. Do dowodu tego faktu potrzebne są dwa lematy.

Lemat 3.2.4. *Niech $X \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech $U \subseteq X$ będzie jego otwartym podzbiorem. Dla każdego $x_0 \in U$ istnieje $f \in k[X]$ takie, że $f(x_0) \neq 0$ oraz $f(y) = 0$, dla wszystkich $y \in X \smallsetminus U$.*

Dowód. Niech $Y = X \smallsetminus U$. Wtedy Y jest zbiorem domkniętym w X, więc jest także zbiorem domkniętym w k^n. Ponadto $x_0 \notin Y = \mathrm{VI}(Y)$. Istnieje więc wielomian $F \in \mathrm{I}(Y)$ taki, że $F(x_0) \neq 0$. Określamy f jako $F|X$. ⊠

Lemat 3.2.5. *Niech $X \subseteq k^n$ będzie zbiorem algebraicznym i niech $f : X \longrightarrow k$ będzie zwykłą funkcją. Załóżmy, że dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór otwarty $U_x \subseteq X$ zawierający x oraz istnieją funkcje regularne $p_x, q_x \in k[X]$ takie, że $q_x(x) \neq 0$ i $q_x(y)f(y) = p_x(y)$, dla wszystkich $y \in U_x$. Jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte, to $f \in k[X]$.*

Dowód. Mnożąc ewentualnie funkcje regularne p_x, q_x przez odpowiednią funkcję regularną, istniejącą na mocy Lematu 3.2.4, możemy założyć, że równości postaci $q_x(y)f(y) = p_x(y)$ spełnione są dla wszystkich $y \in X$. Niech A będzie ideałem w $k[X]$ generowanym przez wszystkie funkcje postaci q_x, $x \in X$. Wtedy $\mathrm{V}_X(A)$ jest oczywiście zbiorem pustym. Z twierdzenia Hilberta o zerach dla $k[X]$ wynika więc, że $A = k[X]$. Stąd dalej wynika, że $1 = h_1 q_{x_1} + \cdots + h_s q_{x_s}$, dla pewnych $x_1, \ldots, x_s \in X$ oraz $h_1, \ldots, h_s \in k[X]$. To implikuje, że $f = \sum_{i=1}^{s} h_i p_{x_i}$ jest funkcją regularną na X. ⊠

Stwierdzenie 3.2.6. *Załóżmy, że ciało k jest algebraicznie domknięte. Jeśli X jest domkniętym zbiorem afinicznym (tzn. zbiorem domkniętym zawartym np. w $\mathbb{A}_0^n$), to k-algebra $\operatorname{Reg}(X, k)$, funkcji regularnych na X, jest izomorficzna z afiniczną k-algebrą $k[X]$, funkcji regularnych na X*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{A}_0^n$ będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{A}_0^n$. Wtedy $X = (X_a)^{\square}$, gdzie X_a jest afinicznym zbiorem domkniętym w k^n (Stwierdzenie 1.8.4). Rozpatrzmy k-algebrę $\operatorname{Reg}(X, k)$ i niech $k[X_a]$ będzie afiniczną k-algebrą funkcji regularnych na X_a. Wykażemy, że istnieje pewien k-algebrowy homomorfizm $\alpha : k[X_a] \to \operatorname{Reg}(X, k)$ i pokażemy następnie, że homomorfizm ten jest izomorfizmem.

Niech $f : X_a \to k$ będzie elementem pierścienia $k[X_a]$. Definiujemy $f^{\square} : X \longrightarrow k$ przyjmując

$$f^{\square}(x) = f(x_{\square}), \text{ dla } x \in X.$$

Oczywiście $f^{\square}$ jest zwykłą funkcją. Pokażemy, że jest to funkcja regularna na X. W tym celu niech $F \in k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$ będzie takim wielomianem, że $f = F|X_a$ i niech P, Q będą wielomianami z $k[S]$ zdefiniowanymi następująco:

$$P(S_0, \ldots, S_n) = F^{\square} = S_0^{\deg F} F(\tfrac{S_1}{S_0}, \ldots, \tfrac{S_n}{S_0}), \quad Q(S_0, \ldots, S_n) = S_0^{\deg F}.$$

Wielomiany P i Q są jednorodne i mają ten sam stopień równy $\deg F$. Mamy zatem element $\varphi = P/Q$ należący do ciała $k\{S\}$ i jest oczywiste, że $\mathbb{A}_0^n \subseteq D_{\varphi}$. Zauważmy, że $f^{\square} = \varphi|X$. Istotnie, jeśli $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in X$, to

$$\varphi(x) = \frac{x_0^{\deg F} F(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})}{x_0^{\deg F}} = F(\tfrac{x_1}{x_0}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_0}) = F(x_{\square}) = f(x_{\square}) = f(x).$$

Zatem $f^{\square} : X \longrightarrow k$ jest elementem k-algebry $\mathrm{Reg}(X,k)$. Przyjmujemy, że $\alpha(f) = f^{\square}$. Z łatwością sprawdzamy, że $\alpha : k[X_a] \to \mathrm{Reg}(X,k)$ jest homomorfizmem k-algebr.

Dla wykazania, że α jest izomorfizmem wystarczy pokazać, że istnieje zwykła funkcja β ze zbioru $\mathrm{Reg}(X,k)$ do zbioru $k[X_a]$ taka, że $\alpha\beta = \mathrm{id}$ i $\beta\alpha = \mathrm{id}$.

Niech $h : X \longrightarrow k$ będzie funkcją regularną na X w sensie Definicji 3.2.1. Wtedy h jest zwykłą funkcją. Możemy więc określić zwykłą funkcję $h_{\square} : X_a \longrightarrow k$ przyjmując

$$h_{\square}(y) = h(y^{\square}), \quad \text{dla } \ y \in X_a.$$

Wykażemy, że $h_{\square}$ jest afiniczną funkcją regularną na X_a.

Niech $y \in X_a$. Wtedy $y^{\square} \in X$. Istnieją więc jednorodne wielomiany P, Q z pierścienia $k[S]$ i istnieje otoczenie $U \subseteq X$ punktu $y^{\square}$ takie, że

$$h \mid U = \frac{P}{Q} \mid U.$$

Niech $p(T_1,\dots,T_n) = P_{\square} = P(1,T_1,\dots,T_n)$, $q(T_1,\dots,T_n) = Q_{\square} = Q(1,T_1,\dots,T_n)$ i niech $D \subseteq X_a$ będzie podzbiorem określonym wzorem $D = U_{\square}$. Wtedy D jest zbiorem otwartym w X_a (Stwierdzenie 1.8.4) zawierającym y oraz $p|X_a$, $q|X_a$ są takimi afinicznymi funkcjami regularnymi na X_a, że $q(y) \neq 0$ i $h_{\square}(z)q(z) = p(z)$, dla wszystkich $z \in D$. To implikuje, na mocy Lematu 3.2.5, że $h_{\square} : X_a \longrightarrow k$ jest afiniczną funkcją regularną na X_a. Zatem $h_{\square}$ jest elementem pierścienia $k[X_a]$. Mamy zatem funkcję $\beta : \mathrm{Reg}(X,k) \longrightarrow k[X_a]$ określoną wzorem $\beta(h) = h_{\square}$, dla wszystkich $h \in \mathrm{Reg}(X,k)$.

Wykażemy teraz, że złożenia $\alpha\beta$ i $\beta\alpha$ są identycznościami. Niech $h \in \mathrm{Reg}(X,k)$ i niech $x \in X$. Mamy wtedy:

$$(\alpha\beta(h))(x) = (\alpha(h_{\square}))(x) = (h_{\square})^{\square}(x) = h_{\square}(x_{\square}) = h((x_{\square})^{\square}) = h(x).$$

Zatem $\alpha\beta = \mathrm{id}$. Niech teraz $f \in k[X_a]$ i $y \in X_a$. Wtedy

$$(\beta\alpha(f))(y) = (\beta(f^{\square}))(y) = (f^{\square})_{\square}(y) = f^{\square}(y^{\square}) = f((y^{\square})_{\square}) = f(y).$$

Złożenie $\beta\alpha$ jest więc również tożsamością. To kończy dowód naszego stwierdzenia. ⊠

Wykażemy teraz, że każda funkcja regularna $f : X \longrightarrow k$ traktowana jako odwzorowanie z przestrzeni topologicznej X, z topologią indukowaną przez topologię Zariskiego na $\mathbb{P}^n(k)$, do afinicznej przestrzeni k^1 (z topologią Zariskiego), jest funkcją ciągłą.

Lemat 3.2.7. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie dowolnym podzbiorem i niech $f : X \longrightarrow k$ będzie funkcją regularną na X. Wtedy, dla każdego $a \in k$, zbiór $f^{-1}(a)$ jest domknięty w X.*

Dowód. Z definicji funkcji regularnej $f : X \longrightarrow k$ wiemy, że dla każdego $x \in X$ istnieją jednorodne wielomiany $P_x, Q_x \in k[S]$ tego samego stopnia takie, że $Q_x(x) \neq 0$ oraz $f(y) = P_x(y)/Q_x(y)$ dla wszystkich $y \in X$ spełniających warunek $Q_x(y) \neq 0$.

Niech $a \in k$. Rozpatrzmy jednorodny ideał A w $k[S]$ generowany przez wszystkie (jednorodne) wielomiany postaci $P_xQ_x - aQ_x^2$, gdzie $x \in X$. Pokażemy, że

$$f^{-1}(a) = X \cap \mathrm{V_p}(A).$$

Niech $z \in f^{-1}(a)$. Wtedy $z \in X$ oraz $f(z) = a$. Niech x będzie dowolnym elementem należącym do X. Jeśli $Q_x(z) = 0$, to oczywiście $P_x(z)Q_x(z) - aQ_x(z)^2 = 0$. Jeśli $Q_x(z) \neq 0$, to $a = f(z) = P_x(z)/Q_x(z)$, a więc $P_x(z) - aQ_x(z) = 0$, czyli $P_x(z)Q_x(z) - aQ_x(z)^2 = 0$. Zatem $z \in \mathrm{V_p}(A) \cap X$.

Załóżmy teraz, że $z \in \mathrm{V_p}(A) \cap X$. Wtedy $P_z(z)Q_z(z) - aQ_z(z)^2 = 0$. Ale $Q_z(z) \neq 0$, więc $P_z(z) - aQ_z(z) = 0$ i stąd $f(z) = P_z(z)/Q_z(z) = a$, tzn. $z \in f^{-1}(a)$. ⊠

Ponieważ każdy zbiór domknięty w k^1 jest albo całym zbiorem k^1, albo jest zbiorem skończonym, więc z powyższego lematu otrzymujemy:

Stwierdzenie 3.2.8. *Jeśli $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ jest dowolnym podzbiorem i $f : X \longrightarrow k$ jest funkcją regularną na X, to f jest funkcją ciągłą.* ⊠

Pierścień $\mathrm{Reg}(X,k)$, funkcji regularnych na podzbiorze $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ znacznie różni się od afinicznego pierścienia funkcji regularnych. Afiniczny pierścień funkcji regularnych jest postaci $k[T]/\mathrm{I_a}(Y)$ dla pewnego domkniętego zbioru $Y \subseteq k^n$. Z tego wynika, że każdy afiniczny pierścień funkcji regularnych jest skończenie generowaną k-algebrą. Takiej własności nie muszą mieć pierścienie postaci $\mathrm{Reg}(X,k)$, gdy X jest nawet rozmaitością quasi-rzutową. Przykłady podali Rees i Nagata. Wspomina o tym Szafarewicz [Szaf88]63.

Można udowodnić (pokażemy to później), że jeśli X jest domkniętym zbiorem rzutowym w $\mathbb{P}^n(k)$ i ciało k jest algebraicznie domknięte, to $\mathrm{Reg}(X,k) = k$. Wykażemy to teraz w przypadku gdy $X = \mathbb{P}^n(k)$. W tym celu zanotujmy najpierw następujący lemat.

Lemat 3.2.9. *Załóżmy, że ciało k jest nieskończone. Niech U będzie niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^n(k)$. Niech $P, Q, P,' Q'$ będą jednorodnymi wielomianami w $k[S]$ takimi, że:*

(1) $\deg P = \deg Q$, $\deg P' = \deg Q'$,

(2) *P i Q są względnie pierwsze oraz P' i Q' są względnie pierwsze,*

(3) *$Q(u) \neq 0$ i $Q'(u) \neq 0$ dla wszystkich $u \in U$,*

(4) *$P(u)/Q(u) = P'(u)/Q'(u)$ dla wszystkich $u \in U$.*

Istnieje wtedy niezerowa stała $b \in k$ taka, że $P = bP'$ i $Q = bQ'$.

Dowód. Z założeń wynika, że $(PQ' - P'Q)(u) = 0$, dla wszystkich $u \in U$. Zatem $U \subseteq \mathrm{V_p}(PQ' - P'Q)$, a więc $\overline{U} \subseteq \mathrm{V_p}(PQ' - P'Q)$. Z nieprzywiedlności przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$ wynika, że $\overline{U} = \mathbb{P}^n(k)$. Stąd $\mathrm{V_p}(PQ' - P'Q) = \mathbb{P}^n(k)$, a zatem $PQ' = P'Q$. Teraz wystarczy skorzystać z faktu, że $k[S]$ jest pierścieniem z jednoznacznością rozkładu. ⊠

Stwierdzenie 3.2.10. *Jeśli $X = \mathbb{P}^n(k)$, to* $\mathrm{Reg}(X,k) = k$.

Dowód. Niech $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow k$ będzie funkcją regularną. Niech $x_0 \in \mathbb{P}^n$ i niech $f(x_0) = a$. Pokażemy, że $f(x) = a$ dla wszystkich $x \in \mathbb{P}^n$.

Istnieją jednorodne wielomiany $P, Q \in k[S]$, tego samego stopnia takie, że $Q(x_0) \neq 0$ oraz $f(y) = P(y)/Q(y)$ dla wszystkich $y \in \mathbb{P}^n$ spełniających własność $Q(y) \neq 0$. Możemy oczywiście założyć, że wielomiany P i Q są względnie pierwsze. Zachodzić teraz mogą dwa przypadki.

Przypadek 1. *Wszystkie punkty $y \in \mathbb{P}^n$ są takie, że $Q(y) \neq 0$.* W tym przypadku zbiór $\mathrm{V_p}(Q)$ jest pusty. Zatem (na mocy rzutowego twierdzenia Hilberta o zerach) wielomian Q jest niezerową stałą należącą do k. Stopień wielomianu Q jest więc równy zero. Ten sam stopień ma wielomian P. Zatem P jest też wielomianem stałym. Stąd wynika, że $f = P/Q$ jest funkcją stałą.

Przypadek 2. *Istnieje $y_0 \in \mathbb{P}^n$ takie, że $Q(y_0) = 0$.* Pokażemy, że ten przypadek nie jest możliwy. Ponieważ $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow k$ jest funkcją regularną, więc dla punktu y_0 istnieją jednorodne wielomiany $P', Q' \in k[S]$, tego samego stopnia takie, że $Q'(y_0) \neq 0$ oraz $f(z) = P'(z)/Q'(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{P}^n$ z warunkiem $Q'(z) \neq 0$. Możemy założyć jeszcze, że wielomiany P' i Q' są względnie pierwsze. Mamy teraz dwa otwarte zbiory $U = \mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(Q)$ oraz $U' = \mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(Q')$. Są to zbiory niepuste, bo $x_0 \in U$, $y_0 \in U'$. Przestrzeń $\mathbb{P}^n(k)$ jest nieprzywiedlna, więc przekrój $U \cap U'$ jest niepustym (otwartym) podzbiorem w $\mathbb{P}^n$. Dla wszystkich punktów u należących do $U \cap U'$ zachodzą równości $f(u) = P(u)/Q(u)$ i $f(u) = P'(u)/Q'(u)$. Stąd $P(u)/Q(u) = P'(u)/Q'(u)$ dla $u \in U \cap U'$. Spełnione są więc wszystkie założenia Lematu 3.2.9. Zatem $P = bP'$, $Q = bQ'$, dla pewnego $b \in k \smallsetminus \{0\}$. Otrzymaliśmy sprzeczność: $0 = Q(y_0) = bQ'(y_0) \neq 0$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.3 Definicje odwzorowania regularnego

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zajmować się będziemy zwykłymi funkcjami $f : X \longrightarrow Y$, gdzie X i Y są podzbiorami odpowiednio w przestrzeniach rzutowych $\mathbb{P}^n$ i $\mathbb{P}^m$. Pewne takie funkcje nazywać będziemy odwzorowaniami regularnymi. Zdefiniujemy je najpierw w przypadku, gdy Y jest rozmaitością postaci $\mathbb{A}^m_j$, dla pewnego $j = 0, \dots, m$. Wykorzystamy w tym celu znane nam funkcje $\mu_j : \mathbb{A}^m_j \longrightarrow k^m$, $\nu_j : k^m \longrightarrow \mathbb{A}^m_j$.

Definicja 3.3.1. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie dowolnym podzbiorem. Mówimy, że zwykła funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^m_j$ jest *odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{A}^m_j$* jeśli istnieją funkcje regularne $f_1, \dots, f_m : X \longrightarrow k$ takie, że

$$\mu_j f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Teraz zdefiniujemy odwzorowania regularne w przypadku, gdy Y jest dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{P}^m(k)$.

Definicja 3.3.2. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ będą podzbiorami. Mówimy, że zwykła funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest *odwzorowaniem regularnym z X do Y* jeśli dla każdego punktu $x \in X$ i dla każdego $j \in \{0, \dots, m\}$ takiego, że $f(x) \in \mathbb{A}^m_j$, istnieje podzbiór $U \subseteq X$, otwarty w X i zawierający x taki, że

(a) $f(U) \subseteq A^m_j$ oraz

(b) funkcja $f|U : U \longrightarrow \mathbb{A}^m_j$ jest odwzorowaniem regularnym z U do $\mathbb{A}^m_j$.

Poniższe stwierdzenie pozwala definiować odwzorowania regularne w inny sposób.

Stwierdzenie 3.3.3. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ będą podzbiorami i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie zwykłą funkcją. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Funkcja f jest odwzorowaniem regularnym z X do Y.*

(2) *Dla każdego $x \in X$ istnieje otwarty podzbiór $U \subseteq X$ zawierający x i istnieją jednorodne wielomiany $F^U_0, \dots, F^U_m \in k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ takie, że:*

(a) *stopnie wszystkich wielomianów $F^U_0, \dots, F^U_m$ są jednakowe,*

(b) *$f(z) = (F^U_0(z) : \dots : F^U_m(z))$, dla wszystkich $z \in U$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym. Niech $x \in X$ i załóżmy (dla ustalenia uwagi), że $f(x) \in A^m_0$. Niech $U_0 \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym w X zawierającym x takim, jak w Definicji 3.3.2, tzn., $f(U_0) \subseteq \mathbb{A}^m_0$ oraz $f|U_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^m_0$ jest odwzorowaniem regularnym z U_0 do $\mathbb{A}^m_0$. Z Definicji 3.3.1 wiemy, że wtedy $f(z)_\square = (f_1(z), \dots, f_m(z))$, dla $z \in U_0$, gdzie $f_1, \dots, f_m : U_0 \longrightarrow k$ są pewnymi funkcjami regularnymi na U_0.

Wykorzystajmy teraz (dla punktu x) Stwierdzenie 3.2.2. Ze stwierdzenia tego wynika, że istnieją jednorodne wielomiany $P_1, Q_1, \dots, P_m, Q_m \in k[S]$ takie, że dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ spełnione są następujące trzy waruki:

(a') $\deg P_j = \deg Q_j$,

(b') $Q_j(x) \neq 0$,

(c') $f_j(z) = P_j(z)/Q_j(z)$, dla $z \in U_0$ takich, że $Q_j(z) \neq 0$.

Rozpatrzmy wielomiany $F_0, \dots, F_m \in k[S]$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} F_0 &= Q_1 \cdots Q_m, \\ F_j &= P_j Q_1 \cdots \widehat{Q_j} \cdots Q_m, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Są to oczywiście wielomiany jednorodne tego samego stopnia oraz $F_0(x) \neq 0$. Niech

$$U = U_0 \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(F_0)).$$

Wtedy U jest otwartym podzbiorem w X zawierającym x oraz

$$f_j(z) = \tfrac{P_j(z)}{Q_j(z)} = \tfrac{F_j(z)}{F_0(z)},$$

dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ i wszystkich $z \in U$. Jeśli więc $z \in U$, to $f(z) = (F_0(z) : \dots : F_m(z))$. Istotnie,

$$\begin{aligned} f(z) &= (f(z)_\square)^\square = \nu_0(f_1(z), \dots, f_m(z)) \\ &= (\tfrac{F_1(z)}{F_0(z)}, \dots, \tfrac{F_m(z)}{F_0(z)})^\square = (1 : \tfrac{F_1(z)}{F_0(z)} : \dots : \tfrac{F_m(z)}{F_0(z)}) \\ &= (F_0(z) : \dots : F_m(z)). \end{aligned}$$

Przyjmując teraz $F_0^U = F_0, \dots, F_m^U = F_m$ widzimy, że warunek (2) jest spełniony.

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech $x \in X$ i niech $U, F_0^U, \dots, F_m^U$ będą takie, jak w (2). Niech $j \in \{0, \dots, m\}$ będzie takie, że $f(x) \in \mathbb{A}_j^m$. Ponieważ $f(x) = (F_0^U(x) : \dots : F_m^U(x)) \in \mathbb{A}_j^m$, więc $F_j^U(x) \neq 0$. Przyjmijmy (dla ustalenia uwagi), że $j = 0$ i oznaczmy: $F_0 = F_0^U, \dots, F_m = F_m^U$. Niech

$$U' = U \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(F_0)).$$

Wtedy U' jest zbiorem otwartym w X zawierającym x oraz $f(U') \subseteq \mathbb{A}_0^m$. Wielomiany $F_0, \dots, F_m$ określają częściowe funkcje $F_1/F_0, \dots, F_m/F_0$ z U do k, których dziedziny zawierają otwarty zbiór U'. Obcięcia tych funkcji do zbioru U' dają nam zwykłe funkcje $f_1, \dots, f_m : U' \longrightarrow k$, które są oczywiście funkcjami regularnymi na U'. Zachodzą ponadto równości

$$f(z)_\square = (f_1(z), \dots, f_m(z)), \quad \text{dla wszystkich } z \in U'.$$

To implikuje (patrz Definicja 3.3.1), że $f|U' : U' \longrightarrow \mathbb{A}_0^m$ jest odwzorowaniem regularnym i stąd wynika, że $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym z X do Y. $\boxtimes$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.4 Początkowe przykłady odwzorowań regularnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przy pomocy Stwierdzenia 3.3.3 można łatwo konstruować przykłady odwzorowań regularnych.

Przykład 3.4.1. Niech $F_0, \dots, F_m \in k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ będą jednorodnymi wielomianami tego samego stopnia takimi, że $(F_0(x) : \dots, F_m(x)) \in Y$, dla wszystkich $x \in X$. Wtedy funkcja $f : X \longrightarrow Y$ określona wzorem $f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x))$, dla $x \in X$, jest odwzorowaniem regularnym z X do Y. $\boxtimes$

W szczególności dla $Y = \mathbb{P}^m$ mamy:

Przykład 3.4.2. Niech $F_0, \dots, F_m \in k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ będą jednorodnymi wielomianami tego samego stopnia takimi, że $\forall_{x \in X} \exists_{j \in \{0,\dots,m\}} \; F_j(x) \neq 0$. Wtedy funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ określona wzorem $f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x))$, dla $x \in X$, jest odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{P}^m$. $\boxtimes$

Różne ciągi $(F_0, \dots, F_m)$, $(G_0, \dots, G_m)$ jednorodnych wielomianów tego samego stopnia mogą określać to samo odwzorowanie regularne. Poniższe stwierdzenie dotyczy tej sytuacji.

Stwierdzenie 3.4.3. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ będzie podzbiorem. Niech $(F_0, \dots, F_m)$, $(G_0, \dots, G_m)$ będą ciągami jednorodnych wielomianów w $k[S]$ takimi, że $\deg F_0 = \dots = \deg F_m$, $\deg G_0 = \dots = \deg G_m$, oraz $\forall_{x\in X} \exists_{j\in\{0,\dots,m\}}\ F_j(x) \neq 0$ i $\forall_{x\in X} \exists_{j\in\{0,\dots,m\}}\ G_j(x) \neq 0$. Niech $f, g : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ będą odwzorowaniami regularnymi określonymi wzorami*

$$f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x)), \quad g(x) = (G_0(x) : \dots : G_m(x)), \quad x \in X.$$

Wtedy następujące dwa warunki są równoważne.

(1) $f = g$,

(2) $F_i(x)G_j(x) = F_j(x)G_i(x)$, *dla wszystkich* $x \in X$ *i wszystkich* $i, j \in \{0, \dots, m\}$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) Niech $x \in X$. Wtedy $(F_0(x) : \dots : F_m(x)) = (G_0(x) : \dots : G_m(x))$. Istnieje więc $0 \neq a \in k$ takie, że $F_s(x) = aG_s(x)$ dla wszystkich $s = 0, \dots, m$. Jeśli więc $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$, to $F_i(x)G_j(x) = aG_i(x)G_j(x) = aG_j(x)G_i(x) = F_j(x)G_i(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Niech $x \in X$. Istnieją wówczas $i_0, j_0 \in \{0, \dots, m\}$ takie, że $F_{i_0}(x) \neq 0$ i $G_{j_0}(x) \neq 0$. Wtedy $0 \neq F_{i_0}(x)G_{j_0}(x) = F_{j_0}(x)G_{i_0}(x)$, czyli $F_{j_0}(x) \neq 0$. Mamy zatem $f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x)) = (F_0(x)G_{j_0}(x) : F_1(x)G_{j_0}(x) : \dots : F_m(x)G_{j_0}(x)) = (G_0(x)F_{j_0}(x) : G_1(x)F_{j_0}(x) : \dots : G_m(x)F_{j_0}(x)) = (G_0(x) : \dots : G_m(x)) = g(x)$. ⊠

Odwzorowania (takie jak w Przykładach 3.4.1, 3.4.2) określone przy pomocy jednego ciągu jednorodnych wielomianów tego samego stopnia, nie wyczerpują wszystkich przykładów odwzorowań regularnych. Odwzorowania regularne z X do Y mogą być określone przy pomocy kilku różnych ciągów jednorodnych wielomianów tego samego stopnia.

Przykład 3.4.4. Niech $X = \mathrm{V_p}(S_1^2 + S_2^2 - S_0^2) \cap \mathbb{A}_0^2$, gdzie $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Rozpatrzmy zwykłą funkcję $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ określoną wzorem

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \begin{cases} (x_1 - x_0 : x_2), & \text{gdy} \quad x_1 \neq x_0, \\ (-x_2 : x_1 + x_0), & \text{gdy} \quad x_1 = x_0 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że f jest dobrze określoną funkcją. Do określenia tej funkcji użyliśmy dwóch ciągów (F_0, F_1), (G_0, G_1) jednorodnych wielomianów tego samego stopnia należących do $k[S_0, S_1, S_2]$. Tutaj $F_0 = S_1 - S_0$, $F_1 = S_2$, $G_0 = -S_2$ oraz $G_1 = S_1 + S_0$. Zauważmy, że ciągi te nie spełniają warunku, o którym mowa w Przykładzie 3.4.2. Dla punktu $(1 : 1 : 0) \in X$ mamy $(F_0(1,1,0), F_1(1,1,0)) = (0,0)$. Natomiast dla punktu $(1 : -1 : 0)$ zachodzi równość $(G_0(1,-1,0), G_1(1,-1,0)) = (0,0)$.

Wykażemy, że funkcja ta jest odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{P}^1(k)$. W tym celu niech

$$U_1 = X \cap \Big(\mathbb{P}^2(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(S_0 - S_1)\Big), \quad U_2 = X \cap \Big(\mathbb{P}^2(k) \smallsetminus \mathrm{V_p}(S_0 + S_1)\Big).$$

Są to dwa zbiory otwarte w X oraz $X = U_1 \cup U_2$ (ponieważ $\mathrm{char}(k) \neq 2$). Zauważmy, że dla $x \in U_1 \cap U_2$ zachodzi równość: $(x_1 - x_0 : x_2) = (-x_2 : x_1 + x_0)$. Istotnie, jeśli $x = (x_0 : x_1 : x_2) \in U_1 \cap U_2$, to $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq x_0$, $x_1 \neq -x_0$ oraz $x_2^2 = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$ (w szczególności $x_2 \neq 0$) i wtedy $(x_1 - x_0 : x_2) = ((x_1 - x_0)(x_1 + x_0) : x_2(x_1 + x_0)) = (-x_2^2 : x_2(x_1 + x_0)) = (-x_2 : x_1 + x_0)$. Mamy zatem:

$$f(x) = \begin{cases} (x_1 - x_0 : x_2), & \text{dla } x \in U_1, \\ (-x_2 : x_1 + x_0), & \text{dla } x \in U_2. \end{cases}$$

Funkcja f jest więc odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{P}^1(k)$. ⊠

Ze Stwierdzenia 3.3.3 wynika:

Stwierdzenie 3.4.5. *Jeśli X jest podzbiorem przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n(k)$, to funkcja tożsamościowa $1_X : X \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem regularnym.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Niech $U = X$ i niech $F_0 = S_0, \dots, F_n = S_n$. Wtedy U jest zbiorem otwartym w X oraz $F_0, \dots, F_n$ są jednorodnymi wielomianami tego samego stopnia, należącymi do $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$. Teza wynika więc ze Stwierdzenia 3.3.3, gdyż dla każdego $x \in U = X$ mamy równość $1_X(x) = (F_0(x) : \dots : F_n(x))$. ⊠

Nie jest w tej chwili łatwo udowodnić, że złożenie odwzorowań regularnych jest odwzorowaniem regularnym. Wykażemy to później (patrz Stwierdzenie 3.9.3).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.5 Afiniczne odwzorowania regularne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy co to są odwzorowania regularne afinicznych zbiorów domkniętych. Nazwijmy (chwilowo) takie odwzorowania *afinicznymi odwzorowaniami regularnymi*. Pokażemy, że jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte i zbiory X, Y są afinicznymi zbiorami domkniętymi, to odwzorowania regularne z X do Y, w sensie Definicji 3.3.2, pokrywają się z afinicznymi odwzorowaniami regularnymi z X do Y. W dowodzie tego faktu wykorzystamy funkcje μ_i, ν_i. Będziemy je teraz oznaczać z dodatkowym górnym indeksem, tzn., $\mu_i^n = \mu_i : \mathbb{A}_i^n \longrightarrow k^n$, $\nu_i^n = \nu_i : k^n \longrightarrow \mathbb{A}_i^n$.

Stwierdzenie 3.5.1. *Niech $X \subseteq \mathbb{A}_i^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}_j^m$ będą afinicznymi zbiorami domkniętymi. Załóżmy, że $X = \nu_i^n(X_a)$, $Y = \nu_j^m(Y_a)$, gdzie X_a i Y_a są zbiorami domkniętymi odpowiednio w k^n i k^m. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie zwykłą funkcją. Jeśli ciało k jest algebraicznie domknięte, to następujące warunki są równoważne.*

(1) *Funkcja f jest odwzorowaniem regularnym z X do Y.*

(2) *Funkcja $\mu_j^m f \nu_i^n : X_a \longrightarrow Y_a$ jest afinicznym odwzorowaniem regularnym.*

Dowód. (1) ⇒ (2). Ponieważ $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}_j^m$, więc f jest odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{A}_j^m$. Z Definicji 3.3.1 wynika, że istnieją funkcje $f_1, \dots, f_m : X \longrightarrow k$, regularne na X takie, że

$$\mu_j^m f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \qquad \text{dla wszystkich } x \in X.$$

Mamy wtedy funkcje $f_1', \dots, f_m' : X_a \longrightarrow k$ określone wzorami:

$$f_p'(z) = f_p(\nu_i^n(z)), \quad z \in X_a, \quad p = 1, \dots, m.$$

Z dowodu Stwierdzenia 3.2.6 wiemy, że $f_1', \dots, f_m'$ są afinicznymi funkcjami regularnymi na X_a. Mamy ponadto równość $\mu_j^m f \nu_i^n = (f_1', \dots, f_m')$. Istotnie, jeśli $z \in X_a$, to:

$$(\mu_j^m f \nu_i^n)(z) = \mu_j^m f(\nu_i^n(z)) = (f_1(\nu_i^n(z)), \dots, f_m(\nu_i^n(z))) = (f_1'(z), \dots, f_m'(z)).$$

Stąd wynika, że funkcja $\mu_j^m f \nu_i^n : X_a \longrightarrow Y_a$ jest afinicznym odwzorowaniem regularnym.

(2) ⇒ (1). Załóżmy, że $\mu_j^m f \nu_i^n = (g_1, \dots, g_m)$, gdzie $g_1, \dots, g_m : X_a \longrightarrow k$ są afinicznymi funkcjami regularnymi na X_a. Rozpatrzmy funkcje $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m} : X \longrightarrow k$ określone wzorami

$$\overline{g_p}(x) = g_p(\mu_i^n(x)), \quad x \in X, \quad p = 1, \dots, m.$$

Z dowodu Stwierdzenia 3.2.6 wiemy, że $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}$ są funkcjami regularnymi na X. Zauważmy, że $\mu_j^m f = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m})$. Istotnie, jeśli $x \in X$, to:

$$\mu_j^m f(x) = (\mu_j^m f \nu_i^n)(\mu_i^n(x)) = (g_1(\mu_i^n(x)), \dots, g_m(\mu_i^n(x))) = (\overline{g_1}(x), \dots, \overline{g_m}(x)).$$

Stąd wynika (na mocy Definicji 3.3.1), że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym. $\boxtimes$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.6 Izomorfizm rozmaitości quasi-rzutowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówiąc o odwzorowaniach regularnych z X do Y zakładaliśmy tylko, że X i Y są podzbiorami odpowiednich przestrzeni rzutowych. Od tej pory rozważać będziemy odwzorowania regularne rozmaitości quasi-rzutowych, tzn., zakładać będziemy dodatkowo, że X i Y są rozmaitościami quasi-rzutowymi. Definicję i podstawowe przykłady rozmaitości quasi-rzutowych podaliśmy na stronie 13.

Definicja 3.6.1. Mówimy, że odwzorowanie regularne $f : X \longrightarrow Y$ jest *izomorfizmem* jeśli jest bijekcją i funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem regularnym.

Mówimy, że rozmaitości quasi-rzutowe X i Y są *izomorficzne* jeśli istnieje odwzorowanie regularne z X do Y będące izomorfizmem.

Definicja 3.6.2. Rozmaitość quasi-rzutową X nazywamy *rozmaitością afiniczną* jeśli X jest izomorficzne z pewnym afinicznym zbiorem domkniętym (zawartym w pewnej przestrzeni k^n).

Rozmaitość quasi-rzutową X nazywamy *rozmaitością rzutową* jeśli X jest izomorficzne z pewnym rzutowym zbiorem domkniętym (zawartym w pewnej przestrzeni $\mathbb{P}^n(k)$).

Zbiór $k^1 \smallsetminus \{0\}$ jest rozmaitością quasi-rzutową (gdyż jest to zbiór otwarty w k^1). Jeśli ciało k jest nieskończone, to zbior ten nie jest domknięty w afinicznej przestrzeni k^1. Poniższy przykład pokazuje, że zbiór ten jest jednak rozmaitością afiniczną.

Przykład 3.6.3. Niech
$$\begin{aligned} X &= \mathbb{A}_0^2 \cap \mathrm{V_p}(S_1S_2 - S_0^2), \\ Y &= \mathbb{A}_0^1 \cap (\mathbb{P}^1 \smallsetminus \mathrm{V_p}(S_1)) \quad = \quad \nu_0(k^1 \smallsetminus \{0\}). \end{aligned}$$
Rozpatrzmy funkcje $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ określone wzorami:

$$\begin{aligned} f(x_0 : x_1 : x_2) &= (x_0 : x_1) \\ g(y_0 : y_1) &= (y_0y_1 : y_1^2 : y_0^2), \end{aligned}$$

dla wszystkich $x = (x_0 : x_1 : x_2) \in X$, $y = (y_0 : y_1) \in Y$. Zauważmy, że definicje są poprawne. Ze Stwierdzenia 3.3.3 wynika, że funkcje te są odwzorowaniami regularnymi. Złożenia tych funkcji są tożsamościami. Istotnie, dla $(y_0 : y_1) \in Y$ mamy:

$$fg(y_0 : y_1) = f(y_0y_1 : y_1^2 : y_0^2) = (y_0y_1 : y_1^2) = (y_0 : y_1).$$

Jeśli $(x_0 : x_1 : x_2) \in X$, to $x_0^2 = x_1x_2$ i mamy:

$$gf(x_0 : x_1 : x_2) = g(x_0 : x_1) = (x_0x_1 : x_1^2 : x_0^2) = (x_0x_1 : x_1^2 : x_1x_2) = (x_0 : x_1 : x_2).$$

Rozmaitości X i Y są więc izomorficzne. $\boxtimes$

Rozmaitości afiniczne zawarte w $\mathbb{A}_0^n$ nie muszą być (jak pokazuje powyższy przykład) zbiorami domkniętymi w $\mathbb{A}_0^n$. Podobna sytuacja nie ma miejsca dla rozmaitości rzutowych. Rozmaitość rzutowa zawarta w $\mathbb{P}^n$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n$. Udowodnimy to później.

Istnieją rozmaitości quasi-rzutowe, które nie są ani rozmaitościami afinicznymi, ani rozmaitościami rzutowymi. Takimi rozmaitościami są np. $\mathbb{A}_0^2 \smallsetminus \{x\}$ i $\mathbb{P}^2 \smallsetminus \{x\}$, gdzie x jest punktem ([Szaf88]86 Zadania 4 i 5).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.7 Otoczenia afiniczne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Następujące stwierdzenie jest uogólnieniem Przykładu 3.6.3.

Stwierdzenie 3.7.1. *Niech $Y \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech F będzie wielomianem należącym do $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. Rozpatrzmy otwarty podzbiór D zbioru Y zdefiniowany jako*

$$D := Y \smallsetminus \mathrm{V_a}(F) = \{y \in Y;\ F(y) \neq 0\}.$$

Zbiór $D^{\square}$ jest rozmaitością afiniczną.

Dowód. Oznaczmy $U := D^{\square}$. Istnieją wielomiany $G_1, \dots, G_r \in k[T]$ takie, że

$$Y = \mathrm{V_a}(G_1, \dots, G_r).$$

Spójrzmy na te wielomiany jako na elementy pierścienia $k[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}]$ i rozpatrzmy jeszcze jeden wielomian $H \in k[T_1, \dots, T_{n+1}]$ zdefiniowany wzorem

$$H(T_1, \dots, T_n, T_{n+1}) = F(T_1, \dots, T_n)T_{n+1} - 1.$$

Wielomiany $G_1, \dots, G_r, H$ określają w przestrzeni k^{n+1} afiniczny zbiór domknięty

$$W = \mathrm{V_a}(G_1, \dots, G_r, H).$$

Niech $E = W^{\square}$. Wtedy $E = \mathrm{V_p}(G_1^{\square}, \dots, G_r^{\square}, H^{\square}) \cap \mathbb{A}_0^{n+1}$ więc $E \subseteq \mathbb{A}_0^{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{A}_0^{n+1}$. Pokażemy, że rozmaitości U i E są izomorficzne. W tym celu skonstruujemy dwie, wzajemnie odwrotne, funkcje $f : E \longrightarrow U$ i $g : U \longrightarrow E$, które będą odwzorowaniami regularnymi. Funkcję f określamy wzorem:

$$f(e_0 : \dots : e_n : e_{n+1}) = (e_0 : \dots : e_n).$$

Łatwo sprawdzić, że f jest dobrze określonym odwzorowaniem regularnym z E do U.

W definicji funkcji g wykorzystamy jednorodny wielomian $F^{\square} \in k[S_0, \dots, S_n]$. Przypomnijmy, że

$$F^{\square}(S_0, \dots, S_n) = S_0^p F\left(\tfrac{S_1}{S_0}, \dots, \tfrac{S_n}{S_0}\right), \quad \text{gdzie } p = \deg F.$$

Przy pomocy tego wielomianu definiujemy następujące wielomiany $P_0, \dots, P_{n+1}$ należące do pierścienia $k[S_0, \dots, S_n]$.

$$\begin{cases} P_0(S_0, \dots, S_n) & = & S_0 F^{\square}(S_0, \dots, S_n), \\ P_1(S_0, \dots, S_n) & = & S_1 F^{\square}(S_0, \dots, S_n), \\ & \vdots & \\ P_n(S_0, \dots, S_n) & = & S_n F^{\square}(S_0, \dots, S_n), \\ P_{n+1}(S_0, \dots, S_n) & = & S_0^{p+1}. \end{cases}$$

Wielomiany $P_0, \dots, P_{n+1}$ mają jednakowy stopień równy $p+1$. Jeśli $u \in U$, to przyjmujemy:

$$g(u) = (P_0(u) : \dots : P_{n+1}(u)).$$

Z łatwością sprawdzamy, że g jest dobrze określonym odwzorowaniem regularnym z U do E oraz, że złożenia fg, gf są tożsamościami. Zatem zbiór $U = D^{\square}$ jest rozmaitością afiniczną. ⊠

Stwierdzenie 3.7.2 ([Szaf88] 65). *Jeśli $X \subseteq \mathbb{P}^n$ jest rozmaitością quasi-rzutową, to dla każdego punktu $x \in X$ istnieje zbiór otwarty w X zawierający x, będący rozmaitością afiniczną.*

Dowód. Niech $x \in X$. Istnieje $i \in \{0, \dots, n\}$ takie, że $x \in \mathbb{A}_i^n$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $i = 0$. Zatem $x \in X \cap \mathbb{A}_0^n$.

Ponieważ X jest rozmaitością quasi-rzutową więc $X = M_1 \smallsetminus M_2$, gdzie M_1, M_2 są domkniętymi podzbiorami rzutowymi w $\mathbb{P}^n$ (Stwierdzenie 1.10.2). Ale $M_1 \smallsetminus M_2 = M_1 \smallsetminus (M_1 \cap M_2)$. Możemy więc założyć, że $M_1 \supseteq M_2$. Stąd mamy dalej:

$$X \cap \mathbb{A}_0^n = Z_1 \smallsetminus Z_2, \quad Z_1 \supseteq Z_2,$$

gdzie $Z_1 = M_1 \cap \mathbb{A}_0^n$, $Z_2 = M_2 \cap \mathbb{A}_0^n$. Zbiory Z_1, Z_2 są oczywiście domknięte w $\mathbb{A}_0^n$. Oznaczmy:

$$Y_1 = Z_{1\square}, \quad Y_2 = Z_{2\square}.$$

Ze Stwierdzenia 1.8.4 wiemy, że Y_1, Y_2 są afinicznymi podzbiorami domkniętymi afinicznej przestrzeni k^n. Oczywiście $Y_1 \supseteq Y_2$ oraz $x_\square \in Y_1 \smallsetminus Y_2$. Stąd wynika, że istnieje wielomian $F \in k[T_1, \dots, T_n]$ taki, że

$$F(x_\square) \neq 0 \text{ oraz } F(y) = 0, \text{ dla wszystkich } y \in Y_2.$$

Rozważmy domknięty podzbiór R przestrzeni k^n zdefiniowany następująco:

$$R = Y_1 \cap \mathrm{V_a}(F) = \{y \in Y_1;\ F(y) = 0\}.$$

Podzbiór ten zawarty jest w Y_1 i zawiera Y_2. Niech

$$D = Y_1 \smallsetminus R \text{ oraz } U = D^\square.$$

Wystarczy teraz udowodnić, że zbiór U spełnia następujące trzy własności:

(a) $x \in U \subseteq X$;
(b) U jest otwarte w X;
(c) U jest rozmaitością afiniczną.

Dowód własności (a). Punkt $x_\square$ należy do Y_1 oraz $F(x_\square) \neq 0$. Zatem $x_\square \in Y_1 \smallsetminus R = D$, czyli $x = (x_\square)^\square \in D^\square = U$. Ponieważ $Y_2 \subseteq R$, więc $D = Y_1 \smallsetminus R \subseteq Y_1 \smallsetminus Y_2$. Zatem

$$U = D^\square \subseteq (Y_1 \smallsetminus Y_2)^\square = Z_1 \smallsetminus Z_2 = X \cap \mathbb{A}_0^n \subseteq X.$$

Dowód własności (b). Z definicji zbioru D wynika, że zbiór ten jest otwarty w Y_1. Istnieje więc zbiór $D_0 \subset k^n$, otwarty w k^n taki, że $D = D_0 \cap Y_1$. Wtedy (Stwierdzenie 1.8.4) zbiór $(D_0)^\square$ jest otwarty w $\mathbb{A}_0^n$. Jest ponadto oczywiste, że $U \subset \mathbb{A}_0^n$ oraz $X \cap \mathbb{A}_0^n \subseteq Z_1$. Zatem:

$$\begin{aligned} U &= U \cap X \cap \mathbb{A}_0^n \\ &= (D_0 \cap Y_1)^\square \cap X \cap \mathbb{A}_0^n \\ &= (D_0)^\square \cap Z_1 \cap X \cap \mathbb{A}_0^n \\ &= ((D_0)^\square \cap \mathbb{A}_0^n) \cap X. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że U jest otwarte w X.

Dowód własności (c). Wynika to ze Stwierdzenia 3.7.1. To kończy dowód naszego stwierdzenia. ⊠

Definicja 3.7.3. Niech X będzie rozmaitością afiniczną i niech $f \in k[X]$. Wtedy zbiór

$$D(f) = X \smallsetminus \mathrm{V}_X(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$$

nazywamy *głównym zbiorem otwartym* w X.

Ze Stwierdzenia 3.7.1 wynika, że każdy główny zbiór otwarty $D(f)$ jest rozmaitością afiniczną. Łatwo wykazać, że k-algebra $k[D(f)]$, funkcji regularnych na $D(f)$, jest izomorficzna z k-algebrą $k[X][1/f]$.

Przekrój afinicznych otwartych podzbiorów jest zbiorem afinicznym ([Szaf88]86 Zad.9). Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym rozmaitości afinicznych to przeciwobraz głównego otwartego zbioru jest głównym zbiorem otwartym ([Szaf88]86 Zad.11).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.8 Własności lokalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $\{U_\alpha\}$ będzie taką rodziną jej zbiorów otwartych, że $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Załóżmy, że każdy zbiór otwarty U_α spełnia pewną ustaloną własność W. Jeśli z tego założenia wynika, że ta własność W zachodzi również dla całej przestrzeni X, to mówić będziemy, że rozpatrywana własność W jest *lokalna*. Podamy kilka przykładów takich własności.

Jeśli X i Y są przestrzeniami topologicznymi i $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, to dla każdego zbioru U, otwartego w X, funkcja $f|U : U \longrightarrow Y$ też jest ciągła. Wynika to z równości $(f|U)^{-1}(D) = f^{-1}(D) \cap U$.

Stwierdzenie 3.8.1. *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie zwykłą funkcją. Własność "f jest funkcją ciągłą" jest lokalna.*

Innymi słowy, niech $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie każde U_α jest zbiorem otwartym w X. Jeśli każda funkcja $f|U_\alpha : U_\alpha \longrightarrow Y$ jest ciągła, to $f : X \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą.

Dowód. Wynika to z równości $f^{-1}(D) = \bigcup_\alpha (f|U_\alpha)^{-1}(D)$. ⊠

Jeśli $U \subseteq X$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni topologicznej X oraz $F \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym w X, to zbiór $F \cap U$ jest oczywiście domknięty w U. Następne stwierdzenie mówi, że własność "F jest zbiorem domkniętym w X" jest lokalna.

Stwierdzenie 3.8.2. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie każde U_α jest zbiorem otwartym w X. Niech $F \subseteq X$ będzie podzbiorem. Jeśli każdy zbiór $U_\alpha \cap F$ jest domknięty w U_α, to F jest zbiorem domkniętym w X.*

Dowód. Każdy zbiór U_α jest postaci $U_\alpha = X \smallsetminus Z_\alpha$, gdzie Z_α jest zbiorem domkniętym w X. Ponieważ $F \cap U_\alpha$ jest domknięte w U_α, więc $F \cap U_\alpha = T_\alpha \cap U_\alpha$, dla pewnego zbioru $T_\alpha \subseteq X$, domkniętego w X. Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$F = \bigcap_\alpha (Z_\alpha \cup T_\alpha).$$

Z tej równości wynika, że F jest domknięte w X. ⊠

Następne stwierdzenie mówi, że własność "F jest zbiorem otwartym w X" też jest lokalna.

Stwierdzenie 3.8.3. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie każde U_α jest zbiorem otwartym w X. Niech $F \subseteq X$ będzie podzbiorem. Jeśli każdy zbiór $U_\alpha \cap F$ jest otwarty w U_α, to F jest zbiorem otwartym w X.*

Dowód. $F = F \cap X = F \cap (\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcup_\alpha (F \cap U_\alpha)$. ⊠

Powyższe przykłady dotyczyły dowolnych przestrzeni topologicznych. Teraz ograniczymy się do rozmaitości quasi-rzutowych.

Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie rozmaitością quasi-rzutową i niech $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie każde U_α jest zbiorem otwartym w X.

Niech $f : X \longrightarrow k$ będzie zwykłą funkcją. Jeśli f jest funkcją regularną, to każda funkcja $f|U_\alpha : U_\alpha \longrightarrow k$ jest regularna. Wynika to z Definicji 3.2.1. Z definicji tej wynika również, że zachodzi też odwrotnie. Własność "f jest funkcją regularną" jest lokalna. Innymi słowy:

Stwierdzenie 3.8.4. *Jeśli każda funkcja $f|U_\alpha : U_\alpha \longrightarrow k$ jest regularna, to funkcja $f : X \longrightarrow k$ jest regularna.* ⊠

Niech $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ będzie drugą rozmaitością quasi-rzutową. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie zwykłą funkcją. Jeśli f jest odwzorowaniem regularnym z X do Y, to każda funkcja $f|U_\alpha : U_\alpha \to Y$ jest odwzorowaniem regularnym. Wynika to ze Stwierdzenia 3.3.3. Z tego stwierdzenia wynika również, że zachodzi też odwrotnie. Własność "f jest odwzorowaniem regularnym" jest lokalna. Innymi słowy:

Stwierdzenie 3.8.5. *Jeśli każda funkcja $f|U_\alpha : U_\alpha \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym, to funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

3.9 Dalsze własności odwzorowań regularnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ będą rozmaitościami quasi-rzutowymi.

Stwierdzenie 3.9.1. *Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwozorowaniem regularnym i $\varphi : Y \longrightarrow k$ jest funkcją regularną, to złożenie $\varphi f : X \longrightarrow k$ jest funkcją regularną.*

Dowód. Niech $x \in X$. Ze Stwierdzenia 3.3.3 wiemy, że istnieje podzbiór $U \subseteq X$, otwarty w X i zawierający x, i istnieją jednorodne wielomiany $F_0, \dots, F_m \in k[S_0, \dots, S_n]$, tego samego stopnia takie, że

$$f(u) = (F_0(u) : \cdots : F_m(u)), \quad \text{dla wszystkich } \ u \in U.$$

Ponieważ $\varphi : Y \longrightarrow k$ jest funkcją regularną, więc (na mocy Stwierdzenia 3.2.2) istnieją jednorodne wielomiany $P, Q \in k[Z_0, \dots, Z_m]$, tego samego stopnia takie, że $Q(f(x)) \neq 0$ oraz $\varphi(y) = P(y)/Q(y)$, dla wszystkich $y \in Y$ spełniających warunek $Q(y) \neq 0$. Rozważmy dwa wielomiany A i B należące do $k[S_0, \dots, S_n]$ zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} A(S_0, \dots, S_n) &= P(F_0(S_0, \dots, S_n), \dots, F_m(S_0, \dots, S_n)), \\ B(S_0, \dots, S_n) &= Q(F_0(S_0, \dots, S_n), \dots, F_m(S_0, \dots, S_n)). \end{aligned}$$

Jest jasne, że są to jednorodne wielomiany tego samego stopnia. Ponadto, $B(x) \neq 0$ oraz $(\varphi f)(u) = A(u)/B(u)$, dla wszystkich $u \in U$ takich, że $B(u) \neq 0$. To oznacza, na mocy Stwierdzenia 3.2.2, że funkcja $\varphi f|U : U \longrightarrow k$ jest regularna.

Wykazaliśmy zatem, że dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór otwarty U w X zawierający x taki, że $\varphi f|U : U \longrightarrow k$ jest funkcją regularną. Ponieważ własność "f jest funkcją regularną" jest lokalna (Stwierdzenie 3.8.4) więc stąd wynika, że $\varphi f : X \longrightarrow k$ jest funkcją regularną. ⊠

Każdej funkcji regularnej $\varphi \in \operatorname{Reg}(Y, k)$ możemy więc przyporządkować funkcję regularną

$$f^*(\varphi) = \varphi f \in \operatorname{Reg}(X, k).$$

Z każdym zatem odwzorowaniem regularnym $f : X \longrightarrow Y$ związany jest k-algebrowy homomorfizm $f^* : \operatorname{Reg}(Y, k) \longrightarrow \operatorname{Reg}(X, k)$.

Stwierdzenie 3.9.2. *Każde odwzorowanie regularne jest ciągłe.*

Dowód. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi-rzutowych $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{P}^m$. Niech Z będzie zbiorem domkniętym w Y. Pokażemy, że zbiór $f^{-1}(Z)$ jest domknięty w X. Niech $x \in X$. Niech $f(x) \in \mathbb{A}_i^m$ i niech $V = Y \cap \mathbb{A}_i^m$. Wtedy V jest otwartym zbiorem w Y. Z definicji odwzorowania regularnego (Definicja 3.3.2) wiemy, że istnieje otoczenie otwarte $U \subseteq X$ punktu x takie, że funkcja $f|U : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{A}_i^m$ jest odwzorowaniem regularnym.

Istnieje otoczenie $U' \subseteq U$ punktu x, będące rozmaitością afiniczną (Stwierdzenie 3.7.2). Zbiór U' możemy więc utożsamić z pewnym domkniętym podzbiorem w pewnej przestrzeni afinicznej $\mathbb{A}_j^r \subseteq \mathbb{P}^r$. Funkcja $f|U' = (f|U)|U' : U' \longrightarrow V \subseteq \mathbb{A}_i^m$ jest oczywiście odwzorowanie regularnym. Jest to więc zwykłe afiniczne odwzorowanie regularne (Stwierdzenie 3.5.1). Wiemy, że afiniczne odwzorowania regularne są ciągłe. Zbiór $f^{-1}(Z) \cap U' = (f|U')^{-1}(Z \cap V)$ jest więc domknięty w U'. Teraz domkniętość zbioru $f^{-1}(Z)$ wynika z faktu (Stwierdzenie 3.8.2), że "domkniętość zbioru" jest własnością lokalną. $\boxtimes$

Stwierdzenie 3.9.3. *Jeśli $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ są odwzorowaniami regularnymi rozmaitości quasi-rzutowych, to złożenie $gf : X \longrightarrow Z$ też jest odwzorowaniem regularnym.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$, $Z \subseteq \mathbb{P}^r$. Niech $x \in X$. Ze Stwierdzenia 3.3.3 wiemy, że istnieje podzbiór otwarty $U \subseteq X$, zawierający x i istnieją jednorodne wielomiany $F_0, \dots, F_m \in k[S_0, \dots, S_n]$, tego samego stopnia takie, że $f|U = (F_0 : \cdots : F_m)$.

Podobnie dla punktu $f(x) \in Y$ i odwzorowania g. Istnieje zbiór otwarty V zawierający $f(x)$ i istnieją jednorodne wielomiany $G_0, \dots, G_r \in k[S_0', \dots, S_m']$, tego samego stopnia takie, że $g|V = (G_0 : \cdots : G_r)$.

Ponieważ $f|U : U \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym, więc (na mocy ciągłości wykazanej w Stwierdzeniu 3.9.2) zbiór $W = f^{-1}(V) \cap U = (f|U)^{-1}(V)$ jest otwartym zbiorem w X zawierającym punkt x. Wtedy

$$gf|W = (G_0(F_0, \dots, F_m) : \cdots : G_r(F_0, \dots, F_m))$$

i oczywiście wielomiany $G_0(F_0, \dots, F_m), \dots, G_r(F_0, \dots, F_m)$ są jednorodne i tego samego stopnia.

Dla każdego więc punktu $x \in X$ istnieje otwarty podzbiór W zawierający x taki, że funkcja $gf|W : W \longrightarrow Z$ jest odwzorowaniem regularnym. Teraz regularność odwzorowania $gf : X \longrightarrow Z$ wynika ze Stwierdzenia 3.8.5. $\boxtimes$

Ze Stwierdzeń 3.9.1 i 3.9.3 wynikają natychmiast następujące wnioski.

Wniosek 3.9.4.

(1) *Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ są odwzorowaniami regularnymi, to $(gf)^* = f^* g^*$.*

(2) $(1_X)^* = 1_{k[X]}$. $\boxtimes$

Wniosek 3.9.5. *Jeżeli rozmaitości quasi-rzutowe X i Y są izomorficzne, to izomorficzne są k-algebry* $\mathrm{Reg}(X, k)$ *i* $\mathrm{Reg}(Y, k)$. $\boxtimes$

Z wniosku 3.9.4 wynika, że $*$ jest funktorem kontrawariantnym z kategorii rozmaitości quasi-rzutowych nad ciałem k do kategorii przemiennych k-algebr.

4 Odwzorowania wymierne

4.1 Funkcje wymierne rozmaitości quasi-rzutowej

Rozpoczynamy od następującego prostego stwierdzenia.

Stwierdzenie 4.1.1. *Jeśli* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *jest nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową, to* $\mathrm{I_p}(X)$ *jest ideałem pierwszym.*

Dowód. $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X})$ (Stwierdzenie 1.4.4). Domknięcie $\overline{X}$ jest oczywiście rzutowym nieprzywiedlnym zbiorem domkniętym. Ideał $\mathrm{I_p}(\overline{X})$ jest więc pierwszy (Stwierdzenie 1.9.3). ⊠

Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową zawartą w $\mathbb{P}^n$. Niech $k[S] = k[S_0, \ldots, S_n]$, $k(S) = k(S_0, \ldots, S_n) = k[S]_{(0)}$. Oznaczmy:

$$\mathbb{O}_X = \{\tfrac{P}{Q} \in k(S);\ P, Q \in \mathit{Form}_k[S],\ \deg P = \deg Q,\ Q \notin \mathrm{I_p}(X)\}.$$

Zbiór $\mathbb{O}_X$ jest pierścieniem lokalnym o ideale maksymalnym:

$$\mathbb{M}_X = \{\tfrac{P}{Q} \in \mathbb{O}_X;\ P \in \mathrm{I_p}(X)\}.$$

Definicja 4.1.2. Ciało $\mathbb{O}_X/\mathbb{M}_X$ oznaczamy przez $k(X)$ i nazywamy *ciałem funkcji wymiernych na rozmaitości* X.

Każdy element należący do $k(X)$ jest postaci $\frac{P}{Q} + \mathbb{M}_X$, gdzie P i Q są jednorodnymi wielomianami tego samego stopnia należącymi do $k[S]$ przy czym $Q \notin \mathrm{I_p}(X)$.

Stwierdzenie 4.1.3.
(1) $k(X) = k(\overline{X})$.
(2) *Jeśli* U *jest niepustym zbiorem otwartym w* X*, to* $k(U) = k(X)$.

Dowód. Wynika to z równości $\mathrm{I_p}(U) = \mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X})$. ⊠

Ze stwierdzenia tego wynika, że ciało $k(X)$ wystarczy badać tylko w przypadku, gdy X jest domkniętym zbiorem rzutowym lub domkniętym zbiorem afinicznym

Stwierdzenie 4.1.4. *Jeśli* $X \subseteq \mathbb{A}^n_0$ *jest afinicznym nieprzywiedlnym zbiorem domkniętym, to ciało* $k(X)$ *jest* k*-izomorficzne z ciałem* $k(X_\square)$ *funkcji wymiernych na rozmaitości afinicznej.*

Dowód. Niech $\mathfrak{p} = \mathrm{I_a}(X_\square)$ i niech $A = \mathfrak{p}k[T]_\mathfrak{p}$. Wiemy, że $k(X_\square) = k[T]_\mathfrak{p}/A$. Każdy element z $k(X_\square)$ jest więc postaci $F/G + A$, gdzie $F, G \in k[T]$, $G \notin \mathfrak{p}$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie

$$\frac{P}{Q} + \mathbb{M}_X \stackrel{\alpha}{\longmapsto} \frac{P_\square}{Q_\square} + A$$

jest dobrze określonym k-homomorfizmem z ciała $k(X)$ do $k(X_\square)$. Jest to oczywiście odwzorowanie różnowartościowe (bo każdy homomorfizm ciał jest różnowartościowy). Pokażemy, że α jest surjekcją.

Niech $u = F/G + A \in k(X_\square)$, gdzie $F, G \in k[T]$, $G \notin \mathfrak{p}$. Jeśli $\deg F = \deg G$, to $u = \alpha(F^\square/G^\square + \mathbb{M}_X)$. Jeśli $\deg F = \deg G + p$, gdzie p jest liczbą naturalną, to wielomiany $F' = F^\square$, $G' = S_0^p G^\square$, są jednorodne, mają ten sam stopień i $G' \notin \mathrm{I_p}(X)$. Wtedy $u = \alpha(F'/G' + \mathbb{M}_X)$. Podobnie postępujemy w przypadku, gdy $\deg F < \deg G$. ⊠

W szczególności mamy: $k(\mathbb{P}^n) = k(\mathbb{A}_0^n) = k(k^n) = k(T_1, \ldots, T_n)$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.2 Odwzorowania wymierne z X do P^m

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech m będzie liczbą naturalną. Wprowadzamy następujące dwa nowe (własne) pojęcia.

Definicja 4.2.1. *Wymiernym* (X, m)*-ciągiem* nazywamy każdy ciąg $(F_0, F_1, \ldots, F_m)$ jednorodnych wielomianów z $k[S] = k[S_0, \ldots, S_n]$ tego samego stopnia, z których co najmniej jeden nie należy do ideału $\mathrm{I_p}(X)$.

Definicja 4.2.2. Mówimy, że dwa wymierne (X, m)-ciągi, $F = (F_0, \ldots, F_m)$ i $G = (G_0, \ldots, G_m)$, są *równoważne* jeśli każdy wielomian postaci $F_iG_j - F_jG_i$, dla $i, j \in \{0, \ldots, m\}$, należy do ideału $\mathrm{I_p}(X)$. Piszemy wtedy $F \sim G$.

Lemat 4.2.3. *Równoważność wymiernych (X, m)-ciągów jest relacją typu równoważności w zbiorze wszystkich wymiernych (X, m)-ciągów.*

Dowód. Sprawdźmy przechodniość. Niech $F = (F_0, \ldots, F_m)$, $G = (G_0, \ldots, G_m)$ i $H = (H_0, \ldots, H_m)$ będą wymiernymi (X, m)-ciągami takimi, że $F \sim G$ i $G \sim H$. Niech $i, j, p \in \{0, \ldots, m\}$. Załóżmy, że $G_p \notin \mathrm{I_p}(X)$. Mamy wtedy:

$$F_iH_jG_p \equiv F_pH_jG_i \equiv F_pH_iG_j \equiv F_jH_iG_p \pmod{\mathrm{I_p}(X)},$$

czyli $(F_iH_j - F_jH_i)G_p \in \mathrm{I_p}(X)$. Ale $G_p \notin \mathrm{I_p}(X)$ i $\mathrm{I_p}(X)$ jest ideałem pierwszym. Zatem $F_iH_j - F_jH_i \in \mathrm{I_p}(X)$, czyli $F \sim H$. ⊠

Definicja 4.2.4. Klasę abstrakcji wymiernego (X, m)-ciągu $F = (F_0, \ldots, F_m)$ względem relacji $\sim$ oznaczamy przez $[F]$ i nazywamy *odwzorowaniem wymiernym z X do $\mathbb{P}^m$*.

Jeśli $F = (F_0, \ldots, F_m)$ jest wymiernym (X, m)-ciągiem, to przez $\mathrm{V_p}(F)$ oznaczmy domknięty zbiór rzutowy w $\mathbb{P}^n$ określony przez wielomiany $F_0, \ldots, F_m$ tzn.,

$$\mathrm{V_p}(F) = \mathrm{V_p}(F_0, \ldots, F_m).$$

Definicja 4.2.5. *Dziedziną odwzorowania wymiernego $[F]$ z X do $\mathbb{P}^m$* nazywamy zbiór $D_{[F]}$ zdefiniowany następująco:

$$D_{[F]} = \bigcup_{G \in [F]} X \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(G)) = X \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \bigcap_{G \in [F]} \mathrm{V_p}(G)).$$

Zauważmy, że powyższa definicja dziedziny jest poprawna; nie zależy od wyboru wymiernego (X, m)-ciągu F. Jeśli $F \sim G$, to $[F] = [G]$ oraz $D_{[F]} = D_{[G]}$.

Stwierdzenie 4.2.6. *Dziedzina $D_{[F]}$ jest niepustym i otwartym podzbiorem w X.*

Dowód. Z definicji wymiernego (X, m)-ciągu $F = (F_0, \dots, F_m)$ wiemy, że co najmniej jeden z wielomianów $F_0, \dots, F_m$, powiedzmy F_0, nie należy do ideału $\mathrm{I_p}(X)$. Oznacza to, że istnieje $x \in X$ takie, że $x \notin \mathrm{V_p}(F_0) \supseteq \mathrm{V_p}(F_0, \dots, F_m) = \mathrm{V_p}(F)$, czyli $x \notin \mathrm{V_p}(F)$. Zbiór $X \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(F))$ nie jest więc pusty. Zatem $D_{[F]} \neq \emptyset$. Otwartość zbioru $D_{[F]}$ wynika z Definicji 4.2.5. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.3 Odwzorowania wymierne jako funkcje częściowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech, tak jak w poprzednim podrozdziale, $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech m będzie liczbą naturalną.

Lemat 4.3.1. *Niech G, H będą (X, m)-ciągami i niech $x \in X$. Jeżeli $G \sim H$ oraz ciągi $(G_0(x), \dots, G_m(x))$, $(H_0(x), \dots, H_m(x))$ nie są zerowe, to*

$$(G_0(x) : \dots : G_m(x)) = (H_0(x) : \dots : H_m(x)).$$

Dowód. Załóżmy, że $G_p(x) \neq 0$, $H_q(x) \neq 0$. Wtedy $G_q(x)H_p(x) = G_p(x)H_q(x) \neq 0$ więc $G_q(x) \neq 0$ i mamy:

$$\begin{aligned}(G_0(x) : \dots : G_m(x)) &= (H_q(x)G_0(x) : \dots : H_q(x)G_m(x)) \\ &= (H_0(x)G_q(x) : \dots : H_m(x)G_q(x)) \\ &= (H_0(x) : \dots : H_m(x)). \boxtimes\end{aligned}$$

Niech $[F]$ będzie odwzorowaniem wymiernym z X do $\mathbb{P}^m$ i niech $x \in D_{[F]}$. Z definicji zbioru $D_{[F]}$ wynika, że istnieje (X, m)-ciąg $G \in [F]$ taki, że $x \notin \mathrm{V_p}(G)$. Ciąg $(G_0(x), \dots, G_m(x))$ nie jest wtedy ciągiem zerowym. Istnieje zatem punkt $(G_0(x) : \dots : G_m(x))$ należący do $\mathbb{P}^m$. Punkt ten (na mocy powyższego lematu) nie zależy od wyboru ciągu G należącego do $[F]$. Definiujemy zatem element $[F](x) \in \mathbb{P}^m$, zwany *wartością odwzorowania wymiernego* $[F]$ *w punkcie* $x \in D_{[F]}$, przyjmując

$$[F](x) = (G_0(x) : \dots : G_m(x)),$$

gdzie G jest takie, jak powyżej.

W ten sposób każde odwzorowanie wymierne $[F]$ z X do $\mathbb{P}^m$ staje się funkcją częściową $[F] : X \xrightarrow{\circ} \mathbb{P}^m$, której dziedziną jest zbiór $D_{[F]}$.

Stwierdzenie 4.3.2. *Niech F, G będą (X, m)-ciągami. Jeśli istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $U \subseteq D_{[F]} \cap D_{[G]}$ oraz $[F] \mid U = [G] \mid U$, to $[F] = [G]$.*

Dowód. Ponieważ $U \neq \emptyset$ więc istnieje $u \in U$. Wtedy $u \in D_{[F]}$ oraz $u \in D_{[G]}$. Istnieją zatem jednorodne wielomiany $F' \in [F]$, $G' \in [G]$ takie, że $u \notin \mathrm{V_p}(F')$, $u \notin \mathrm{V_p}(G')$. Niech $U_1 = X \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(F'))$, $U_2 = X \cap (\mathbb{P}^n \smallsetminus \mathrm{V_p}(G'))$. Zbiory U_1, U_2 są otwarte w X i zawierają punkt u. Zatem $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$ jest niepustym i otwartym podzbiorem w X zawartym w U. Dla wszystkich $y \in U_0$ ciągi $(F'_0(y), \dots, F'_m(y))$, $(G'_0(y), \dots, G'_m(y)$ są oczywiście niezerowe i

$$(G'_0(y) : \dots : G'_m(y)) = (F'_0(y) : \dots : F'_m(y)),$$

ponieważ $[F] \mid U_0 = [G] \mid U_0$. Dla każdego więc $y \in U_0$ istnieje $a_y \in k \smallsetminus \{0\}$ takie, że

$$F'_i(y) = a_y G'_i(y), \quad \text{dla } i = 0, \dots, m.$$

Wtedy, dla wszystkich $i, j \in \{0, \dots, m\}$ mamy:

$$F'_i(y)G'_j(y) - F'_j(y)G'_i(y) = a_y G'_i(y)G'_j(y) - a_y G'_j(y)G'_i(y) = 0,$$

czyli $F_i'G_j' - F_j'G_i' \in \mathrm{I_p}(U_0) = \mathrm{I_p}(X)$. To oznacza, że $F' \sim G'$. Zatem $[F] = [F'] = [G'] = [G]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.4 Związek z odwzorowaniami regularnymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Definicja odwzorowania wymiernego jest podobna do definicji odzworowania regularnego (patrz Stwierdzenie 3.3.3). Spójrzmy jeszcze raz na Przykład 3.4.4 i przedstawmy go w następujący, nieco inny, sposób.

Przykład 4.4.1. Niech $X = \mathrm{V_p}(S_1^2 + S_2^2 - S_0^2) \cap \mathbb{A}_0^2$, gdzie $\mathrm{char}(k) \neq 2$ i niech $m = 1$. Rozpatrzmy wielomiany

$$F_0 = S_1 - S_0, \quad F_1 = S_2.$$

Ze Stwierdzenia 1.5.12 oraz z rzutowego twierdzenia Hilberta o zerach wynika, że

$$\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\overline{X}) = \mathrm{I_p}\mathrm{V_p}((S_1^2 + S_2^2 - S_0^2)) = (S_1^2 + S_2^2 - S_0^2).$$

Widzimy więc, że $F_0 \notin \mathrm{I_p}(X)$ (tę samą własność ma wielomian F_1, ale to nie jest tutaj istotne). Zatem $F = (F_0, F_1)$ jest $(X, 1)$-ciągiem. Mamy więc odwzorowanie wymierne $[F]$ z X do $\mathbb{P}^1$. Spójrzmy na to odwzorowanie jako na funkcję częściową z X do $\mathbb{P}^1$. W tym celu zbadajmy najpierw dziedzinę $D_{[F]}$. Niech $x = (x_0 : x_1 : x_2) \in X$. Wtedy $x_0 \neq 0$ oraz $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$. Jest oczywiste, że jesśli $x_0 \neq x_1$, to ciąg $(F_(x), F_1(x))$ jest niezerowy. Każdy więc punkt $x \in X$ z warunkiem $x_0 \neq x_1$ należy do zbioru $D_{[F]}$. Podobnie, gdy $x_2 \neq 0$. Takie punkty też należą do $D_{[F]}$. Zostaje tylko jeden punkt należący do X, o którym jeszcze nie wiemy, czy należy do $D_{[F]}$. Punktem tym jest $a = (1 : 1 : 0)$. Niech $G = (G_0, G_1)$, gdzie

$$G_0 = -S_2, \quad G_1 = S_1 + S_0.$$

Ponieważ $G_0 \notin \mathrm{I_p}(X)$, więc G jest $(X, 1)$-ciągiem. Ponadto $G \sim F$. Istotnie,

$$F_0G_1 - F_1G_0 = (S_1 - S_0)(S_1 + S_0) + S_2^2 = S_1^2 + S_2^2 - S_0^2 \in \mathrm{I_p}(X).$$

Zatem $[F] = [G]$. Ciąg $(G_0(a), G_1(a)) = (0, 2)$ jest niezerowy, więc punkt a również należy do $D_{[F]}$.

Wykazaliśmy, że $D_{[F]} = X$. Odwzorowanie wymierne $[F]$ jest więc zwykłą funkcją (tzn. nie częściową) z X do $\mathbb{P}^1$. Jest to dokładnie ta sama funkcja, która badana była w Przykładzie 3.4.4. Zatem $[F]$ jest odwzorowaniem regularnym z X do $\mathbb{P}^1$. ⊠

Ze Stwierdzenia 3.3.3 oraz z definicji podanych w tym podrozdziale wynika:

Stwierdzenie 4.4.2. *Niech* $[F] : X \underset{\circ}{\longrightarrow} \mathbb{P}^m$ *będzie odwzorowaniem wymiernym. Następujące warunki są równoważne.*

(1) $[F]$ *jest odwzorowaniem regularnym z* X *do* $\mathbb{P}^m$.

(2) $D_{[F]} = X$. ⊠

W szczególności każde odwzorowanie regularne z X do $\mathbb{P}^m$ jest odwzorowaniem wymiernym. Poniższy przykład pokazuje, że stwierdzenie odwrotne na ogół nie zachodzi.

Przykład 4.4.3. Niech $X = \mathbb{P}^2$ i niech

$$F_0 = S_1S_2, \quad F_1 = S_0S_2, \quad F_2 = S_0S_1.$$

Wtedy $\mathrm{I_p}(X) = \mathrm{I_p}(\mathbb{P}^2) = 0$, więc $F = (F_0, F_1, F_2)$ jest $(\mathbb{P}^2, 2)$-ciągiem (tutaj nawet każdy wielomian F_0, F_1, F_2 nie należy do $\mathrm{I_p}(X)$). Mamy zatem odwzorowanie wymierne $[F] : \mathbb{P}^2 \xrightarrow[\circ]{} \mathbb{P}^2$. Pokażemy, że odwzorowanie to nie jest regularne.

Przypuśćmy, że jest. Wtedy $D_{[F]} = \mathbb{P}^2$, a zatem w szczególności punkt $a = (0 : 0 : 1)$ należy do $D_{[F]}$. Istnieje więc $(\mathbb{P}^2, 2)$-ciąg $G = (G_0, G_1, G_2)$ taki, że $G \sim F$ oraz

$$(G_0(a), G_1(a), G_2(a)) \neq (0, 0, 0).$$

Mamy wtedy równości:

$$\begin{array}{ccccccc} G_0S_0S_2 & = & G_0F_1 & = & G_1F_0 & = & G_1S_1S_2 \\ G_0S_0S_1 & = & G_0F_2 & = & G_2F_0 & = & G_2S_1S_2, \end{array}$$

z których wynika, że $S_1 \mid G_0$, $S_0 \mid G_1$ oraz $S_0 \mid G_2$. To implikuje, że $(G_0(a), G_1(a), G_2(a)) = (0, 0, 0)$, co jest sprzecznością. ⊠

Stwierdzenie 4.4.4. *Niech U będzie niepustym i otwartym podzbiorem w X. Jeśli $f : U \longrightarrow \mathbb{P}^m$ jest odwzorowaniem regularnym, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie wymierne $[F]$ z X do $\mathbb{P}^m$ takie, że $U \subseteq D_{[F]}$ oraz $f = [F] \mid U$.*

Dowód. Niech $x \in U$. Wtedy (na mocy Stwierdzenia 3.3.3) istnieje zbiór otwarty $U_x \subset U$ zawierający x i istnieją jednorodne wielomiany $F_0, \dots, F_m \in k[S] = k[S_0, \dots, n]$ tego samego stopnia takie, że

$$f(y) = (F_0(y) : \dots : F_m(y)), \quad \text{dla wszystkich } y \in U_x.$$

Stąd wynika, że co najmniej jeden z wielomianów $F_0, \dots, F_m$ nie należy do ideału $\mathrm{I_p}(U_x) = \mathrm{I_p}(X)$. Dla każdego więc $x \in U$ mamy (X, m)-ciąg $F_x = (F_0, \dots, F_m)$ taki, że $U_x \subseteq D_{[F_x]}$ oraz $[F_x] \mid U_x = f \mid U_x$. Jeśli $x, y \in U$, to $U_x \subseteq D_{[F_x]}$, $U_y \subseteq D_{[F_y]}$ oraz

$$[F_x] \mid (U_x \cap U_y) = f \mid (U_x \cap U_y) = [F_y] \mid (U_x \cap U_y).$$

Ustalmy jedno $x \in X$ i niech $F = F_x$. Ze Stwierdzenia 4.3.2 (i powyższych równości) wynika, że $[F] = [F_y]$, dla wszystkich $y \in U$. Zatem $U \subseteq D_{[F]}$ oraz $f = [F] \mid U$. Jednoznaczność jest konsekwencją Stwierdzenia 4.3.2. ⊠

Zanotujmy jeszcze następującą konsekwencję Stwierdzenia 3.3.3.

Wniosek 4.4.5. *Jeśli $[F]$ jest odwzorowaniem wymiernym z X do $\mathbb{P}^m$, to zwykła funkcja*

$$[F] \mid D_{[F]} : D_{[F]} \longrightarrow \mathbb{P}^m$$

jest odwzorowaniem regularnym z $D_{[F]}$ do $\mathbb{P}^m$. ⊠

Stąd i ze Stwierdzenia 3.9.2 otrzymujemy:

Wniosek 4.4.6. *Jeśli $[F]$ jest odwzorowaniem wymiernym z X do $\mathbb{P}^m$, to $[F] \mid D_{[F]}$ jest funkcją ciągłą.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.5 Odwzorowania wymierne z X do Y

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Załóżmy, że $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ są nieprzywiedlnymi rozmaitościami quasi-rzutowymi.

Definicja 4.5.1. Niech $[F]$ będzie odwzorowaniem wymiernym z X do $\mathbb{P}^m$. Mówimy, że $[F]$ jest *odwzorowaniem wymiernym z X do Y* jeśli istnieje niepusty zbiór otwarty U w X taki, że $U \subseteq D_{[F]}$ oraz $[F](U) \subseteq Y$.

Z tego, że istnieje niepusty zbiór otwarty U, taki jak w powyższej definicji, nie wynika, że każdy zbiór otwarty U' zawarty w $D_{[F]}$ ma własność $[F](U') \subseteq Y$.

Przykład 4.5.2. Niech $X = \mathrm{V_p}(S_1^2 + S_2^2 - S_0^2) \cap \mathbb{A}_0^2$, gdzie $\mathrm{char}(k) \neq 2$ i niech $m = 1$ (patrz Przykład 4.4.1). Niech $F = (F_0, F_1)$, gdzie

$$F_0 = S_1 - S_0, \quad F_1 = S_2.$$

Wiemy, że $D_{[F]} = X$. Rozpatrzmy (nieprzywiedlną) rozmaitość quasi-rzutową $Y = A_0^1$. Niech $U = X \cap (\mathbb{P}^2 \smallsetminus \mathrm{V_p}(S_1 - S_0))$. Wtedy U jest oczywiście zbiorem otwartym w $X = D_{[F]}$. Jest to zbiór niepusty, bo $(5:3:4) \in U$. Jeśli $x \in U$, to $F_0(x) \neq 0$, więc $[F](U) \subseteq Y$.

Zbiorem otwartym zawartym w $D_{[F]}$ jest również zbiór $U' = X \cap (\mathbb{P}^2 \smallsetminus \mathrm{V_p}(S_0 + S_1))$. Ten zbiór też jest niepusty gdyż $a = (1:1:0) \in U'$. Z Przykładu 4.4.1 wiemy, że $[F](a) = (0:2)$. Zatem $[F](a) \notin Y$, a więc zbiór $[F](U')$ nie jest zawarty w Y. ⊠

Niech $[F]$ będzie odwzorowaniem wymiernym z X do Y. Z powyższego przykładu wynika, że zbiór $[F](D_{[F]})$ nie musi być podzbiorem zbioru Y. Sumę mnogościową $\tilde{U}$, wszystkich zbiorów otwartych $U \subseteq X$ takich, że $U \subseteq D_{[F]}$ oraz $[F](U) \subseteq Y$, nazywamy *dziedziną regularności odwzorowania* $[F]$. $\tilde{U}$ jest niepustym i otwartym podzbiorem w X. Zbiór $[F](\tilde{U})$ nazywamy *obrazem* odwzorowania $[F]$.

Tak jak w przypadku afinicznym, jeśli obraz wymiernego odwzorowania $[F]$ z X do Y jest zbiorem gęstym w Y, to określony jest k-homomorfizm ciał $F^* : k(Y) \longrightarrow k(X)$. Jeśli odwzorowanie wymierne $[F]$ (z X do Y) posiada odwrotne odwzorowanie wymierne, to $[F]$ nazywamy *biwymiernym izomorfizmem.* Mówimy wtedy, że rozmaitości quasi-rzutowe X i Y są *biwymiernie izomorficzne.* W tym przypadku włożenie $F^* : k(Y) \longrightarrow k(X)$ jest k-izomorfizmem ciał. Można udowodnić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.5.3 ([Szaf88]69). *Jeśli X i Y są nieprzywiedlnymi rozmaitościami quasi-rzutowymi, to następujące warunki są równoważne.*

(1) *Rozmaitości X i Y są biwymiernie izomorficzne.*

(2) *Istnieją otwarte zbiory U w X oraz U' w Y, które są regularnie izomorficzne.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

4.6 Odwzorowanie Veronese

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech n, m będą liczbami naturalnymi i niech

$$d_{n,m} = \binom{n+m}{m} - 1.$$

Podamy przykład różnowartościowego odwzorowania regularnego $\nu_m : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{d_{n,m}}$ takiego, że:

(a) obraz $\nu_m(\mathbb{P}^n)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$,

(b) odwzorowanie odwrotne, z $\nu_m(\mathbb{P}^n)$ do $\mathbb{P}^n$, jest regularne.

Przed zdefiniowaniem tego odwzorowania oznaczmy przez $\mathbb{L}(n,m)$ zbiór wszystkich ciągów $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = m$. Dobrze wiadomo, że zbiór ten ma dokładnie $d_{n,m} + 1 = \binom{n+m}{m}$ elementów. Współrzędne jednorodne punktów przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$ możemy zatem indeksować elementami zbioru $\mathbb{L}(n,m)$. Każdy więc punkt $u \in \mathbb{P}^{d_{n,m}}$ jest klasą abstrakcji niezerowego ciągu $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{L}(n,m)}$ elementów z k.

Każdemu ciągowi $\alpha \in \mathbb{L}(n,m)$ odpowiada dokładnie jeden jednomian $F_\alpha \in k[S_0, \dots, S_n]$ stopnia m zdefiniowany wzorem:

$$F_\alpha = S_0^{\alpha_0} \cdots S_n^{\alpha_n}.$$

Wielomiany postaci F_α są oczywiście niezerowe. Nie należą więc do ideału $\mathrm{I_p}(\mathbb{P}^n) = 0$. Mamy zatem wymierny $(\mathbb{P}^n, d_{n,m})$-ciąg

$$F = (F_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{L}(n,m)},$$

który określa odwzorowanie wymierne $[F]$ z $\mathbb{P}^n$ do $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$. Odwzorowanie to oznaczać będziemy przez ν_m i nazywać *odwzorowaniem Veronese.*

Ponieważ w zbiorze $\{F_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{L}(n,m)\}$ są wszystkie jednomiany $S_0^m, S_1^m, \dots, S_n^m$, więc ciąg $(F_\alpha(x))$ jest niezerowy, dla każdego $x \in \mathbb{P}^n$. Oznacza to, że dziedziną odwzorowania Veronese ν_m jest cały zbiór $\mathbb{P}^n$. Zatem $\nu_m : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{d_{n,m}}$ jest odwzorowaniem regularnym.

Stwierdzenie 4.6.1. (1) *Odwzorowanie ν_m jest różnowartościowe.*

(2) *Obraz $\nu_m(\mathbb{P}^n)$ jest rzutowym zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$. Dokładniej:*

$$\nu_m(\mathbb{P}^n) = \mathrm{V_p}(A),$$

gdzie A jest jednorodnym ideałem w $k[Z] = k[Z_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{L}(n,m)]$ generowanym przez wszystkie wielomiany postaci

$$Z_\alpha Z_\beta - Z_\gamma Z_\delta, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{L}(n,m), \quad \alpha + \beta = \gamma + \delta. \tag{4.1}$$

(3) *Odwzorowanie odwrotne $\nu_m(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ jest regularne.*

Dowód. (1). Załóżmy, że $a = (a_0 : \cdots : a_n), b = (b_0 : \cdots : b_n) \in \mathbb{P}^n$ i $\nu_m(a) = \nu_m(b)$. Istnieje wtedy $p \in k \smallsetminus \{0\}$ takie, że $F_\alpha(a) = pF_\alpha(b)$, dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{L}(n,m)$. W szczególności $a_i^m = pb_i^m$, dla $i = 0, \dots, n$. Co najmniej jeden z elementów $a_0, \dots, a_n$ jest niezerowy. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $a_0 \neq 0$. Wtedy $b_0 \neq 0$, gdyż $b_0^m = p^{-1}a_0^m \neq 0$. Istnieje zatem $q \in k \smallsetminus \{0\}$ takie, że $a_0 = qb_0$. Pokażemy, że $a_i = qb_i$, dla wszystkich $i = 0, \dots, n$. Istotnie:

$$a_i = \frac{a_i a_0^{m-1}}{a_0^{m-1}} = \frac{pb_i b_0^{m-1}}{a_0^{m-1}} = \frac{a_0^m b_i b_0^{m-1}}{b_0^m a_0^{m-1}} = \frac{a_0 b_i}{b_0} = qb_i.$$

Zatem $a = (a_0 : \cdots : a_n) = (qb_0 : \cdots : qb_n) = (b_0 : \cdots : b_n) = b$.

(2). Niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{L}(n,m)$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Wtedy $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i + \delta_i$, dla wszystkich $i = 0, \dots, n$. Niech $a \in \mathbb{P}^n$. Mamy wtedy:

$$F_\alpha(a)F_\beta(a) - F_\gamma(a)F_\delta(a) = a^\alpha a^\beta - a^\gamma a^\delta = a^{\alpha+\beta} - a^{\gamma+\delta} = 0,$$

gdzie przez a^α oznaczyliśmy element $a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n}$ i podobnie dla $a^\beta, a^\gamma, a^\delta$. Każdy więc element postaci $\nu_m(a) = [F](a)$, $a \in \mathbb{P}^n$, należy do zbioru $\mathrm{V_p}(A)$. Zatem $\nu_m(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathrm{V_p}(A)$.

Załóżmy teraz, że $u \in \mathbb{P}^{d_{n,m}}$ jest punktem należącym do $\mathrm{V_p}(A)$. Niech $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{L}(n,m)}$ będzie ciągiem jednorodnych współrzędnych punktu u. Co najmniej jeden z elementów postaci u_α jest oczywiście różny od zera. Ponieważ punkt u jest zerem każdego wielomianu postaci (4.1), więc nie jest trudno zauważyć, że co najmniej jeden z elementów

$$u_{(m,0,\dots,0)},\ u_{(0,m,\dots,0)},\ \dots,\ u_{(0,0,\dots,m)}$$

jest różny od zera. Dla ustalenia uwagi niech $u_{(m,0,\dots,0)} \neq 0$. Przyjmujemy wtedy:

$$a_0 = u_{(m,0,0,\dots,0)},\ a_1 = u_{(m-1,1,0,\dots,0)},\ a_2 = u_{(m-1,0,1,\dots,0)},\ \dots,\ a_n = u_{(m-1,0,0,\dots,1)}.$$

Łatwo sprawdzić, że wtedy $u = \nu_m(a)$, gdzie $a = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$. Zatem $\mathrm{V_p}(A) \subseteq \nu_m(\mathbb{P}^n)$.

(3). Regularność odwzorowania odwrotnego $\mu : \nu_m(\mathbb{P}^n) = \mathrm{V_p}(A) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ wynika z dowodu własności (2). Odwzorowanie μ obcięte do zbioru postaci $\mathrm{V_p}(A) \cap \mathbb{A}_\alpha^{d_{n,m}}$ jest bowiem odpowiednim rzutowaniem. ⊠

Przykład 4.6.2. Powtórzmy dowód własności (2) powyższego stwierdzenia w przypadku, gdy $n = 1, m = 2$.

Mamy tutaj $d_{1,2} = 3 - 1 = 2$ oraz $\mathbb{L}(1,2) = \{20, 02, 11\}$. Odwzorowanie $\nu_2 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ określone jest przy pomocy jednomianów

$$F_{20} = S_0^2, \quad F_{02} = S_1^2, \quad F_{11} = S_0 S_1.$$

Jeśli $a = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1$, to $\nu_2(a) = (a_0^2 : a_1^2 : a_0 a_1)$. Jest tylko jeden wielomian w $k[Z_{20}, Z_{02}, Z_{11}]$ postaci (4.1), mianowicie $G = Z_{20}Z_{02} - Z_{11}Z_{11}$. Niech $u = (u_{20} : u_{02} : u_{11}) \in \mathrm{V_p}(A) = \mathrm{V_p}(G)$. Wtedy $u_{20}u_{02} = u_{11}^2$. Jeśli $u_{20} = u_{02} = 0$, to $u_{11} = 0$ wbrew temu, że co najmniej jeden z elementów u_{20}, u_{02}, u_{11} jest niezerowy. Zatem $u_{20} \neq 0$ lub $u_{02} \neq 0$. Dla ustalenia uwagi niech $u_{20} \neq 0$ (jeśli $u_{02} \neq 0$, to postępujemy podobnie). Przyjmując $a_0 = u_{20}$, $a_1 = u_{11}$ i $a = (a_0 : a_1)$ mamy:

$$\begin{aligned} \nu_2(a) &= (a_0^2 : a_1^2 : a_0 a_1) = (u_{20}^2 : u_{11}^2 : u_{20}u_{11}) \\ &= (u_{20}u_{20} : u_{20}u_{02} : u_{20}u_{11}) = (u_{20} : u_{02} : u_{11}) = u. \end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że $\mathrm{V_p}(A) \subseteq \nu_2(\mathbb{P}^1)$. Inkluzja w przeciwnym kierunku jest oczywista. ⊠

Hiperpłaszczyzną w $\mathbb{P}^n$ nazywamy każdy rzutowy zbiór domknięty w $\mathbb{P}^n$ określony przez jedną liniową formę.

Niech $G = \sum_{\alpha \in \mathbb{L}(n,m)} a_\alpha S^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{L}(n,m)} a_{\alpha_0 \dots \alpha_n} S_0^{\alpha_0} \cdots S_n^{\alpha_n}$ będzie dowolnym wielomianem jednorodnym w $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ stopnia m i niech $X = \mathrm{V_p}(G)$ będzie domkniętym zbiorem rzutowym w $\mathbb{P}^n$ określonym przez formę G. Wtedy zbiór $\nu_m(X)$ jest przekrojem zbioru $\nu_m(\mathbb{P}^n)$ z hiperpłaszczyzną w $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$ określoną przez liniową formę $\sum_\alpha a_\alpha Z_\alpha$. Odwzorowanie Veronese pozwala więc w pewnych przypadkach problemy dotyczące rzutowych hiperpowierzchni redukować do problemów rzutowych hiperpłaszczyzn.

Obraz odwzorowania Veronese $\nu_m(\mathbb{P}^1)$ w $\mathbb{P}^m$ nazywamy *krzywą Veronese.*

Uwaga 4.6.3 ([Szaf88]72 Zad.10)**.** Obraz $\nu_m(\mathbb{P}^n)$ nie jest zawarty w żadnej hiperpłaszczyźnie przestrzeni $\mathbb{P}^{d_{n,m}}$. ⊠

Uwaga 4.6.4 ([Szaf88]72 Zad.11)**.** *Stosując odwzorowanie Veronese można udowodnić, że rozmaitość quasi-rzutowa* $\mathbb{P}^2 \setminus X$*, gdzie* X *jest krzywą stopnia* 2*, jest rozmaitością afiniczną.* ⊠

5 Produkty rozmaitości

Niech X i Y będą rozmaitościami quasi-rzutowymi. Zdefiniujemy produkt $X \times Y$ tych rozmaitości w ten sposób, że będzie to produkt w sensie kategoryjnym. Podamy pewne zastosowania produktów.

5.1 Produkt podrozmaitości przestrzeni afinicznych

Wiemy już co to jest produkt $X \times Y$ w przypadku, gdy X i Y są afinicznymi zbiorami domkniętymi. W szczególności produktem przestrzeni afinicznych k^n i k^m jest iloczyn kartezjański $k^n \times k^m = k^{n+m}$.

Stwierdzenie 5.1.1. *Jeśli X i Y są rozmaitościami quasi-rzutowymi takimi, że $X \subseteq \mathbb{A}_0^n$ i $Y \subseteq \mathbb{A}_0^m$, to iloczyn kartezjański $X \times Y$ jest rozmaitością quasi-rzutową zawartą w $\mathbb{A}_0^{n+m}$.*

Dowód. Niech $X = X_1 \smallsetminus X_0$, $Y = Y_1 \smallsetminus Y_0$, gdzie X_1, X_0 i Y_1, Y_0 są zbiorami domkniętymi odpowiednio w $\mathbb{A}_0^n$ i $\mathbb{A}_0^m$. Wtedy

$$X \times Y = X_1 \times Y_1 \smallsetminus (X_1 \times Y_0 \cup X_0 \times Y_1).$$

Stąd wynika, że $X \times Y$ jest rozmaitością quasi-rzutową. ⊠

Stwierdzenie 5.1.2. *Niech X, X', Y, Y' będą rozmaitościami quasi-rzutowymi takimi, że $X \subseteq \mathbb{A}_0^n$, $X' \subseteq \mathbb{A}_0^p$, $Y \subseteq \mathbb{A}_0^m$ oraz $Y' \subseteq \mathbb{A}_0^q$. Jeśli rozmaitości X i X' oraz Y i Y' są regularnie izomorficzne, to rozmaitości $X \times Y$ i $X' \times Y'$ też są regularnie izomorficzne.*

Dowód. Niech $\alpha : X \longrightarrow X'$, $\beta : Y \longrightarrow Y'$ będą regularnymi izomorfizmami. Wtedy odwzorowanie

$$(\alpha \times \beta) : X \times Y \longrightarrow X' \times Y', \quad (x, y) \longmapsto (\alpha(x), \alpha(y))$$

jest regularnym izomorfizmem. Odwzorowaniem odwrotnym jest $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$. ⊠

5.2 Zanurzenie Segrego

Gdy $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ są dowolnymi rozmaitościami quasi-rzutowymi, to z określeniem ich produktu jest pewien kłopot. Gdyby iloczyn kartezjański $X \times Y$ był tym produktem, to musiałby być rozmaitością quasi-rzutową, więc w szczególności musiałby być podzbiorem pewnej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N$. Nie jest to jasne nawet w przypadku, gdy $X = \mathbb{P}^n$ i $Y = \mathbb{P}^m$. W tym celu wprowadzimy, dla

$$N = (n + 1)(m + 1) - 1,$$

pewne "dobre" zanurzenie

$$\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

takie, że $\varphi(X \times Y)$ będzie rozmaitością quasi-rzutową w $\mathbb{P}^N$. Odwzorowanie to nazywać będziemy *zanurzeniem Segrego*. Definiujemy je następująco:

$$\varphi((a_0 : \cdots : a_n), (b_0 : \cdots : b_m)) = (a_0b_0 : a_0b_1 : \cdots : a_ib_j : \cdots : a_nb_m),$$

dla wszystkich $(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ i $(b_0 : \cdots : b_m) \in \mathbb{P}^m$. Jest to dobrze określona funkcja posiadająca następujące własności (których nie będziemy dowodzić).

Stwierdzenie 5.2.1 ([Szaf88]73)**.**

(1) *φ jest różnowartościowe.*

(2) *$\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ jest rzutowym zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^N$.*

(3) *$\varphi(\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m)$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{P}^N$.*

(4) *$\varphi| : \mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m \longrightarrow \varphi(\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m)$ jest regularnym izomorfizmem.* ⊠

Zanotujmy, że $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ jest zbiorem zer wielomianów jednorodnych, z pierścienia wielomianów $k[S_{ij};\ i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m]$, postaci $S_{ij}S_{kl} - S_{kj}S_{il}$, gdzie $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ oraz $j, l \in \{0, \ldots, m\}$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.3 Produkt rozmaitości quasi-rzutowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przy pomocy zanurzenia Segrego można iloczynowi kartezjańskiemu $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ nadać strukturę rozmaitości quasi-rzutowej z dokładnością do regularnego izomorfizmu. Zrobimy to ogólniej dla $X \times Y$, gdzie X i Y są rozmaitościami quasi-rzutowymi. Wystarczy mieć funkcję $X \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^T$ spełniającą pewne warunki.

Definicja 5.3.1. Niech X i Y będą rozmaitościami quasi-rzutowymi i niech $X \times Y$ będzie ich iloczynem kartezjańskim. *γ-Funkcją tych rozmaitości* nazywamy każdą różnowartościową funkcję $R : X \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^T$, gdzie T jest liczbą naturalną, spełniającą następujące dwa warunki.

(1) $R(X \times Y)$ jest rozmaitością quasi-rzutową.

(2) Dla każdych $x \in X$, $y \in Y$ istnieją otwarte otoczenia afiniczne $x \in U \subseteq X$, $y \in V \subseteq Y$ takie, że:

(*a*) Zbiór $R(U \times V)$ jest otwarty w $R(X \times Y)$,

(*b*) $R| : U \times V \longrightarrow R(U \times V)$ jest regularnym izomorfizmem.

Można wykazać, że zanurzenie Segrego $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$, gdzie $N = (n+1)(m+1) - 1$, jest γ-funkcją rozmaitości $\mathbb{P}^n$ i $\mathbb{P}^m$. Jeśli $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ są rozmaitościami quasi-rzutowymi, to $\varphi| : X \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^N$, gdzie φ jest powyższym zanurzeniem Segrego, jest γ-funkcją rozmaitości X i Y.

Stwierdzenie 5.3.2. *Niech X, Y będą rozmaitościami quasi-rzutowymi. Niech $\alpha : X \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^T$, $\beta : X \times Y \longrightarrow \mathbb{P}^S$ będą γ-funkcjami tych rozmaitości. Wówczas*

$$\alpha\beta^{-1} : \beta(X \times Y) \longrightarrow \alpha(X \times Y)$$

jest regularnym izomorfizmem. ⊠

Teraz możemy zdefiniować produkt rozmaitości quasi-rzutowych X i Y.

Definicja 5.3.3. *Produktem* rozmaitości quasi-rzutowych $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ nazywamy rozmaitość

$$\varphi(X \times Y) \subseteq \mathbb{P}^N,$$

gdzie $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ jest zanurzeniem Segrego. ⊠

Produkt ten jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu regularnego. W szczególności $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^N$ jest produktem przestrzeni rzutowych $\mathbb{P}^n$ i $\mathbb{P}^m$. Wiemy ze Stwierdzenia 5.2.1, że jest to rzutowy zbiór domknięty w $\mathbb{P}^N$.

Dzięki zanurzeniu Segrego iloczyn kartezjański $X \times Y$ staje się przestrzenią topologiczną. Podzbiór $E \subseteq X \times Y$ jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\varphi(E)$ jest domknięty w $\varphi(X \times Y)$. Zmierzamy do opisania zbiorów domkniętych w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ i $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m_0$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.4 Wielomiany jednorodne względem podzbioru zbioru zmiennych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $k[S, Z] = k[S_0, \dots, S_n, Z_0, \dots, Z_m]$ będzie pierścieniem wielomianów. Oznaczmy przez $\mathbb{Z}^+$ zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych i niech

$$\Omega_n = (\mathbb{Z}^+)^{n+1} = \underbrace{\mathbb{Z}^+ \times \cdots \times \mathbb{Z}^+}_{n+1}, \quad \Omega_m = (\mathbb{Z}^+)^{m+1} = \underbrace{\mathbb{Z}^+ \times \cdots \times \mathbb{Z}^+}_{m+1}.$$

Jeśli $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Omega_n$ i $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m) \in \Omega_m$ to stosować będziemy następujące oznaczenia: $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_0 + \cdots + \beta_m$ oraz

$$S^\alpha = S_0^{\alpha_0} \cdots S_n^{\alpha_n}, \quad Z^\beta = Z_0^{\beta_0} \cdots Z_m^{\beta_m}.$$

Każdy wielomian G należący do $k[S, Z]$ ma wtedy jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$G = \sum_{\alpha \in \Omega_n} \sum_{\beta \in \Omega_m} c_{\alpha\beta} S^\alpha Z^\beta, \tag{5.1}$$

gdzie wszystkie elementy postaci $c_{\alpha\beta}$ należą do k.

Definicja 5.4.1. Niech $G \in k[S, Z] \smallsetminus \{0\}$ będzie wielomianem postaci (5.1). Mówimy, że G jest wielomianem *jednorodnym sopnia p względem S* jeśli z tego, że $c_{\alpha\beta} \neq 0$ wynika, że $|\alpha| = p$. Dodatkowo przyjmujemy, że wielomian zerowy jest jednorodny względem S dowolnego stopnia.

Przykład 5.4.2. (1) Wielomian $G = S_0^2 Z_1^3 + S_0 S_1 Z_2$ jest jednorodny stopnia 2 względem S. Nie jest natomiast jednorodny względem Z.

(2) Wielomian $G = S_0^2 Z_1^3 + S_0 S_1 Z_0^2 Z_2$ jest jednorodny stopnia 2 względem S i jest jednocześnie jednorodny stopnia 3 względem Z.

(3) Wielomian $G = S_0^2 + Z_0^2$ nie jest jednorodny ani względem S ani względem Z. Jest natomiast jednorodny stopnia 2 względem zmiennych S_0, Z_0. ⊠

Z Definicji 5.4.1 wynikają następujące dwa stwierdzenia (zachodzące dla dowolnego nieskończonego ciała k).

Stwierdzenie 5.4.3. *Niech $G \in k[S, Z] \smallsetminus \{0\}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Wielomian G jest jednorodny stopnia p względem S.*

(2) *Wielomian G, traktowany jako wielomian zmiennych $S_0, \dots, S_n$ o współczynnikach z pierścienia $k[Z] = k[Z_0, \dots, Z_m]$, jest jednorodny stopnia p.*

(3) *Dla każdego $a \in k$ zachodzi równość*

$$G(aS_0, \dots, aS_n, Z_0, \dots, Z_m) = a^p G(S_0, \dots, S_n, Z_0, \dots, Z_m). \ ⊠$$

Stwierdzenie 5.4.4. *Jeśli wielomian $G \in k[S,Z]$ jest jednorodny stopnia p względem S i jednocześnie jest jednorodny stopnia q względem Z, to jest jednorodny (w zwykłym sensie) stopnia $p+q$.* ⊠

W następnym podrozdziale wykorzystamy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.4.5. *Niech $G \in k[S,Z]$ i niech $p \in \mathbb{Z}^+$. Następujące waunki są równoważne.*

(1) *Wielomian G jest jednorodny stopnia p względem S i jednocześnie jednorodny tego samego stopnia p względem Z.*

(2) *Istnieje jednorodny wielomian H stopnia p należący do pierścienia wielomianów $k[U] = k[U_{00}, U_{01}, \dots, U_{0m}, \dots, U_{n0}, \dots, U_{nm}]$ taki, że*

$$G(S_0,\dots,S_n,Z_0,\dots,Z_m) = H(S_0Z_0,\dots,S_0Z_m,\dots,S_nZ_0,\dots,S_nZ_m). \tag{5.2}$$

Dowód. (2) $\Rightarrow$ (1). Wynika to ze Stwierdzenia 5.4.4(3).

(1) $\Rightarrow$ (2). Przedstawmy wielomian G w postaci (5.1) i rozpatrzmy każdy jednomian $c_{\alpha\beta}S^\alpha Z^\beta$ występujący w tym przedstawieniu. Ponieważ $|\alpha| = |\beta| = p$ więc jednomian taki ma postać

$$c_{\alpha\beta}S^\alpha Z^\beta = c_{\alpha\beta}S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_p}Z_{j_1}Z_{j_2}\cdots Z_{j_p} = c_{\alpha\beta}(S_{i_1}Z_{j_1})\cdots(S_{i_p}Z_{j_p}),$$

gdzie $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n$ oraz $0 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_p \leqslant m$. Stąd wynika, że

$$c_{\alpha\beta}S^\alpha Z^\beta = H_{\alpha\beta}(S_0Z_0,\dots,S_0Z_m,\dots,S_nZ_0,\dots,S_nZ_m),$$

gdzie $H_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}U_{i_1j_1}\cdots U_{i_pj_p} \in k[U]$. Niech

$$H = \sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta}.$$

Wtedy H jest jednorodnym wielomianem stopnia p należącym do $k[U]$ i spełniającym równość (5.2). ⊠

Przykład 5.4.6. Wielomian $H \in k[U]$ spełniający warunek (5.2) nie jest wyznaczony jednoznacznie. Niech $G = S_0S_1Z_0Z_2 + S_1S_2Z_0Z_1$. Wtedy równość (5.2) spełniona jest dla $H = U_{00}U_{12} + U_{10}U_{21}$ oraz dla $H = U_{02}U_{10} + U_{11}U_{20}$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.5 Zbiory domknięte w $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ i $\mathbf{P}^n \times \mathbf{A}^m_0$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Twierdzenie 5.5.1 ([Szaf88]75). *Niech $E \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *E jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.*

(2) *E jest zbiorem wspólnych zer wielomianów*

$$G_i(S_0,\dots,S_n,Z_0,\dots,Z_m) \in k[S,Z] = k[S_0,\dots,S_n,Z_0,\dots,Z_m]$$

dla $i = 1,\dots r$, jednorodnych względem S i jednocześnie jednorodnych względem Z.

Dowód. Skorzystamy z zanurzenia Segrego $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$ ($N = (n+1)(m+1) - 1$). Wiemy, że zbiór E jest domknięty w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(E)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^N$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $\varphi(E)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^N$. Istnieją wtedy jednorodne wielomiany $H_1, \dots, H_r \in k[U] = k[U_{00}, \dots, U_{nm}]$ takie, że $\varphi(E) = \mathrm{V_p}(H_1, \dots, H_r)$. Niech $G_1, \dots, G_r \in k[S, Z]$ będą wielomianami zdefiniowanymi wzorami

$$G_i(S_0, \dots, S_n, Z_0, \dots, Z_m) = H_i(S_0 Z_0, \dots, S_0 Z_m, \dots, S_n Z_0, \dots, S_n Z_m),$$

dla $i = 1, \dots, r$. Jest oczywiste, że wielomiany te spełniają warunek (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy teraz, że E jest zbiorem zer wielomianów $G_1, \dots, G_r$ takich jak w warunku (2). Niech p, q będą stopniami jednorodności wielomianu G_1 odpowiednio względem S i Z. Jeśli $p > q$, to wielomian G_1 zastępujemy wielomianowym zbiorem

$$\{Z_0^{p-q} G_1, \dots, Z_m^{p-q} G_1\}.$$

Podobnie postępujemy w przypadku, gdy $q > p$. Możemy zatem założyć, że stopnie jednorodności (względem S i Z) każdego z wielomianów $G_1, \dots, G_r$ są jednakowe. Warunek (1) wynika zatem ze Stwierdzenia 5.4.5. ⊠

Twierdzenie 5.5.2 ([Szaf88]75). *Niech $E \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *E jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$.*

(2) *E jest zbiorem wspólnych zer wielomianów*

$$F_i(S_0, \dots, S_n, Y_1, \dots, Y_m) \in k[S, Y] = k[S_0, \dots, S_n, Y_1, \dots, Y_m]$$

dla $i = 1, \dots r$, jednorodnych względem S.

Dowód. Każdy zbiór domknięty w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$ jest postaci $Y \cap (\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m)$, gdzie Y jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Dalej dowód przebiega standardowo i bazuje na Twierdzeniu 5.5.1. ⊠

Jest godne zaznaczenia, że rozmaitość $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}_0^1$ nie jest ani rozmaitością rzutową, ani afiniczną ([Szaf88]86 Zad.6).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.6 Wykres odwzorowania regularnego

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór $\Gamma_f = \{(x, f(x));\ x \in X\} \subseteq X \times Y$. Wykazaliśmy, że w przypadku afinicznym wykres odwzorowania regularnego $f : X \longrightarrow Y$ jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$. Teraz wykażemy, że fakt ten zachodzi również dla odwzorowania regularnego rozmaitości quasi-rzutowych.

Niech $\Delta_m = \{(y, y);\ y \in \mathbb{P}^m\}$.

Lemat 5.6.1. *Δ_m jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m$.*

Dowód. Δ_m jest zbiorem wspólnych zer wszystkich wielomianów z $k[S_0, \dots, S_m, Z_0, \dots, Z_m]$ postaci $S_i Z_j - S_j Z_i$ dla $i, j = 0, \dots, m$. Wielomiany te są jednorodne stopnia 1 względem $S_0, \dots, S_m$ i jednocześnie są jednorodne stopnia 1 względem $Z_0, \dots, Z_m$. Teza wynika zatem z Twierdzenia 5.5.1. ⊠

Stwierdzenie 5.6.2. *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ będą rozmaitościami quasi-rzutowymi i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym. Wtedy Γ_f jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$.*

Dowód. Niech $g : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ będzie funkcją określoną wzorem $g(x) = f(x)$, dla $x \in X$. Wtedy g jest odwzorowaniem regularnym oraz

$$\Gamma_f = \Gamma_g \cap (X \times Y).$$

Wystarczy więc pokazać, że Γ_g jest zbiorem domkniętym w $X \times \mathbb{P}^m$. Możemy zatem założyć, że $Y = \mathbb{P}^m$.

Niech $i : \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m$ będzie odwzorowaniem identycznościowym i rozpatrzmy odwzorowanie regularne

$$(f, i) : X \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m, \quad (x, u) \longmapsto (f(x), u).$$

Wiemy (Stwierdzenie 3.9.2), że (f, i) jest odwzorowaniem ciągłym. Wiemy również (Lemat 5.6.1), że Δ_m jest zbiorem domkniętyn w $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m$. Łatwo sprawdzić, że

$$\Gamma_f = (f, i)^{-1}(\Delta_m).$$

Z tej równości wynika domkniętość zbioru Γ_f. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.7 Rzutowania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym. Jeżeli dla każdego zbioru domkniętego $E \subseteq X$ obraz $f(E)$ jest zbiorem domkniętym w Y, to mówić będziemy, że f jest *odwzorowaniem domkniętym.* Korzystając z Twierdzenia 5.5.2 (o postaci zbiorów domkniętych w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$) można udowodnić:

Lemat 5.7.1 ([Szaf88]77). *Rzutowanie $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m \longrightarrow \mathbb{A}_0^m$ jest odwzorowaniem domkniętym.* ⊠

Stąd wynikają kolejno następujące wnioski.

Wniosek 5.7.2. *Jeśli Y jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{A}_0^m$, to rzutowanie $\mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem domkniętym.*

Dowód. Niech $p : \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m \longrightarrow \mathbb{A}_0^m$, $q : \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$ będą rzutowaniami i niech $E \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ będzie zbiorem domkniętym. Ponieważ zbiór $\mathbb{P}^n \times Y$ jest domknięty w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$ więc E jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}_0^m$, a zatem zbiór $p(E)$ jest (na mocy Lematu 5.7.1) domknięty w $\mathbb{A}_0^m$. Stąd $q(E) = p(E) \cap Y$ jest zbiorem domkniętym w Y. ⊠

Wniosek 5.7.3. *Jeśli $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ jest rozmaitością quasi-rzutową, to rzutowanie $p : \mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem domkniętym.*

Dowód. Niech E będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times Y$. Wiemy ze Stwierdzenia 3.7.2, że $Y = \bigcup_\alpha U_\alpha$, gdzie każde U_α jest zbiorem otwartym w Y regularnie izomorficznym z afinicznym zbiorem domkniętym. Z Wniosku 5.7.2 wynika, że rzutowania $p_\alpha : \mathbb{P}^n \times U_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ są odwzorowaniami domkniętymi. Każdy więc zbiór postaci $p_\alpha(E \cap (\mathbb{P}^n \times U_\alpha))$ jest domknięty w U_α. Zatem każdy zbiór $p(E) \cap U_\alpha$ jest domknięty w U_α, gdyż

$$p(E) \cap U_\alpha = p_\alpha(E \cap (\mathbb{P}^n \times U_\alpha)).$$

Domkniętość $p(E)$ w Y wynika więc ze Stwierdzenia 3.8.2. ⊠

Twierdzenie 5.7.4 ([Szaf88]76). *Niech X będzie rozmaitością rzutową i niech Y będzie rozmaitością quasi-rzutową. Wtedy rzutowanie $p : X \times Y \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem domkniętym.*

Dowód. Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie rzutowym zbiorem domkniętym. Wtedy $X \times Y$ jest domkniętym zbiorem w $\mathbb{P}^n \times Y$. Oznaczmy przez q rzutowanie $\mathbb{P}^n \times Y \longrightarrow Y$ i załóżmy, że E jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$. Wtedy E jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n \times Y$ więc (Wniosek 5.7.3) $q(E)$ jest domknięte w Y. Zatem $p(E)$ jest domknięte w Y, gdyż $p(E) = q(E)$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

5.8 Zastosowanie produktów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Twierdzenie 5.8.1 ([Szaf88]76). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym, gdzie X jest rozmaitością rzutową, a Y jest rozmaitością quasi-rzutową. Wtedy obraz $f(X)$ jest zbiorem domkniętym w Y.*

Dowód. Wykres Γ_f jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$ (Stwierdzenie 5.6.2). Ponieważ $f(X) = p(\Gamma_f)$, gdzie $p : X \times Y \longrightarrow Y$ jest rzutowaniem, więc teza wynika z Twierdzenia 5.7.4. ⊠

Wykazaliśmy w Stwierdzeniu 3.2.10, że jeśli $X = \mathbb{P}^n$, to pierścień $\operatorname{Reg}(X, k)$, funkcji regularnych na X, jest równy k. Teraz pokażemy, że tak jest dla dowolnej nieprzywiedlnej rozmaitości rzutowej X.

Twierdzenie 5.8.2 ([Szaf88]78). *Każda funkcja regularna na nieprzywiedlnej rozmaitości rzutowej X jest funkcją stałą, tzn. $k[X] = k$.*

Dowód. Niech $f : X \longrightarrow k$ będzie funkcją regularną. Traktując k jako $\mathbb{A}^1_0$ możemy na f patrzeć jako na odwzorowanie regularne $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_0$. Z Twierdzenia 5.8.1, $f(X)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{A}^1_0$. Zatem $f(X)$ jest albo równe $\mathbb{A}^1_0$ albo jest skończonym zbiorem punktów. Odwzorowanie f można jednak rozpatrywać jako odwzorowanie regularne $\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Z Twierdzenia 5.8.1 wynika więc, że $f(X) = \overline{f}(X)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^1$. Stąd wnioskujemy, że $f(X) \neq \mathbb{A}^1_0$. Zostaje więc przypadek: $f(X) = \{u_1, \dots, u_r\}$, gdzie r jest pewną liczbą naturalną. Wtedy $X = \bigcup_{i=1}^r f^{-1}(u_i)$. Jeśli $r > 1$, to mamy sprzeczność z nieprzywiedlnością zbioru X. Zatem $r = 1$, a zatem f jest funkcją stałą. ⊠

Wniosek 5.8.3 ([Szaf88]79). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym nieprzywiedlnej rozmaitości rzutowej X w rozmaitość afiniczną Y. Wówczas f jest funkcją stałą.*

Dowód. Wynika to z Twierdzenia 5.8.2, gdyż odwzorowanie regularne z X do rozmaitości afinicznej zadane jest przy pomocy funkcji regularnych na X (patrz Definicja 3.3.1). ⊠

6 Odwzorowania skończone

6.1 Odwzorowania skończone rozmaitości afinicznych

Niech $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$ będą domkniętymi zbiorami afinicznymi. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym. Załóżmy, że obraz $f(X)$ jest gęsty w Y. Wiemy, że wtedy k-algebrowy homomorfizm $f^* : k[Y] \longrightarrow k[X]$ jest injekcją. Możemy więc zakładać, że $k[Y]$ jest k-podalgebrą k-algebry $k[X]$.

Definicja 6.1.1. Mówimy, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest *skończone* jeśli pierścień $k[X]$ jest całkowity nad $k[Y]$.

Z dobrze znanych własności rozszerzeń całkowitych wynika:

Stwierdzenie 6.1.2. *Złożenie odwzorowań skończonych jest odwzorowaniem skończonym.* ⊠

W poniższym przykładzie pokazujemy, że pewne odwzorowanie regularne hiperboli $X \subset k^2$ w przestrzeń k^1, nie jest skończone.

Przykład 6.1.3. Niech $X = \mathrm{V_a}(T_1T_2 - 1) \subseteq k^2$ i niech $f : X \longrightarrow k^1$, $(a,b) \mapsto a$. Wiemy, że zbiór $f(X)$ jest gęsty w k^1. Wiemy również, że $k[X] = k[t]_S$, gdzie $k[t]$ jest pierścieniem wielomianów jednej zmiennej i $S = \{1, t, t^2, \dots\}$. Ponadto $k[k^1] = k[t]$. Ponieważ $k[t] \subsetneqq k[t]_S \subseteq k(t)$ oraz pierścień $k[t]$ jest całkowicie domknięty w $k(t)$ (o czym dobrze wiadomo), więc pierścień $k[X] = k[t]_S$ nie jest całkowity nad $k[t]$. Zatem odwzorowanie $f : X \longrightarrow k^1$ nie jest skończone. ⊠

Stwierdzenie 6.1.4. *Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem skończonym, to każdy zbiór postaci $f^{-1}(y_0)$, gdzie $y_0 \in Y$, jest zbiorem skończonym.*

Dowód. Niech $X \subseteq k^n$ i niech $t_1, \dots, t_n : X \longrightarrow k$ będą funkcjami regularnymi na X wyznaczonymi odpowiednio przez wielomiany $T_1, \dots, T_n$ (tzn. $t_i = T_i \mid X$, dla $i = 1, \dots, n$). Jeśli $x \in X$, to $x = (t_1(x), \dots, t_n(x))$. Wystarczy zatem pokazać, że funkcje $t_1, \dots, t_n$ przyjmują na zbiorze $f^{-1}(y_0)$ skończoną liczbę wartości.

Ponieważ $t_1 \in k[X]$ i pierścień $k[X]$ jest całkowity nad $f^*(k[Y])$, więc istnieją funkcje regularne $b_1, \dots, b_s \in k[Y]$ takie, że w pierścieniu $k[X]$ zachodzi równość:

$$t_1^s + f^*(b_1)t_1^{s-1} + \dots + f^*(b_{s-1})t_1 + f^*(b_s) = 0.$$

Wstawiając do tej równości dowolny punkt $x \in f^{-1}(y_0)$ otrzymujemy:

$$(t_1(x))^s + b_1(y_0)(t_1(x))^{s-1} + \dots + b_{s-1}(y_0)t_1(x) + b_s(y_0) = 0.$$

Widzimy więc, że każdy element postaci $t_1(x)$, dla $x \in f^{-1}(y_0)$, jest pierwiastkiem wielomianu $t^s + b_1(y_0)t^{s-1} + \dots + b_s(y_0)$ należącego do pierścienia wielomianów $k[t]$, jednej zmiennej nad ciałem k. Wielomian taki ma oczywiście tylko skończoną liczbę pierwiastków. Zatem zbiór $\{t_1(x);\ x \in f^{-1}(y_0)\}$ jest skończony. To samo pokazujemy dla funkcji $t_2, \dots, t_n$. ⊠

Następujące trzy twierdzenia (które przedstawiamy bez dowodów) podają istotne własności odwzorowań skończonych rozmaitości afinicznych.

Twierdzenie 6.1.5 ([Szaf88]81). *Każde odwzorowanie skończone jest surjekcją.* ⊠

Twierdzenie 6.1.6 ([Szaf88]81). *Odwzorowanie skończone przeprowadza zbiory domknięte na domknięte.* ⊠

Następne twierdzenie mówi, że skończoność jest własnością lokalną.

Twierdzenie 6.1.7 ([Szaf88]81). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym rozmaitości afinicznych. Załóżmy, że dla każdego $y \in Y$ istnieje afiniczne otoczenie otwarte U zawierające y takie, że $V = f^{-1}(U)$ jest rozmaitością afiniczną oraz odwzorowanie $f \mid V : V \longrightarrow U$ jest skończone. Wtedy f jest odwzorowaniem skończonym.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.2 Pierścień niezmienników skończonej grupy automorfizmów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli A jest k-algebrą (przemienną z jedynką), to przez $\mathrm{Aut}_k(A)$ oznaczamy grupę wszystkich k-automorfizmów k-algebry A.

Niech G będzie dowolną grupą. *Działaniem grupy G na k-algebrę A* nazywamy każdą funkcję $\delta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(A)$ będącą homomorfizmem grup. Jeśli δ jest takim działaniem, to mówimy w tym przypadku, że *grupa G działa na k-algebrę A*. W szczególności każda podgrupa grupy $\mathrm{Aut}_k(A)$ działa na k-algebrę A.

Załóżmy, że $\delta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(A)$ jest działaniem grupy G na k-algebrę A i oznaczmy przez A^G podzbiór k-algebry A zdefiniowany następująco:

$$A^G = \{a \in A;\ \forall_{g\in G}\ \delta_g(a) = a\}.$$

Jest oczywiste, że podzbiór ten jest k-podalgebrą w A. Nazywamy go *k-algebrą niezmienników* algebry A względem grupy G.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.2.1 (E. Noether). *Niech k będzie ciałem i niech G będzie skończoną grupą działającą na skończenie generowaną k-algebrę A. Wtedy k-algebra niezmienników A^G jest skończenie generowana nad k.*

Twierdzenie to udowodniła E. Noether najpierw, w 1916 roku, dla ciał charakterystyki zero, a potem, w 1926 roku, dla dowolnych ciał. W przypadku gdy rząd grupy G nie jest podzielny przez charakterystykę ciała k, Noether podała również algorytm na konstruowanie zbioru generatorów k-algebry A^G. Algorytm ten, opierający się na pewnym uogólnieniu klasycznego twierdzenia o funkcjach symetrycznych, jest opisany np. w tłumaczeniu rosyjskim książki Springera [Spri81] (str. 155). W książce [At-Mac] Twierdzenie 6.2.1 występuje jako ćwiczenie (patrz zadania w Sekcji 5). Dowód (w przypadku gdy $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$) można znaleźć np. w [Szaf88]334. Dowód, który tutaj przedstawiamy, oparty jest na następujących dwóch dobrze znanych lematach.

Lemat 6.2.2. *Niech M będzie skończenie generowanym modułem nad noetherowskim pierścieniem R. Wtedy każdy R-podmoduł modułu M jest też skończenie generowany nad R.* ⊠

Lemat 6.2.3. *Niech $R \subseteq S$ będą pierścieniami. Załóżmy, że S jest całkowite nad R i S jest skończenie generowaną R-algebrą. Wtedy S jest skończenie generowanym R-modułem.* ⊠

Dowód Twierdzenia 6.2.1. Załóżmy, że $A = k[r_1, \dots, r_n]$. Niech $\delta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(A)$ będzie działaniem grupy G na A. Rozważmy wielomiany $p_1(t), \dots, p_n(t)$, należące do pierścienia wielomianów $A[t]$, jednej zmiennej t nad A, zdefiniowane następująco:

$$p_i(t) = \prod_{g \in G} (t - \delta_g(r_i)), \quad \text{dla } \ i = 1, \dots, n.$$

Wielomiany te są unormowane (tzn. współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1) oraz, dla każdego i, element r_i jest pierwiastkiem wielomianu $p_i(t)$. Jest oczywiste, że współczynniki każdego z tych wielomianów należą do pierścienia A^G. Niech S będzie k-podalgebrą w A generowaną przez wszystkie współczynniki wielomianów $p_1(t), \dots, p_n(t)$. Mamy wtedy:

$$k \subseteq S \subseteq A^G \subseteq A = k[r_1, \dots, r_n] = S[r_1, \dots, r_n]$$

i ponadto, A jest całkowite nad S. Widzimy stąd, że A jest skończenie generowaną S-algebrą. Z Lematu 6.2.3 wynika więc, że A jest skończenie generowanym S-modułem. Ale S jest skończenie generowaną k-algebrą, zatem S jest pierścieniem noetherowskim, a zatem (na mocy Lematu 6.2.2) A^G jest skończenie generowanym S-modułem. Istnieją więc elementy $x_1, \dots, x_u$ należące do A^G takie, że

$$A^G = Sx_1 + \dots + Sx_u.$$

Stąd wynika, że $A^G = k[x_1, \dots, x_u, \{c_{ij}\}]$, gdzie $\{c_{ij}\}$ jest skończonym zbiorem wszystkich współczynników wielomianów $p_1(t), \dots, p_n(t)$. ⊠

Z dowodu tego wynika następujący wniosek.

Wniosek 6.2.4. *Niech k będzie ciałem i niech G będzie skończoną grupą działającą na skończenie generowaną k-algebrę A. Wtedy k-algebra niezmienników A^G jest skończenie generowana nad k i A jest pierścieniem całkowitym nad A^G* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.3 Ilorazowa rozmaitość afiniczna

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech G będzie grupą pewnych regularnych automorfizmów zbioru X. Mamy wówczas funkcję $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[X])$, $g \mapsto g^*$, która jest oczywiście homomorfizmem grup. Grupa G działa więc na k-algebrę $k[X]$. Mamy zatem k-algebrę niezmienników

$$k[X]^G = \{f \in k[X];\ \forall_{g \in G}\ g^*(f) = f\} = \{f \in k[X];\ \forall_{g \in G}\ fg = f\}.$$

Załóżmy teraz, że grupa G jest skończona. Wiemy z Twierdzenia 6.2.1, że wtedy $k[X]^G$ jest skończenie generowaną k-algebrą i jest oczywiste, że $k[X]^G$ nie ma nietrywialnych nilpotentów (gdyż jest to podalgebra algebry $k[X]$). Istnieje zatem afiniczny zbiór domknięty Y, zawarty w pewnej przestrzeni afinicznej k^m taki, że k-algebra $k[X]^G$ jest izomorficzna z k-algebrą $k[Y]$. W tym przypadku zbiór Y oznaczamy przez X/G i nazywamy *rozmaitością ilorazową* rozmaitości X względem G. Oznaczenie "X/G" ma swoje uzasadnienie. Wyjaśnijmy to dołandniej.

Niech $\sigma : k[Y] \longrightarrow k[X]^G$ będzie wspomnianym wyżej k-algebrowym izomorfizmem i niech $\omega : k[X]^G \longrightarrow k[X]$ będzie tożsamościowym włożeniem. Mamy wówczas k-algebrowy homomorfizm

$$H = \omega\sigma : k[Y] \longrightarrow k[X].$$

Istnieje zatem odwzorowanie regularne $\varphi : X \longrightarrow Y$ takie, że $H = \varphi^*$. Wtedy

$$\varphi(x) = (H(p_1)(x), \dots, H(p_m)(x)), \quad \text{dla } \ x \in X,$$

gdzie $p_1, \dots, p_m : Y \longrightarrow k$ są rzutowaniami.

Stwierdzenie 6.3.1. *Odwzorowanie φ jest skończone. W szczególności φ jest surjekcją.*

Dowód. Mamy równość: $\varphi^*(k[Y]) = \sigma(k[Y]) = k[X]^G$. Oczywiście $\varphi^* = H$ jest funkcją różnowartościową. Obraz $\varphi(X)$ jest więc gęsty w Y. Całkowitość pierścienia $k[X]$ nad $k[Y]$ wynika z Wniosku 6.2.4. Zatem φ jest odwzorowaniem skończonym, a zatem (na mocy Twierdzenia 6.1.5) φ jest surjekcją. ⊠

Stwierdzenie 6.3.2 ([Szaf88]). *Załóżmy, że* $\operatorname{char}(k) \nmid |G|$. *Jeśli $x_1, x_2 \in X$, to następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$;*

(2) *istnieje $g \in G$ takie, że $g(x_1) = x_2$.*

Dowód. (2) $\Rightarrow$ (1). Niech $g(x_1) = x_2$, dla pewnego $g \in G$. Ponieważ $H(k[Y]) = k[X]^G$, więc wszystkie funkcje $H(p_1), \dots, H(p_m)$ należą do $k[X]^G$. W szczególności więc $g^*(H(p_j)) = H(p_j)$, czyli $H(p_j)g = H(p_j)$, dla $j = 1, \dots, m$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \varphi(x_2) &= (H(p_1)(x_2), \dots, H(p_m)(x_2)) = (H(p_1)g(x_1), \dots, H(p_m)g(x_1)) \\ &= (H(p_1)(x_1), \dots, H(p_m)(x_1)) = \varphi(x_2). \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ i przypuśćmy, że $g(x_1) \neq x_2$, dla wszystkich $g \in G$. Niech

$$E_1 = \{g(x_1);\ g \in G\}, \quad E_2 = \{g(x_2);\ g \in G\}.$$

Wtedy E_1 i E_2 są rozłącznymi podzbiorami domkniętymi w X. Istnieje zatem funkcja regularna $f \in k[X]$ taka, że $f(a) = 1$ dla wszystkich $a \in E_1$ oraz $f(b) = 0$ dla wszystkich $b \in E_2$.

Rozpatrzmy teraz funkcję regularną $s \in k[X]$ zdefiniowaną wzorem

$$s(x) = \sum_{g \in G} fg(x), \quad x \in X.$$

Ponieważ grupa G jest skończona, więc jest oczywiste, że funkcja s należy do $k[X]^G$. Ale $k[X]^G = H(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])$. Istnieje zatem funkcja regularna $r \in k[Y]$ taka, że $s = \varphi^*(r) = r\varphi$. Stąd wnioskujemy, że $s(x_1) = r\varphi(x_1) = r\varphi(x_2) = s(x_2)$. To jest jednak sprzecznością. Mamy bowiem: $s(x_2) = \sum_{g \in G} fg(x_2) = \sum_{b \in E_2} f(b) = 0$ oraz $s(x_1) = \sum_{g \in G} fg(x_1) = \sum_{g \in G} 1 = |G| \neq 0$. ⊠

Pytanie 6.3.3. *Czy w powyższym stwierdzeniu założenie o charakterystyce ciała k jest istotne?*

Niech $\sim$ będzie relacją typu równoważności w zbiorze X określoną następująco:

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists_{g \in G}\ x_2 = g(x_1).$$

Niech $[x]$ oznacza klasę abstrakcji elementu $x \in X$ względem tej relacji. Mamy wówczas:

$$[x] = Gx = \{g(x);\ g \in G\}.$$

Z powyższych stwierdzeń wynika, że zbiór wszystkich klas abstrakcji jest równoliczny z rozmaitością ilorazową $Y = X/G$.

Przypomnijmy, że pierścień R nazywamy *normalnym* (lub *całkowicie domkniętym*) jeśli jest dziedziną całkowicie domkniętą w swoim ciele ułamków. Mimo, że pierścień $k[X]$ jest całkowity nad $k[X]^G = k[Y]$ (patrz Wniosek 6.2.4), można udowodnić:

Twierdzenie 6.3.4 ([Szaf88] 157). *Jeśli $k[X]$ jest pierścieniem normalnym, to $k[Y]$ (czyli $k[X]^G$) też jest pierścieniem normalnym.* ⊠

Przykład 6.3.5. Niech $\operatorname{char}(k) \neq 2$, $X = k^2$ i $G = \{1, g\}$, gdzie $g(T_1) = -T_1, g(T_2) = -T_2$. Wtedy $k[X]^G = k[T_1, T_2]^G = k[T_1^2, T_2^2, T_1T_2]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.4 Odwzorowania skończone rozmaitości quasi-rzutowych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Definicja 6.4.1. Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi rzutowych. Mówimy, że odwzorowanie f jest *skończone*, jeśli dla każdego $y \in Y$ istnieje afiniczne otoczenie otwarte U zawierające y takie, że $V = f^{-1}(U)$ jest rozmaitością afiniczną oraz odwzorowanie $f \mid V : V \longrightarrow U$ jest skończone.

Z Twierdzenia 6.1.7 wynika, że każde skończone odwzorowanie rozmaitości afinicznych jest skończone w sensie powyższej definicji.

Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem Stwierdzenia 6.1.4 i Twierdzenia 6.1.5.

Twierdzenie 6.4.2 ([Szaf88]82). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie skończonym odwzorowaniem rozmaitości quasi-rzutowych. Wtedy:*
(1) *każdy zbiór postaci $f^{-1}(y_0)$, gdzie $y_0 \in Y$, jest zbiorem skończonym;*
(2) *f jest surjekcją.* ⊠

Zanotujmy następujące dwa twierdzenia zwane *twierdzeniami o normalizacji.*

Twierdzenie 6.4.3 ([Szaf88]85). *Dla każdej nieprzywiedlnej rozmaitości rzutowej X istnieje skończone odwzorowanie $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$, dla pewnego m.* ⊠

Twierdzenie 6.4.4 ([Szaf88]85). *Dla każdej nieprzywiedlnej rozmaitości afinicznej X istnieje skończone odwzorowanie $f : X \longrightarrow k^m$, dla pewnego m.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.5 Pewna ogólna własność odwzorowań regularnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Korzystając z faktów dotyczących odwzorowań regularnych skończonych można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.5.1 ([Szaf88]85). *Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi-rzutowych takim, że obraz $f(X)$ jest zbiorem gęstym w Y, to zbiór $f(X)$ zawiera niepusty podzbiór otwarty w Y.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

6.6 Rzutowania o danym środku

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $0 \leqslant d < n$ i niech $L_1, \dots, L_{n-d}$ będą liniowymi formami należącymi do pierścienia wielomianów $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$, liniowo niezależnymi nad k. Rozpatrzmy afiniczny zbiór domknięty

$$E = \mathrm{V_p}(L_1, \dots, L_{n-d}) \subset \mathbb{P}^n.$$

Każda z form $L_1, \dots, L_{n-d}$ nie należy oczywiście do ideału $\mathrm{I_p}(\mathbb{P}^n) = 0$. Mamy więc wymierny $(\mathbb{P}^n, n-d-1)$-ciąg

$$L = (L_1, \dots, L_{n-d}),$$

który wyznacza odwzorowanie wymierne $[L] : \mathbb{P}^n \underset{\circ}{\longrightarrow} \mathbb{P}^{n-d-1}$, zwane *rzutowaniem o środku w E* (patrz [Szaf88]69). Jest oczywiste, że zbiór otwarty $\mathbb{P}^n \smallsetminus E$ zawarty jest w zbiorze $D_{[L]}$, w dziedzinie odwzorowania $[L]$. Stąd w szczególności wynika, że jeśli X jest rzutowym zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^n$, rozłącznym z E, to odwzorowanie $\pi = [L] \mid X : X \longrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ jest regularne oraz

$$\pi(x) = (L_1(x) : \dots : L_{n-d}), \quad \text{dla } \ x \in X.$$

W tej sytuacji można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.6.1 ([Szaf88]83). *Odwzorowanie $\pi : X \longrightarrow \pi(X)$ jest skończone.* ⊠

Stosując odwzorowanie Veronese można udowodnić następujący fakt ogólniejszy.

Twierdzenie 6.6.2 ([Szaf88]85). *Niech $F_0, \dots, F_r$ będą liniowo niezależnymi formami tego samego stopnia należącymi do $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$. Niech X będzie domkniętym zbiorem rzutowym w $\mathbb{P}^n$ rozłącznym ze zbiorem $\mathrm{V_p}(F_0, \dots, F_r)$. Wtedy odwzorowanie $\varphi : X \longrightarrow \varphi(X)$ określone wzorem*

$$\varphi(x) = (F_0(x) : \dots : F_r(x)), \quad x \in X,$$

jest skończone. ⊠

7 Wymiar

Niech X będzie rozmaitością quasi-rzutową. Jeśli rozmaitość X jest nieprzywiedlna, to jej *wymiarem* nazywamy stopień transcendencji ciała $k(X)$ nad k. Jeśli rozmaitość X jest przywiedlna, to jej *wymiarem* nazywamy maksymalny wymiar wszystkich nieprzywiedlnych składowych tej rozmaitości. Wymiar rozmaitości X oznaczamy przez $\dim X$.

Jeśli Y jest domkniętą podrozmaitością w X to liczbę $\dim X - \dim Y$ oznaczamy $\operatorname{codim} Y$ (lub $\operatorname{codim}_X Y$) i nazywamy *kowymiarem* Y w X.

Jeśli rozmaitość X jest nieprzywiedlna i U jest niepustym otwartym podzbiorem w X, to $k(U) = k(X)$ (Stwierdzenie 4.1.3), a zatem wtedy $\dim X = \dim U$.

Jeśli X i Y są nieprzywiedlnymi rozmaitościami quasi-rzutowymi i istnieje odwzorowanie skończone z X do Y, to oczywiście $\dim X = \dim Y$.

7.1 Przykłady

Przykład 7.1.1. $\dim \mathbb{P}^n = \dim k^n = n$, gdyż $k(\mathbb{P}^n) = k(k^n) = k(T_1, \dots, T_n)$. ⊠

Przykład 7.1.2. $\dim X = 0 \iff X$ jest zbiorem skończonym.

Dowód. Wystarczy to udowodnić w przypadku, gdy X jest domkniętym zbiorem afinicznym w k^n. Jeśli X jest zbiorem jednoelementowym, to $k(X) = k$, więc $\dim X = 0$. Stąd wynika, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\dim X = 0$.

Załóżmy teraz odwrotnie. Niech $\dim X = 0$. Możemy założyć dodatkowo, że rozmaitość X jest nieprzywiedlna. Niech $t_1, \dots, t_n$ będą funkcjami regularnymi na X wyznaczonymi odpowiednio przez wielomiany $T_1, \dots, T_n$. Wtedy $x = (t_1(x), \dots, t_n(x))$, dla wszystkich $x \in X$. Wystarczy zatem pokazać, że każda z funkcji $t_1, \dots, t_n$ ma tylko skończoną liczbę wartości. To natomiast jest oczywiste, gdyż wynika z faktu, że $k[X]$ jest algebraiczne nad k (bo $\operatorname{tr.deg}_k k(X) = 0$). ⊠

Przykład 7.1.3. Niech $F \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ będzie nieprzywiedlnym wielomianem i niech $X = \mathrm{V_a}(X)$. Wtedy $\dim X = n - 1$.

Dowód. Wiemy, że $k(X)$ jest ciałem ułamków dziedziny $k[T]/(F)$. Niech $t_i = T_i + (F)$, $i = 1, \dots, n$. Wtedy $k[X] = k[t_1, \dots, t_n]$ oraz $k(X) = k(t_1, \dots, t_n)$. Musimy pokazać, że $\operatorname{tr.deg}_k k(X) = n - 1$.

Ponieważ F jest wielomianem nierozkładalnym, więc $F \notin k$. W wielomianie F występuje zatem co najmniej jedna zmienna T_i w sposób istotny. Załóżmy, że tą zmienną jest T_1. Wówczas element t_1 jest algebraiczny nad $k(t_2, \dots, t_n)$. Spełnia on bowiem równanie $F(T_1, t_2, \dots, t_n) = 0$. Zatem $\operatorname{tr.deg}_k k(X) \leqslant n - 1$. Pokażemy teraz, że elementy $t_2, \dots, t_n$ są algebraicznie niezależne nad k (i to zakończy nasz dowód). Przypuśćmy, że istnieje wielomian $G \in k[T_2, \dots, T_n]$, różny od zera taki, że $G(t_2, \dots, t_n) = 0$. Oznacza to, że $G(T_2, \dots, T_n) \in (F)$. Stąd $F \mid G$, a to jest sprzecznością bo F ma T_1, a G nie ma T_1. ⊠

Następne fakty podajemy bez dowodów. Dowody są łatwe i standardowe. Można je znaleźć w [Szaf88] str. 88 - 90. Przez X i Y oznaczamy rozmaitości quasi-rzutowe.

Przykład 7.1.4. Jeśli X i Y są nieprzywiedlne, to $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$. ⊠

Twierdzenie 7.1.5.

(1) *Jeśli* $Y \subseteq X$, *to* $\dim Y \leqslant \dim X$.

(2) *Załóżmy, że* X *jest nieprzywiedlne. Jeśli* $Y \subseteq X$, $\dim Y = \dim X$ *oraz* Y *jest domknięte w* X, *to* $Y = X$. ⊠

Twierdzenie 7.1.6. *Wszystkie nieprzywiedlne składowe hiperpowierzchni w* k^n *lub* $\mathbb{P}^n$ *mają kowymiar równy* 1. ⊠

Twierdzenie 7.1.7. *Każda rozmaitość afiniczna* $X \subset k^n$, *której wszystkie składowe nieprzywiedlne mają kowymiar równy* 1, *jest hiperpowierzchnią.* ⊠

Twierdzenie 7.1.8. *Niech* $X \subseteq \mathbb{P}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_r}$. *Jeśli wszystkie składowe nieprzywiedlne rozmaitości* X *mają kowymiar równy* 1, *to* X *jest zbiorem zer jednego wielomianu jednorodnego ze względu na każdą z* r *grup zmiennych.* ⊠

Z powyższych faktów wynikają w szczególności następujące dwa wnioski.

Wniosek 7.1.9. *Nieprzywiedlny afiniczny zbiór domknięty* $X \subseteq k^n$ *ma kowymiar* 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy* X *jest nieprzywiedlną hiperpowierzchnią w* k^n. ⊠

Wniosek 7.1.10. *Nieprzywiedlny rzutowy zbiór domknięty* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *ma kowymiar* 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy* $X = \mathrm{V_p}(F)$, *gdzie* F *jest nieprzywiedlną formą w* $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2 Wymiar przekroju z hiperpowierzchnią

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli F jest formą należącą do $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$ i $X \subseteq \mathbb{P}^n$ jest rozmaitością quasi-rzutową, to przez X_F oznaczmy domknięty zbiór w X wyznaczony przez F, tzn.

$$X_F = X \cap \mathrm{V_p}(F).$$

Można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2.1 ([Szaf88]91). *Niech* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *będzie nieprzywiedlnym zbiorem rzutowym i niech* $F \in k[S]$ *będzie formą. Jeśli* $F \notin \mathrm{I_p}(X)$, *to* $\dim X_F = \dim X - 1$. ⊠

Z tego twierdzenia (i jego dowodu) wynikają następujące wnioski (patrz [Szaf88] 91-92).

Wniosek 7.2.2. *Dla każdej rozmaitości rzutowej* X *istnieją podrozmaitości dowolnego wymiaru* $s < \dim X$. ⊠

Wniosek 7.2.3. *Niech* X *będzie nieprzywiedlną rozmaitością rzutową. Wtedy*

$$\dim X = 1 + \sup \dim Y,$$

gdzie Y *przebiega wszystkie właściwe (tzn. różne od* X*) podrozmaitości w* X. ⊠

Wniosek 7.2.4. *Wymiar rzutowej rozmaitości* X *można zdefiniować jako największą liczbę naturalną* n *(włącznie z* 0*), dla której istnieje ciąg*

$$Y_0 \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n,$$

nieprzywiedlnych podrozmaitości w X. ⊠

Każdy rzutowy zbiór domknięty w $\mathbb{P}^n$ postaci $\mathrm{V_p}(L_1, \dots, L_r)$, gdzie $L_1, \dots, L_r$ są formami liniowymi, nazywamy *podrozmaitością liniową* w $\mathbb{P}^n$.

Wniosek 7.2.5. *Wymiar rzutowej rozmaitości $X \subseteq \mathbb{P}^n$ jest liczbą równą $n - s - 1$, gdzie s jest maksymalnym wymiarem podrozmaitości liniowych w $\mathbb{P}^n$, nie przecinających się z X.* ⊠

Wniosek 7.2.6. *Jeśli $F_1, \dots, F_r$ są formami należącymi do $k[S_0, \dots, S_n]$, to zbiór wspólnych zer tych form w $\mathbb{P}^n$ ma wymiar nie mniejszy niż $n - r$, tzn. $n - r \leqslant \dim \mathrm{V_p}(F_1, \dots, F_r)$.* ⊠

Wniosek 7.2.7. *Niech $F_1, \dots, F_r$ będą formami należącymi do $k[S_0, \dots, S_n]$. Jeśli $r \leqslant n$, to formy te mają wspólne zero należące do $\mathbb{P}^n$.* ⊠

Następne twierdzenie jest wzmocnieniem Twierdzenia 7.2.1.

Twierdzenie 7.2.8 ([Szaf88]94). *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlnym zbiorem rzutowym i niech $F \in k[S]$ będzie formą. Jeśli $F \notin \mathrm{I_p}(X)$, to wymiar każdej składowej nieprzywiedlnej rozmaitości X_F jest równy* $\dim X - 1$. ⊠

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się następujący algebraiczny lemat.

Lemat 7.2.9 ([Szaf88]95). *Niech $B = k[T_1, \dots, T_n]$ będzie pierścieniem wielomianów i niech A będzie pierścieniem bez dzielników zera, zawierającym B i całkowitym nad B. Niech $x = T_1$ i niech $y \in B$ będzie niezerowym wielomianem, w którym nie występuje zmienna T_1. Ponadto niech $u \in A$. Jeśli $x \mid (yu)^p$ w A przy pewnym $p > 0$, to $x \mid u^q$, dla pewnego $q > 0$.* ⊠

Następne trzy twierdzenia o rozmaitościach quasi-rzutowych, to wnioski z Twierdzenia 7.2.8.

Twierdzenie 7.2.10 ([Szaf88]96). *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech $F \in k[S]$ będzie formą nie należącą do $\mathrm{I_p}(X)$. Jeśli zbiór X_F jest niepusty, to wymiar każdej składowej nieprzywiedlnej rozmaitości X_F jest równy* $\dim X - 1$. ⊠

Twierdzenie 7.2.11 ([Szaf88]97). *Niech $X \subseteq \mathbb{P}^n$ będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech $F_1, \dots, F_r \in k[S_0, \dots, S_n]$ będą formami. Rozpatrzmy rozmaitość*

$$Y = X \cap \mathrm{V_p}(F_1, \dots, F_r).$$

Jeśli $Y \neq \emptyset$, to wymiar każdej składowej nieprzywiedlnej rozmaitości Y jest nie mniejszy niż $\dim X - r$. ⊠

Twierdzenie 7.2.12 ([Szaf88]97). *Niech $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ będą nieprzywiedlnymi rozmaitościami quasi-rzutowymi takimi, że $X \cap Y \neq \emptyset$ oraz $\dim X + \dim Y > n$. Wtedy każda składowa nieprzywiedlna rozmaitości $X \cap Y$ ma wymiar nie mniejszy niż* $\dim X + \dim Y - n$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3 Twierdzenia o wymiarze włókien

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli $f : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi-rzutowych i $y \in Y$, to zbiór $f^{-1}(y)$ nazywamy *włóknem* nad punktem y. Ponieważ jednoelementowy zbiór $\{y\}$ jest domknięty w Y i f jest odwzorowaniem ciągłym, więc włókno jest zbiorem domkniętym w X. Rozmaitość X jest sumą mnogościową parami rozłącznych włókien.

Twierdzenie 7.3.1 ([Szaf88]97). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym nieprzywiedlnych rozmaitości quasi-rzutowych. Załóżmy, że $f(X) = Y$ i niech $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Zachodzą wtedy następujące własności.*

(1) $m \leqslant n$.

(2) *Wymiar każdej składowej nieprzywiedlnej dowolnego włókna $f^{-1}(y)$ jest $\geqslant n - m$.*

(3) *Istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subseteq Y$ taki, że $\dim f^{-1}(y) = n - m$, dla wszystkich $y \in U$.*

(4) *Każdy zbiór postaci $\{y \in Y;\ \dim f^{-1}(y) \geqslant p\}$, $p \in \mathbb{Z}$, jest domknięty w Y.* ⊠

Twierdzenie 7.3.2 ([Szaf88]99). *Niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi-rzutowych takim, że $f(X) = Y$. Załóżmy, że Y oraz wszystkie włókna są nieprzywiedlne. Jeśli wymiary wszystkich włókien są jednakowe, to rozmaitość X jest nieprzywiedlna.* ⊠

Wniosek 7.3.3. *Produkt rozmaitości nieprzywiedlnych jest rozmaitością nieprzywiedlną.*

Dowód. Zastosujmy Twierdzenie 7.3.2 dla rzutowania $X \times Y \longrightarrow Y$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4 Twierdzenie Tsena

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy (patrz Wniosek 7.2.7), że jeśli $r \leqslant n$, to każdy zbiór $\{F_1, \dots, F_r\}$, wielomianów jednorodnych należących do $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$, ma wspólne zero w $\mathbb{P}^n$. Wykażemy teraz, że z faktu tego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.4.1 (Tsena, patrz [Szaf88]93**).** *Niech $R = k[t]$ będzie pierścieniem wielomianów jednej zmiennej nad algebraicznie domkniętym ciałem k. Niech $F \in R[S] = R[S_0, \dots, S_n]$ będzie formą (ze względu na $S_0, \dots, S_n$) stopnia $m \leqslant n$. Istnieje wtedy niezerowy ciąg $(p_0, \dots, p_n)$, wielomianów należących do R taki, że $F(p_0, \dots, p_n) = 0$.*

Zauważmy, że powyższe twierdzenie jest oczywiste w przypadku gdy wszystkie współczynniki formy F należą do ciała k. Taka forma ma bowiem wtedy co najmniej jedno zero $(a_0 : \cdots : a_n)$ w $\mathbb{P}^n$ i wtedy wielomiany stałe $p_i(t) = a_i$ (lub np. wielomiany postaci $p_i(t) = a_i t$), $i = 0, \dots, n$, spełniają tezę tego twierdzenia.

Przed dowodem Twierdzenia 7.4.1 udowodnimy dwa lematy.

Lemat 7.4.2. *Niech $R = k[t]$ i niech $R[U] = R[U_1, \dots, U_r]$ będzie pierścieniem wielomianów nad R. Niech $f, g \in R[U]$ będą takimi wielomianami, że*

$$f = \sum_{i=0}^{d_1} A_i(U) t^i, \quad g = \sum_{j=0}^{d_2} B_j(U) t^j.$$

gdzie $A_0, \dots, A_{d_1} \in k[U]$ są formami tego samego stopnia a oraz $B_0, \dots, B_{d_1} \in k[U]$ są formami tego samego stopnia b. Wówczas

$$fg = \sum_{r=0}^{d_1+d_2} C_r(U) t^r,$$

gdzie $C_0, \dots, C_{d_1+d_2} \in k[U]$ są formami tego samego stopnia $a + b$.

Dowód. Wynika to natychmiast z definicji mnożenia w pierścieniu wielomianów. ⊠

Lemat 7.4.3. *Niech $R = k[t]$ i niech $R[U] = R[U_1, \dots, U_r]$ będzie pierścieniem wielomianów nad R. Załóżmy, że $F \in R[S] = R[S_0, \dots, S_n]$ jest formą (ze względu na $S_0, \dots, S_n$) stopnia m. Niech $P_0, \dots, P_n \in R[U]$ będą wielomianami postaci*

$$P_i = \sum_{j=0}^{d} A_{ij}(U)t^j, \quad i = 0, \dots, n,$$

gdzie elementy postaci $A_{ij}(U)$ są liniowymi formami należącymi do $k[U]$. Wtedy

$$F(P_0, \dots, P_n) = \sum_{j=0}^{dm+e} B_j(U)t^j, \tag{7.1}$$

gdzie elementy postaci $B_j(U)$ są formami stopnia m należącymi do $k[U]$ oraz e jest maksymalnym stopniem wszystkich współczynników (należących do $R = k[t]$) formy F.

Dowód. Wystarczy to udowodnić w przypadku gdy F jest jednomianem. Dla jednomianów natomiast tezę otrzymamy stosując kilkakrotnie Lemat 7.4.2. ⊠

Dowód Twierdzenia 7.4.1. Niech e będzie maksymalnym stopniem wszystkich współczynników (z $k[t]$) formy F. Niech d będzie liczbą naturalną większą od e i niech

$$U = \{U_{ij};\ i = 0, \dots, n,\ j = 0, \dots, d\}$$

będzie zbiorem zmiennych nad k. Rozpatrzmy wielomiany $P_0, \dots, P_n \in R[U]$ określone wzorami

$$P_i = \sum_{j=0}^{d} U_{ij}t^j, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wielomiany te spełniają oczywiście założenia Lematu 7.4.3. Rozpatrzmy teraz formy postaci $B_j(U)$ występujące w równości (7.1). Są to formy $(n+1) \times (d+1)$ zmiennych i jest ich $md + e + 1$. Z nierówności

$$(n+1)(d+1) \geqslant (m+1)(d+1) > md + e + 1$$

wynika, że zmiennych jest więcej niż form. Formy te mają więc (na mocy Wniosku 7.2.7) wspólne zero $a \in \mathbb{P}^N$, gdzie $N = (n+1)(d+1) - 1$. Niech $p_i = P_i(a)$, dla $i = 0, \dots, n$. Wtedy $(p_0, \dots, p_n)$ jest niezerowym ciągiem wielomianów z $k[t]$ takim, że $F(p_0, \dots, p_n) = 0$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5 Krzywe algebraiczne

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Każdą rozmaitość quasi-rzutową X taką, że $\dim X = 1$ nazywamy *krzywą* (algebraiczną).

Stwierdzenie 7.5.1. *Każda nieprzywiedlna krzywa w $\mathbb{P}^2$ jest zbiorem zer jednego jednorodnego wielomianu z $k[S_0, S_1, S_2]$.*

Dowód. Wynika to z Twierdzenia 7.1.8. Każda nieprzywiedlna krzywa w $\mathbb{P}^2$ ma bowiem kowymiar równy 1. ⊠

Stwierdzenie 7.5.2. *Każde dwie krzywe w $\mathbb{P}^2$ mają punkt wspólny.*

Dowód. Niech X i Y będą krzywymi w $\mathbb{P}^2$. Z definicji wymiaru wynika, że każda krzywa ma co najmniej jedną składową nieprzywiedlną wymiaru 1. Możemy zatem założyć, że krzywe X i Y są nieprzywiedlne. Istnieją wtedy jednorodne wielomiany $F, G \in k[S_0, S_1, S_2]$ takie, że X jest zbiorem zer wielomianu F i Y jest zbiorem zer wielomianu G (Stwierdzenie 7.5.1). Teza wynika więc z tego, że każde dwa jednorodne wielomiany w $k[S_0, S_1, S_2]$ mają wspólne zero (Wniosek 7.2.7). $\boxtimes$

Rozpatrzmy teraz rozmaitości $\mathbb{P}^2$ oraz $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Rozmaitości te są wymiernie izomorficzne. Wynika to np. ze Stwierdzenia 5.2.1.

Wniosek 7.5.3. *Rozmaitości $\mathbb{P}^2$ i $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nie są regularnie izomorficzne.*

Dowód. Przypuśćmy, że rozważane rozmaitości są regularnie izomorficzne. Wtedy (na mocy Stwierdzenia 7.5.2) każde dwie krzywe w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mają punkt wspólny. Wykażemy jednak, że w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ istnieją dwie krzywe bez punktu wspólnego.

Wiemy (patrz Stwierdzenie 5.2.1), że $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ jest rzutowym zbiorem domkniętym w $\mathbb{P}^3$ wyznaczonym przez jeden jednorodny wielomian

$$S_{00}S_{11} - S_{01}S_{10} \in k[S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}].$$

Niech $X = \mathrm{V_p}(S_{00}, S_{10})$ oraz $Y = \mathrm{V_p}(S_{11}, S_{01})$. Jest oczywiste, że X i Y są rozłącznymi krzywymi w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. $\boxtimes$

8 Lokalny pierścień punktu

8.1 Pierścień kiełków

Niech X będzie rozmaitością quasi-rzutową i niech $p \in X$. Przez $\mathcal{A}_p(X)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich par postaci (U, f), w których U jest otwartym podzbiorem w X zawierającym p oraz $f : U \longrightarrow k$ jest funkcją regularną na U. W zbiorze $\mathcal{A}_p(X)$ wprowadzamy relację typu równoważności $\sim$ zdefiniowaną następująco:

$$(U, f) \sim (V, g) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{istnieje zbiór otwarty } W \subseteq X \text{ taki, że:} \\ (1) \quad p \in W \subseteq U \cap V, \\ (2) \quad f \mid W = g \mid W. \end{array}$$

Klasę abstrakcji elementu (U, f) względem tej relacji oznaczmy przez $[U, f]$ i nazywamy *kiełkiem* punktu p. Zbiór wszystkich klas abstrakcji oznaczamy przez $\mathbb{O}_p(X)$. W zbiorze $\mathbb{O}_p(X)$ definiujemy dodawanie i mnożenie w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcccl} [U, f] & + & [V, g] & = & [U \cap V,\ (f + g) \mid (U \cap V)], \\ [U, f] & \cdot & [V, g] & = & [U \cap V,\ (f \cdot g) \mid (U \cap V)]. \end{array}$$

Jest oczywiste, że powyższe działania są dobrze określone oraz, że zbiór $\mathbb{O}_p(X)$ z takimi działaniami jest przemienną k-algebrą z jedynką $[X, 1]$ i zerem $[X, 0]$. Algebrę tę nazywamy *lokalnym pierścieniem punktu* p *na rozmaitości* X lub *pierścieniem kiełków w punkcie* p *rozmaitości* X. Z algebrą taką stowarzyszony jest k-algebrowy homomorfizm $\nu_p : \mathbb{O}_p(X) \longrightarrow k$ zdefiniowany wzorem

$$\nu_p([U, f]) = f(p)$$

(dla wszystkich $[U, F] \in \mathbb{O}_p(X)$), którego jądrem jest ideał

$$\mathbb{M}_p(X) = \{[U, f];\ f(p) = 0\}.$$

Homomorfizm ten jest surjekcją (gdyż dla każdego elementu $a \in k$ zachodzi równość

$$\nu_p([X, \tilde{a}]) = a,$$

gdzie $\tilde{a} : X \longrightarrow k$ jest funkcją przyjmującą stałą wartość a). Mamy zatem:

Stwierdzenie 8.1.1. *$\mathbb{M}_p(X)$ jest ideałem maksymalnym w $\mathbb{O}_p(X)$ oraz $\mathbb{O}_p(X)/\mathbb{M}_p(X) = k$.* $\boxtimes$

Stwierdzenie 8.1.2. *Pierścień $\mathbb{O}_p(X)$ jest lokalny z jedynym ideałem maksymalnym $\mathbb{M}_p(X)$.*

Dowód. Niech $[U, f] \in \mathbb{O}_p(X) \smallsetminus \mathbb{M}_p(X)$. Wystarczy pokazać, że $[U, f]$ jest elementem odwracalnym w $\mathbb{O}_p(X)$. Z definicji funkcji regularnej (Definicja 3.2.1) wiemy, że istnieje otwarty podzbiór $U_0 \subseteq U$ zawierający p oraz istnieją jednorodne wielomiany F, G tego samego stopnia takie, że $f(u) = F(u)/G(u)$, dla wszystkich $u \in U_0$. Niech $f_0 = f \mid U_0$. Wtedy oczywiście $[U, f] = [U_0, f_0]$ oraz

$F(p) \neq 0$ i $G(p) \neq 0$. Ponieważ $f_0 : U_0 \longrightarrow k$ jest funkcją ciągłą (Stwierdzenie 3.2.8) więc w szczególności $U_1 = f_0^{-1}(k \setminus \{0\})$ jest otwartym podzbiorem w U_0 zawierającym p. Niech $f_1 = f \mid U_1 = f_0 \mid U_1$. Wtedy $[U, f] = [U_1, f_1]$ oraz $f_1(u_1) = F(u_1)/G(u_1)$ i $F(u_1) \neq 0$, dla wszystkich $u_1 \in U_1$. Mamy zatem funkcję regularną $g : U_1 \longrightarrow k$ określoną wzorem $g(u_1) = G(u_1)/F(u_1)$, dla wszystkich $u_1 \in U_1$ i widzimy, że $[U, f][U_1, g] = [U_1, 1] = [X, 1] = 1$. Zatem $[U, f]$ jest odwracalne w $\mathbb{O}_p(X)$. ⊠

Stwierdzenie 8.1.3. *Jeśli U jest otwartym podzbiorem w X zawierającym punkt p, to k-algebry $\mathbb{O}_p(X)$ i $\mathbb{O}_p(U)$ są izomorficzne.*

Dowód. Odwzorowanie $\mathbb{O}_p(X) \longrightarrow \mathbb{O}_p(U)$, $[V, f] \mapsto [V \cap U, f \mid (V \cap U)]$ jest izomorfizmem k-algebr. ⊠

Niech $\varphi : X \longrightarrow Y$ będzie odwzorowaniem regularnym rozmaitości quasi-rzutowych i niech $p \in X$. Mamy wówczas odwzorowanie

$$\mathbb{O}(\varphi) : \mathbb{O}_{\varphi(p)}(Y) \longrightarrow \mathbb{O}_p(X), \quad [V, g] \mapsto [\varphi^{-1}(V), g\varphi].$$

Bez trudu wykazujemy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 8.1.4. *$\mathbb{O}(\varphi)$ jest homomorfizmem k-algebr oraz $\mathbb{O}(\varphi)(\mathbb{M}_{\varphi(p)}(Y)) \subseteq \mathbb{M}_p(X)$.* ⊠

Z powyższych faktów wynika, że $\mathbb{O}$ jest funktorem kontrawariantnym z kategorii rozmaitości quasi-rzutowych z wyróżnionym punktem do kategorii lokalnych k-algebr. W szczególności lokalny pierścień punktu jest niezmiennikiem regularnych izomorfizmów.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Lokalny pierścień punktu rozmaitości afinicznej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Każdy punkt p rozmaitości quasi-rzutowej X posiada otoczenie otwarte będące rozmaitością afiniczną (Stwierdzenie 3.7.2). Ze Stwierdzenia 8.1.3 wynika zatem, że w badaniach dotyczących algebraicznych własności pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$ możemy ograniczyć się tylko do przypadku, w którym X jest rozmaitością afiniczną.

Niech więc $X \subset k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech $p \in X$. Przypomnijmy, że przez $\mathfrak{m}_p$ oznaczamy ideał maksymalny w $k[X]$ będący zbiorem wszystkich funkcji regularnych na X zerujących się w punkcie p.

Stwierdzenie 8.2.1. *Jeśli X jest rozmaitością afiniczną i $p \in X$, to pierścień $\mathbb{O}_p(X)$ jest lokalizacją pierścienia $k[X]$ względem ideału $\mathfrak{m}_p$.*

Dowód. Rozpatrzmy k-algebrowy homomorfizm $\beta : k[X] \longrightarrow \mathbb{O}_p(X)$ określony wzorem

$$\beta(f) = [X, f], \quad \text{dla wszystkich } \ f \in k[X].$$

Niech $g \in k[X] \setminus \mathfrak{m}_p$. Wtedy $g(p) \neq 0$ czyli $\beta(g) = [X, g] \notin \mathbb{M}_p(X)$, a zatem (na mocy Stwierdzenia 8.1.2) $\beta(g)$ jest odwracalnym elementem w $\mathbb{O}_p(X)$. Homomorfizm β indukuje więc k-algebrowy homomorfizm

$$\alpha : k[X]_{\mathfrak{m}_p} \longrightarrow \mathbb{O}_p(X), \quad \frac{f}{g} \longmapsto [X, f][X, g]^{-1}.$$

Pokażemy, że homomorfizm ten jest bijekcją.

Injektywność. Niech $\alpha(\frac{f}{g})$=0, gdzie $f, g \in k[X]$, $g(p) \neq 0$. Wtedy $[X, f][X, g]^{-1} = 0$, czyli $[X, f] = 0 = [X, 0]$. Istnieje zatem otwarty zbiór $U \subseteq X$, zawierający p taki, że $f|U = 0$. Ponieważ $\{p\}$ i

$X \smallsetminus U$ są rozłącznymi zbiorami domkniętymi w X, więc istnieje $h \in k[X]$ takie, że $h(p) = 1$ oraz $h \mid (X \smallsetminus U) = 0$. Wtedy $h \notin \mathfrak{m}_p$ oraz $(hf)(x) = h(x)f(x) = 0$, dla wszystkich $x \in X$. Zatem $\frac{f}{g} = 0$.

Surjektywność. Niech $[U, f] \in \mathbb{O}_p(X)$. Ponieważ $f : U \longrightarrow k$ jest funkcją regularną na U, więc istnieje wielomian $F \in k[T_1, \dots, T_n]$ taki, że $f = F|U$. Niech $f_1 = F|X$. Wtedy $f_1 : X \longrightarrow k$ jest funkcją regularną na X i mamy $[U, f] = [X, f_1] = \alpha(f_1/1)$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Skończona generowalność i noetherowskość

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przykład 8.3.1. Pierścień $\mathbb{O}_0(k^1)$ jest lokalizacją pierścienia $k[t]$, wielomianów jednej zmiennej t nad ciałem k, względem ideału (t). Wynika to ze Stwierdzenia 8.2.1. Każdy element pierścienia $\mathbb{O}_0(k^1)$ jest więc funkcją wymierną (należącą do $k(t)$) postaci $\frac{F}{G}$, gdzie $F, G \in k[t]$, przy czym $G(0) \neq 0$.

Pierścień ten nie jest skończenie generowaną k-algebrą. Istotnie, przypuśćmy, że $\{\frac{F_1}{G_1}, \dots, \frac{F_s}{G_s}\}$ jest skończonym zbiorem generatorów. Niech $G = G_1 \cdots G_s$ i niech $H \in k[t]$ będzie dowolnym wielomianem nierozkładalnym w $k[t]$ takim, że $H(0) \neq 0$. Wtedy $\frac{1}{H} \in \mathbb{O}_0(k^1)$. Istnieje zatem wielomian $P \in k[T_1, \dots, T_s]$ taki, że

$$\frac{1}{H} = P(\frac{F_1}{G_1}, \dots, \frac{F_s}{G_s}).$$

Mnożąc stronami powyższą równość przez odpowiednią potegę wielomianu G oraz przez wielomian H otrzymujemy równość (w pierścieniu $k[t]$) postaci

$$G^r = HQ, \quad Q \in k[t], r \in \mathbb{N},$$

z której wynika, że wielomian G jest podzielny przez H. Niezerowy wielomian G jest więc podzielny przez każdy nierozkładalny wielomian H (różny od t) pierścienia $k[t]$. Jest to sprzeczność, gdyż unormowanych wielomianów postaci H jest nieskończenie wiele. ⊠

Widzimy, na mocy powyższego przykładu, że lokalne pierścienie punktów na rozmaitości nie muszą być skończenie generowanymi k-algebrami.

Łatwo wykazuje się (patrz np. [At-Mac]), że każdy pierścień ułamków pierścienia noetherowskiego jest pierścieniem noetherowskim. Ze Stwierdzeń 8.1.3 i 8.2.1 wynika więc następujące stwierdzenie

Stwierdzenie 8.3.2. *Jeśli X jest rozmaitością quasi-rzutową i $p \in X$, to $\mathbb{O}_p(X)$ jest pierścieniem noetherowskim.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 Lokalny pierścień punktu rozmaitości nieprzywiedlnej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy, że jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną, to ciało $k(X)$, funkcji wymiernych na X, jest ciałem ułamków pierścienia $k[X]$. Ze Stwierdzenia 8.2.1 wynika zatem:

Stwierdzenie 8.4.1. *Jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną i $p \in X$, to $\mathbb{O}_p(X)$ jest pierścieniem wszystkich funkcji wymiernych z $k(X)$, regularnych w punkcie p, tzn.*

$$\mathbb{O}_p(X) = \left\{\frac{f}{g};\ f, g \in k[X], g(p) \neq 0\right\}. \boxtimes$$

Stąd w szczególności wynika:

Stwierdzenie 8.4.2. *Jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną i $p \in X$, to* $k[X] \subseteq \mathbb{O}_p(X) \subseteq k(X)$. ⊠

Stwierdzenie 8.4.3. *Jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością afiniczną, to*

$$k[X] = \bigcap_{p \in X} \mathbb{O}_p(X).$$

Dowód. Inkluzja $\subseteq$ wynika ze Stwierdzenia 8.4.2. Inkluzja $\supseteq$ wynika natomiast ze Stwierdzenia 8.4.1. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 Przestrzenie liniowe postaci $\mathbf{M}^s/\mathbf{M}^{s+1}$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech R będzie pierścieniem (przemiennym z jedynką) i M jego ideałem maksymalnym. Niech s będzie liczbą naturalną. Mamy wówczas dwa ideały

$$M^s \supseteq M^{s+1},$$

a więc dwa R-moduły (moduł i podmoduł). Mamy zatem R-moduł ilorazowy M^s/M^{s+1}. Moduł ten ma strukturę R/M-modułu z mnożeniem $R/M \times M^s/M^{s+1} \longrightarrow M^s/M^{s+1}$ określonym wzorem

$$(r + M)(a + M^{s+1}) = ra + M^{s+1}, \quad \text{dla } \ r \in R, a \in M^s.$$

Zauważmy, że mnożenie to jest dobrze określone. Jeśli $r, r' \in R$, $a, a' \in M^s$ są takie, że $r+M = r'+M$, $a+M^{s+1} = a'+M^{s+1}$, to $r-r' \in M$, $a-a' \in M^{s+1}$, a zatem $(r-r')a \in M^{s+1}$, $r'(a-a') \in M^{s+1}$, czyli $ra - r'a' = (r-r')a + r'(a-a') \in M^{s+1}$.

Zatem M^s/M^{s+1} jest przestrzenią liniową nad ciałem R/M. Jest oczywiste, że jeśli elementy $a_1, \dots, a_r \in M^s$ generują ideał M^s, to warstwy $a_1 + M^{s+1}, \dots, a_r + M^{s+1}$ generują przestrzeń liniową M^s/M^{s+1}. W szczególności mamy:

Stwierdzenie 8.5.1. *Jeśli R jest pierścieniem noetherowskim, to wymiar przestrzeni M^s/M^{s+1} nad R/M jest skończony.* ⊠

Rozpatrzmy teraz pierścień ułamków R_M (lokalizację pierścienia R względem ideału maksymalnego M) i jego jedyny ideał maksymalny MR_M. Mamy w tym przypadku izomorfizm ciał

$$R_M/MR_M \approx (R/M)_{(0)} = R/M, \quad f/g + MR_M \mapsto fg^{-1} + M$$

Mamy zatem dwie przestrzenie liniowe M^s/M^{s+1} i $(MR_M)^s/(MR_M)^{s+1}$ nad tym samym ciałem $k = R/M$.

Stwierdzenie 8.5.2. *Jeśli M jest ideałem maksymalnym w pierścieniu R i $s \geqslant 0$, to przestrzenie M^s/M^{s+1} i $(MR_M)^s/(MR_M)^{s+1}$ są izomorficzne.*

Dowód. Definiujemy odwzorowanie $\alpha : M^s/M^{s+1} \longrightarrow (MR_M)^s/(MR_M)^{s+1}$ przyjmując

$$\alpha(a + M^{s+1}) = \frac{a}{1} + (MR_M)^{s+1}, \quad \text{dla } \ a \in M^s.$$

Bez trudu sprawdzamy, że α jest dobrze określonym różnowartościowym przekształceniem liniowym. Wystarczy teraz udowodnić, że α jest surjekcją. Niech $a/b + (MR_M)^{s+1}$ (gdzie $a \in M^s$, $b \in R \smallsetminus M$) będzie dowolnym elementem przestrzeni $(MR_M)^s/(MR_M)^{s+1}$. Ponieważ $b \notin M$ i M jest ideałem maksymalnym, więc $(b) + M = R$. Istnieją zatem elementy $r \in R$ i $u \in M$ takie, że $1 = rb + u$. Wtedy $a/b - ra/1 \in (MR_M)^{s+1}$. Istotnie,

$$\frac{a}{b} - \frac{ra}{1} = \frac{a - rab}{b} = \frac{a(1-rb)}{b} = \frac{au}{b} \in (MR_M)^{s+1}.$$

Zatem $a/b + (MR_M)^{s+1} = ra/1 + (MR_M)^{s+1} = \alpha(ra + M^{s+1})$. ⊠

Zastosujmy teraz powyższe fakty dla pierścieni $\mathbb{O}_p(X)$, $k[X]$ i ich ideałów maksymalnych $M_p(X)$, $\mathfrak{m}_p(X)$. Ponieważ $\mathbb{O}_p(X)/\mathbb{M}_p(X) = k$, $k[X]/\mathfrak{m}_p = k$ oraz $\mathbb{O}_p(X)$, $k[X]$ są pierścieniami noetherowskimi, więc ze Stwierdzenia 8.5.1 wynikają następujące dwa wnioski.

Wniosek 8.5.3. *Jeśli X jest rozmaitością quasi-rzutową, to każda przestrzeń postaci*

$$\mathbb{M}_p(X)^s/\mathbb{M}_p(X)^{s+1}, \quad s \in \mathbb{N},$$

ma skończony wymiar nad k. ⊠

Wniosek 8.5.4. *Jeśli X jest rozmaitością afiniczną, to każda przestrzeń postaci*

$$\mathfrak{m}_p(X)^s/\mathfrak{m}_p(X)^{s+1}, \quad s \in \mathbb{N},$$

ma skończony wymiar nad k. ⊠

Następny wniosek jest konsekwencją Stwierdzenia 8.5.2.

Wniosek 8.5.5. *Jeśli X jest rozmaitością afiniczną oraz $s \geqslant 0$, to przestrzenie k-liniowe*

$$M_p(X)^s/M_p(X)^{s+1} \quad i \quad \mathfrak{m}_p(X)^s/\mathfrak{m}_p(X)^{s+1}$$

są izomorficzne. ⊠

9 Przestrzeń styczna

W tym rozdziale zakładamy, że $X \subseteq k^n$ jest afinicznym zbiorem domkniętym i $p \in X$. Określimy przestrzeń styczną do X w punkcie p jako zbiór wszystkich prostych w k^n przechodzących przez p i stycznych do X. Przestrzeń tę oznaczać będziemy przez $\mathbb{T}_p X$. Podamy kilka równoważnych opisów tej przestrzeni.

9.1 Prosta styczna

Niech $F_1, \dots, F_r \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ będą takimi wielomianami, że

$$\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$$

oraz niech $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$. Każda prosta w k^n przechodząca przez p jest podzbiorem w k^n postaci

$$L = \{ta + p = (ta_1 + p_1, \dots, ta_n + p_n);\ t \in k\},$$

gdzie $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \smallsetminus (0, \dots, 0)$.

Niech L będzie taką prostą i rozważmy rozmaitość afiniczną $X \cap L$. Rozmaitość ta jest oczywiście zbiorem wszystkich punktów w k^n postaci $t_0 a + p$, gdzie $t_0 \in k$ jest wspólnym zerem wielomianów

$$F_1(ta + p),\ \dots\ , F_r(ta + p) \in k[t].$$

Ponieważ $p \in X \cap L$, więc w szczególności $t_0 = 0$ jest wspólnym zerem tych wielomianów, a zatem każdy z tych wielomianów jest podzielny (w $k[t]$) przez wielomian t. Niech

$$f(t) = \mathrm{NWD}(F_1(ta + p), \dots, F_r(ta + p)).$$

Jeśli co najmniej jeden z wielomianów $F_1(ta + p), \dots, F_r(ta + p)$ jest niezerowy, to $f(t)$ jest wielomianem w $k[t]$ postaci

$$f(t) = t^q g(t), \quad \text{gdzie } q \geqslant 1,\ g(t) \in k[t],\ t \nmid g(t).$$

Definicja 9.1.1. Liczbę q oznaczamy przez $\mathrm{kr}_{p,X}(L)$ i nazywamy *krotnością przecięcia* prostej L z rozmaitością X w punkcie p. Jeśli wszystkie wielomiany $F_1(ta+p), \dots, F_r(ta+p)$ są zerowe, to przyjmujemy $\mathrm{kr}_{p,X}(L) = \infty$.

Lemat 9.1.2. *Krotność* $\mathrm{kr}_{p,X}(L)$ *nie zależy od wyboru generatorów ideału* $\mathrm{I_a}(X)$.

Dowód. Załóżmy, że wielomiany $G_1, \dots, G_s \in k[T]$ również generują ideał $\mathrm{I_a}(X)$ i rozważmy wielomian $g(t) = \mathrm{NWD}(G_1(ta + p), \dots, G_s(ta + p))$. Ponieważ $(F_1, \dots, F_r) = (G_1, \dots, G_s)$, więc $F_i = H_{i1}G_1 + \dots + H_{is}G_s$, dla $i = 1, \dots, r$, gdzie $H_{i1}, \dots, H_{is} \in k[T]$. Mamy wówczas (w pierścieniu $k[t]$) równości postaci

$$F_i(ta + p) = H_{i1}(ta + p)G_1(ta + p) + \dots + H_{is}(ta + p)G_s(ta + p),$$

dla $i = 1, \dots, r$, z których wynika, że $g(t) \mid f(t)$. Analogicznie pokazujemy, że $f(t) \mid g(t)$. ⊠

Definicja 9.1.3. Mówimy, że prosta L jest *styczna do* X *w punkcie* p jeśli $\mathrm{kr}_{p,X}(L) \geqslant 2$.

Przykład 9.1.4. Załóżmy, że $\mathrm{char}(k) = 0$. Niech $X = \mathrm{V_a}(F) \subset k^2$, gdzie $F = T_1^2 + T_2^2 - 25 \in k[T_1, T_2]$ i niech $p = (3, 4)$. Wtedy $p \in X$, $\mathrm{I_a}(X) = (F)$ i każda prosta L w k^2 przechodząca przez p jest zbiorem punktów $(x_1, x_2) \in k^2$ postaci $x_1 = 3 + a_1 t$, $x_2 = 4 + a_2 t$, gdzie $t \in k$ oraz $a = (a_1, a_2) \in k^2 \smallsetminus (0, 0)$. Jeśli L jest taką prostą, to

$$f(t) = F(ta + p) = F(ta_1 + 3, ta_2 + 4) = (a_1^2 + a_2^2)t^2 + (6a_1 + 8a_2)t.$$

Widzimy zatem, że L jest prostą styczną do X w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy $6a_1 + 8a_2 = 0$. Stąd łatwo wnioskujemy, że jedyną prostą L styczną do X w punkcie p jest prosta

$$\begin{cases} x_1 &= 3 + 4t, \\ x_2 &= 4 - 3t, \end{cases}$$

czyli prosta $\mathrm{V_a}(3T_1 + 4T_2 - 25)$. ⊠

Badając proste styczne do X w punkcie p wygodnie jest zmienić układ współrzędnych tak by punkt p stał się punktem $0 = (0, \dots, 0)$.

Załóżmy więc, że $p = 0 = (0, \dots, 0)$. Ponieważ $p \in X$ więc wielomiany $F_1, \dots, F_r$ nie mają wyrazów stałych. Niech

$$F_i = L_i + G_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

gdzie L_i jest liniową składową jednorodną wielomianu F_i i G_i jest sumą jednomianów stopni $\geqslant 2$. Każda prosta L, przechodząca przez $p = 0$, ma postać $\{at;\ t \in k\}$, gdzie $a \in k^n \smallsetminus \{0\}$.

Stwierdzenie 9.1.5. *Prosta $L = \{at;\ t \in k\}$ jest styczna do X w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $L_1(a) = \cdots = L_r(a) = 0$.*

Dowód. Każdy wielomian $F_i(at)$, dla $i = 1, \dots, r$, ma postać

$$F_i(at) = L_i(at) + G_i(at) = L_i(a)t + H_i(t)t^2, \tag{9.1}$$

gdzie $H_i(t) \in k[t]$. Niech L będzie prostą styczną do X w punkcie 0. Wtedy $\mathrm{kr}_{0,X}(L) \geqslant 2$, a zatem wielomiany $F_1(at), \dots, F_r(at)$ są podzielne przez t^2 i z (9.1) wynika, że $L_1(a) = \cdots = L_r(a) = 0$.

Załóżmy teraz, że $L_1(a) = \cdots = L_r(a) = 0$. Wtedy, na mocy (9.1), wszystkie wielomiany $F_1(at), \dots, F_r(at)$ są podzielne przez t^2. Największy wspólny dzielnik tych wielomianów jest więc też podzielny przez t^2, czyli $\mathrm{kr}_{0,X}(L) \geqslant 2$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2 Przestrzeń styczna jako zbiór prostych stycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech, tak jak w poprzednim podrozdziale, $X \subseteq k^n$ będzie domkniętym zbiorem afinicznym, $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ i niech $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$.

Definicja 9.2.1. Zbiór wszystkich punktóe leżących na prostych w k^n, stycznych do X w punkcie p, oznaczmy przez $\mathbb{T}_p X$ i nazywamy *przestrzenią styczną* do X w punkcie p.

W książkach [Szaf72] i [Szaf88] zbiór $\mathbb{T}_p X$ oznaczany jest przez Θ_p lub $\Theta_{p,X}$.

Ze Stwierdzenia 9.1.5 wynika następujący opis przestrzeni stycznej w punkcie $p = 0$.

Stwierdzenie 9.2.2. *Niech L_j, dla $j = 1, \dots, r$, będzie liniową formą wielomianu F_j. Wtedy* $\mathbb{T}_0 X = \mathrm{V_a}(L_1, \dots, L_r)$. ⊠

Jeśli L jest liniową formą wielomianu $H \in k[T]$, to dobrze wiadomo, że $L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(0)T_i$. Wiadomo również, że każdy wielomian $H \in k[T]$ posiada dokładnie jedno rozwinięcie Taylora w punkcie p, tzn.

$$H = H_0 + H_1 + \cdots,$$

gdzie każde H_i jest wielomianem jednorodnym stopnia i względem $T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n$. W szczególności $H_0 = H(p)$ oraz $H_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i)$. Wielomian H_1 odgrywać będzie istotną rolę w naszych rozważaniach.

Definicja 9.2.3. Wielomian H_1 oznaczamy przez d_pH i nazywamy *różniczką wielomianu H w punkcie p*. Zatem, jeśli $H \in k[T]$, to

$$d_pH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i).$$

Z definicji tej otrzymujemy:

Stwierdzenie 9.2.4. *Niech $F, G \in k[T]$, $\alpha \in k$. Wtedy:*

(1) $d_p(\alpha F) = \alpha(d_pF)$,

(2) $d_p(F + G) = d_pF + d_pG$,

(3) $d_p(FG) = F(p)d_pG + G(p)d_pF$. $\boxtimes$

Zanotujmy następujące stwierdzenie, które jest prostą konsekwencją Stwierdzenia 9.2.2 zastosowanego po odpowiedniej zamianie układu współrzędnych.

Stwierdzenie 9.2.5. *Niech $X \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech $p \in X$. Niech $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T]$. Wtedy przestrzeń styczna $\mathbb{T}_pX$ jest zbiorem wszystkich wspólnych zer w k^n wielomianów $d_pF_1, \dots, d_pF_r$, tzn.*

$$\mathbb{T}_pX = \mathrm{V_a}(d_pF_1, \dots, d_pF_r). \boxtimes$$

Jeśli $p \in k^n$ jest dowolnym punktem, to k^n ma strukturę przestrzeni liniowej nad k z zerem w punkcie p. Działania dodawanie i mnożenie przez skalar są wtedy określone następująco:

$$\begin{aligned} a \oplus_p b &= ((a-p) + (b-p)) + p = a + b - p, \\ \alpha *_p a &= \alpha(a - p) + p. \end{aligned}$$

Stwierdzenie 9.2.6. *Jeśli $H \in k[T]$, to funkcja*

$$a \longmapsto (d_pH)(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(a_i - p_i),$$

jest odwzorowaniem liniowym z przestrzeni $(k^n, \oplus_p, *_p)$ do k.

Dowód. Stwierdzenie to jest oczywiste w przypadku, gdy $p = 0$. Sprawdźmy to w ogólnym przypadku. Niech $a, b \in k^n$, $\alpha \in k$. Wtedy:

$$\begin{aligned} (d_pH)(a \oplus_p b) &= (d_pH)(a + b - p) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)((a_i + b_i - p_i) - p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(a_i - p_i) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(b_i - p_i) \\ &= (d_pH)(a) + (d_pH)(b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_pH)(\alpha *_p a) &= (d_pH)(\alpha(a - p) + p) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)(\alpha(a_i - p_i) + p_i - p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial T_i}(p)\alpha(a_i - p_i) \\ &= \alpha(d_pH)(a). \boxtimes \end{aligned}$$

Stwierdzenie 9.2.7. *$\mathbb{T}_pX$ jest przestrzenią liniową nad k. Jest to podprzestrzeń liniowa przestrzeni $(k^n, \oplus_p, *_p)$*

Dowód. Wynika to z poprzednich stwierdzeń. Mamy bowiem równość:

$$\mathbb{T}_pX = \mathrm{Ker}(d_pF_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(d_pF_r). \boxtimes$$

Spójrzmy na kilka przykładów przestrzeni stycznych.

Przykład 9.2.8. $\mathbb{T}_pk^n = k^n$. Istotnie, $\mathrm{I_a}(k^n) = 0$, więc $\mathbb{T}_pk^n = \mathrm{V_a}(d_p0) = \mathrm{V_a}(0) = k^n$. ⊠

Przykład 9.2.9. Niech $X = \mathrm{V_a}(F)$, gdzie $F \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$, będzie hiperpowierzchnią w k^n i niech $p \in X$. Załóżmy, że $\mathrm{I_a}(X) = (F)$. Wtedy $\mathbb{T}_pX$ jest zbiorem zer jednego wielomianu d_pF (liniowego względem $T_1 - p_1, \dots, T_n - p_n$). Jeśli $d_pF = 0$, to $\mathbb{T}_pX = k^n$ i wtedy $\dim \mathbb{T}_pX = \dim_k T_pX = n$. Jeśli $d_pF \neq 0$, to $\dim \mathbb{T}_pX = \dim_k \mathbb{T}_pX = n - 1$. ⊠

Przykład 9.2.10. Niech $X = \mathrm{V_a}(F)$, gdzie $F = T_2(T_2 - T_1^2) \in k[T_1, T_2]$. Wtedy X jest przywiedlnym zbiorem afinicznym w k^2 zawierającym 0. Przestrzeń $\mathbb{T}_0X$ jest oczywiście równa k^2. Składowymi nieprzywiedlnymi zbioru X są zbiory $\mathrm{V_a}(T_2)$ i $\mathrm{V_a}(T_2 - T_1^2)$, które zawierają 0. Zbiory te mają w punkcie 0 wspólną przestrzeń styczną $\mathrm{V_a}(T_2)$, która jest różna od k^2. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3 Różniczka funkcji regularnej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq k^n$ będzie afinicznym zbiorem domkniętym i niech $p \in X$. Przypomnijmy, że jeśli $F \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$, to $d_pF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i)$.

Lemat 9.3.1. *Jeśli $F \in \mathrm{I_a}(X)$, to $(d_pF)(a) = 0$, dla wszystkich $a \in \mathbb{T}_pX$.*

Dowód. Niech $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$ i niech $a \in \mathbb{T}_pX$. Wtedy $(d_pF_1) = \cdots = (d_pF_r)(a) = 0$ (Stwierdzenie 9.2.5) oraz $F = G_1F_1 + \cdots + G_rF_r$, dla pewnych $G_1, \dots, G_r \in k[T]$. Mamy zatem:

$$\begin{array}{rcl} (d_pF)(a) & = & (d_p(\sum_{j=1}^r G_jF_j))(a) \\ & = & \sum_{j=1}^r (d_p(G_jF_j))(a) \\ & = & \sum_{j=1}^r (G_j(p)d_pF_j)(a) + \sum_{j=1}^r (F_j(p)d_pG_j)(a) \\ & = & \sum_{j=1}^r G_j(p)0 + \sum_{j=1}^r 0(d_pG_j)(a) \\ & = & 0. \boxtimes \end{array}$$

Definicja 9.3.2. Niech $f \in k[X]$ i niech $F \in k[T]$ będzie wielomianem takim, że $f = F \mid X$. *Różniczką funkcji f w punkcie p* nazywamy odwzorowanie liniowe $d_pf : \mathbb{T}_pX \longrightarrow k$ określone wzorem

$$d_pf = (d_pF) \mid \mathbb{T}_pX.$$

Z Lematu 9.3.1 wynika, że powyższa definicja jest poprawna; nie zależy od wyboru wielomianu $F \in k[T]$. Liniowość odwzorowania d_pf wynika ze Stwierdzenia 9.2.6. Zanotujmy prostą konsekwencję Stwierdzenia 9.2.4.

Stwierdzenie 9.3.3. *Niech $f, g \in k[X]$, $\alpha \in k$. Wtedy:*

(1) $d_p(\alpha f) = \alpha(d_p f)$,

(2) $d_p(f + g) = d_p f + d_p g$,

(3) $d_p(fg) = f(p) d_p g + g(p) d_p f$. ⊠

W dalszym ciągu rozważać będziemy k-liniową przestrzeń

$$(\mathbb{T}_p X)^* = \mathrm{Hom}_k(\mathbb{T}_p X, k),$$

wszystkich przekształceń liniowych z $\mathbb{T}_p X$ do k. Przestrzeń tę nazywamy *przestrzenią kostyczną w punkcie p rozmaitości X.*

Zauważmy, że jeśli $f \in k[X]$, to $d_p f \in (\mathbb{T}_p X)^*$. Mamy zatem odwzorowanie

$$d_p : k[X] \longrightarrow (\mathbb{T}_p X)^*, \quad f \mapsto d_p f,$$

które (na mocy Stwierdzenia 9.3.3) jest liniowe. Rozważmy obcięcie tego odwzorowania do ideału maksymalnego $\mathfrak{m}_p(X) = \{f \in k[X];\ f(p) = 0\}$.

Stwierdzenie 9.3.4. *Jeśli $f \in \mathfrak{m}_p(X)^2$, to $d_p f = 0$.*

Dowód. Niech $f = f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s$, gdzie $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_s \in \mathfrak{m}_p(X)$. Stosując wzory zawarte w Stwierdzeniu 9.3.3 otrzymujemy:

$$\begin{array}{rcl} d_p f & = & \sum_{j=1}^{s} d_p(f_j g_j) \\ & = & \sum_{j=1}^{s} (f_j(p) d_p(g_j) + g_j(p) d_p(f_j)) \\ & = & \sum_{j=1}^{s} (0 d_p(g_j) + 0 d_p(f_j)) = 0. \ \boxtimes \end{array}$$

W dowodzie następnego faktu wykorzystamy poniższy lemat z algebry liniowej.

Lemat 9.3.5. *Niech $G, L_1, \ldots, L_r \in k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$ będą formami liniowymi. Jeśli*

$$\mathrm{V_a}(L_1, \ldots, L_r) \subseteq \mathrm{V_a}(G),$$

to $G = \alpha_1 L_1 + \ldots, \alpha_r L_r$, dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in k$.

Dowód. Niech $G = a_{01} T_1 + \cdots + a_{0n} T_n$ i niech $L_j = a_{i1} T_1 + \cdots + a_{in} T_n$, $i = 1, \ldots, r$, gdzie każdy element postaci a_{ij} należy do k. Rozpatrzmy macierz $A = [a_{ij}]_{r \times n}$, stowarzyszoną z formami $L_1, \ldots, L_r$ oraz macierz $B = [a_{ij}]_{(m+1) \times n}$, stowarzyszoną z formami $G, L_1, \ldots, L_r$. Z algebry liniowej wiadomo, że $\mathrm{V_a}(L_1, \ldots, L_r)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni k^n wymiaru $n - \mathrm{rz}(A)$. Podobnie $\mathrm{V_a}(G, L_1, \ldots, L_r)$ jest taką podprzestrzenią wymiaru $n - \mathrm{rz}(B)$. Ponieważ $\mathrm{V_a}(L_1, \ldots, L_r) \subseteq \mathrm{V_a}(G)$, więc $\mathrm{V_a}(G, L_1, \ldots, L_r) = \mathrm{V_a}(L_1, \ldots, L_r)$, a zatem $\mathrm{rz}(B) = \mathrm{rz}(A)$. To dalej implikuje (na mocy definicji rzędu macierzy), że przestrzenie liniowe $\mathrm{Lin}_k(G, L_1, \ldots, L_r)$ oraz $\mathrm{Lin}_k(L_1, \ldots, L_r)$ są identyczne. Zatem $G = \alpha_1 L_1 + \cdots \alpha_r L_r$, dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in k$. ⊠

Twierdzenie 9.3.6. *Odwzorowanie $d_p : \mathfrak{m}_p(X) \longrightarrow (\mathbb{T}_p X)^*$, $f \longrightarrow d_p f$, indukuje izomorfizm przestrzeni liniowych $\mathfrak{m}_p(X)/\mathfrak{m}_p(X)^2$ i $(\mathbb{T}_p X)^*$.*

Dowód. Zmieniając odpowiednio układ współrzędnych możemy założyć, że $p = 0$. Oznaczmy $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0(X)$. Wystarczy pokazać, że d_0 jest surjekcją oraz $\mathrm{Ker} d_0 = \mathfrak{m}^2$.

Surjektywność. Niech $\varphi \in (\mathbb{T}_0 X)^*$. Wtedy $\varphi : \mathbb{T}_0 X \longrightarrow k$ jest przekształceniem liniowym i $\mathbb{T}_0 X$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni k^n. Przekształcenie φ możemy oczywiście przedłużyć do przekształcenia liniowego $\psi : k^n \longrightarrow k$. Istnieje zatem liniowy wielomian $F = q_1 T_1 + \cdots + q_n T_n \in k[T]$ taki, że $\psi(a) = F(a)$, dla wszystkich $a \in k^n$. W szczególności $\varphi(b) = F(b)$, dla wszystkich $b \in \mathbb{T}_0 X$. Rozpatrzmy funkcję regularną $f = F \mid X$. Ponieważ $f(0) = F(0) = 0$, więc $f \in \mathfrak{m}$. Jest oczywiste, że $d_0 f = \varphi$.

Jądro. Wiemy, na mocy Stwierdzenia 9.3.4, że $\mathfrak{m}^2 \subseteq \mathrm{Ker}\ d_0$. Wykażemy teraz, że $\mathfrak{m}^2 \supseteq \mathrm{Ker}\ d_0$. Niech $d_0 f = 0$, gdzie $f \in \mathfrak{m}$. Niech $G \in k[T]$ będzie takim wielomianem, że $f = G \mid X$. Wtedy $0 = d_0 f = d_0 G \mid (\mathbb{T}_0 X)$. Załóżmy, że $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$. Wtedy $\mathbb{T}_0 X = \mathrm{V_a}(d_0 F_1, \dots, d_0 F_r)$ (Stwierdzenie 9.2.5), a zatem $\mathrm{V_a}(d_0 F_1, \dots, d_0 F_r) \subseteq \mathrm{V_a}(d_0 G)$ i stąd wynika (na mocy Lematu 9.3.5), że

$$d_0 G = \alpha_1 d_0 F_1 + \cdots + d_0 F_r,$$

dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in k$. Rozpatrzmy wielomian

$$H = G - (\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_r F_r).$$

Wielomian ten nie posiada składowych jednorodnych stopni 0 i 1. Zatem $H \in (T_1, \dots, T_n)^2$. Niech $t_1, \dots, t_n$ będą funkcjami regularnymi na X wyznaczonymi odpowiednio przez wielomiany $T_1, \dots, T_n$. Wtedy $\mathfrak{m} = (t_1, \dots, t_n)$ oraz $f = G \mid X = H \mid X \in \mathfrak{m}^2$. ⊠

Wniosek 9.3.7. *Przestrzenie liniowe* $\mathbb{T}_p X$ *i* $(\mathfrak{m}_p(X)/\mathfrak{m}_p(X)^2)^*$ *są izomorficzne.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4 Przestrzeń styczna i lokalne derywacje

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zakładamy, tak jak w poprzednich podrozdziałach, że $X \subseteq k^n$ jest domkniętym zbiorem afinicznym i $p \in X$.

Niech R będzie podpierścieniem pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$ zawierającym ciało k.

Definicja 9.4.1. *Lokalną derywacją w punkcie p pierścienia R* nazywamy każdą funkcję $\delta : R \longrightarrow k$ spełniającą następujące warunki:

(1) $\delta(\alpha) = 0$, dla $\alpha \in k$,

(2) $\delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$, dla $f, g \in R$,

(3) $\delta(fg) = f(p)\delta(g) + g(p)\delta(f)$, dla $f, g \in R$.

Definicja 9.4.2. Zbiór wszystkich lokalnych derywacji w punkcie p pierścienia R oznaczamy przez $\mathbb{D}_p(R)$.

Jest oczywiste, że jeśli δ_1, δ_2 są lokalnymi derywacjami w punkcie p pierścienia R, to funkcja $\delta_1 + \delta_2$ również jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia R. Ponadto, jeśli $\delta \in \mathbb{D}_p(R)$ i $\alpha \in k$, to $\alpha\delta \in \mathbb{D}_p(R)$. Mamy zatem:

Stwierdzenie 9.4.3. $\mathbb{D}_p(R)$ *jest przestrzenią liniową nad ciałem k.* ⊠

Dzięki homomorfizmowi $\nu_p | R : R \longrightarrow k$, $f \mapsto \nu_p(f) = f(p)$, ciało k ma strukturę R-modułu. Każda więc lokalna derywacja w punkcie p pierścienia R to nic innego jak k-derywacja R-modułu k (Patrz [Now95a] Podrozdział 1.1).

Stwierdzenie 9.4.4. *Niech $H = H(Z_1, \dots, Z_s)$ będzie wielomianem o współczynnikach z k. Niech $f_1, \dots, f_s \in R$ oraz niech $\delta \in \mathbb{D}_p(R)$. Wtedy $H(f_1, \dots, f_s) \in R$ i zachodzi równość:*

$$\delta(H(f_1, \dots, f_r)) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial Z_j}(f_1, \dots, f_r)(p)\delta(f_j).$$

Dowód. Patrz [Now95a] Podrozdział 1.2. ⊠

Stwierdzenie 9.4.5. *Niech $\delta \in \mathbb{D}_p(R)$. Niech $f, g \in R$ będą takimi elementami, że $f/g \in R$. Wtedy*

$$\delta(f/g) = \frac{g(p)\delta(f) - f(p)\delta(g)}{g(p)^2}.$$

Dowód. $0 = \delta(1) = \delta(g \cdot \frac{1}{g}) = g(p)\delta(\frac{1}{g}) + \frac{1}{g(p)}\delta(g)$. Stąd $\delta(\frac{1}{g}) = -\frac{\delta(g)}{g(p)^2}$. Zatem

$$\begin{aligned} \delta(\tfrac{f}{g}) &= \delta(f\tfrac{1}{g}) = \tfrac{1}{g(p)}\delta(f) + f(p)\delta(\tfrac{1}{g}) \\ &= \tfrac{1}{g(p)}\delta(f) - \tfrac{f(p)\delta(g)}{g(p)^2} = \tfrac{g(p)\delta(f) - f(p)\delta(g)}{g(p)^2}. \end{aligned}$$ ⊠

Wiemy (Stwierdzenie 8.2.1), że pierścień $\mathbb{O}_p(X)$ jest lokalizacją pierścienia $k[X]$ względem ideału $\mathfrak{m}_p(X)$. Niech $\varepsilon : k[X] \longrightarrow \mathbb{O}_p(X)$, $f \mapsto f/1$, będzie naturalnym homomorfizmem. Jeśli $\delta \in \mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X))$, to odwzorowanie $d = \delta\varepsilon : k[X] \longrightarrow k$ jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[X]$. Istotnie, jeśli $f, g \in k[X]$, to $d(fg) = \delta\varepsilon(fg) = \delta(\varepsilon(f)\cdot\varepsilon(g)) = \varepsilon(f)(p)\delta\varepsilon(g) + \varepsilon(g)(p)\delta\varepsilon(f) = f(p)d(g) + g(p)d(f)$.

Twierdzenie 9.4.6. *Odwzorowanie $\alpha : \mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X)) \longrightarrow \mathbb{D}_p(k[X])$, $\delta \mapsto \delta\varepsilon$, jest k-izomorfizmem przestrzni liniowych.*

Dowód. Odwzorowanie α jest oczywiście przekształceniem liniowym. Pokażemy, że α jest bijekcją.

Injektywność. Niech $\delta \in \mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X))$ i $\alpha(\delta) = 0$. Wtedy $\delta\varepsilon = 0$, więc $\delta(f/1) = 0$, dla wszystkich $f \in k[X]$. Jeśli teraz $f, g \in k[X]$, $g \notin \mathfrak{m}_p(X)$, to (patrz Stwierdzenie 9.4.5) $\delta(f/g) = \delta(f/1 \cdot 1/(g/1)) = 0$. Zatem $\delta = 0$. Pokazaliśmy więc, że $\mathrm{Ker}\alpha = 0$.

Surjektywność. Niech $d \in \mathbb{D}_p(k[X])$. Definiujemy $\delta : \mathbb{O}_p(X) \longrightarrow k$ przyjmując

$$\delta(f/g) = \frac{g(p)d(f) - f(p)d(g)}{g(p)^2}, \quad \text{dla } \ f, g \in k[X], \ g \notin \mathfrak{m}_p(X).$$

Standardowym rachunkiem sprawdzamy, że δ jest dobrze określone oraz, że δ jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$. Jest oczywiste, że $d = \alpha(\delta)$. ⊠

Wniosek 9.4.7. *Przestrzenie liniowe $\mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X))$ i $\mathbb{D}_p(k[X])$ są izomorficzne.* ⊠

Niech $a \in \mathbb{T}_pX$ będzie ustalonym elementem. Z własności różniczek funkcji regularnych na X (podanych w Stwierdzeniu 9.3.3) wynika, że przyporządkowanie $k[X] \longrightarrow k$, $f \mapsto (d_pf)(a)$, jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[X]$.

Twierdzenie 9.4.8. *Odwzorowanie $\beta : \mathbb{T}_pX \longrightarrow \mathbb{D}_p(k[X])$, określone wzorem*

$$\beta(a)(f) = (d_pf)(a), \quad \text{dla } \ a \in \mathbb{T}_pX, \ f \in k[X],$$

jest k-izomorfizmem przestrzeni liniowych.

Dowód. Odwzorowanie β jest oczywiście przekształceniem liniowym. Pokażemy, że β jest bijekcją.

Injektywność. Niech $a \in \mathbb{T}_p X$ i niech $\beta(a) = 0$. Pokażemy, że a jest zerem przestrzeni $\mathbb{T}_p X$, tzn., pokażemy, że $a = p$. Niech $f \in k[X]$ i niech $F \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ takie, że $f = F \mid X$. Wtedy

$$0 = \beta(a)(f) = (d_p f)(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial T_i}(p)(a_i - p_i).$$

W szczególności dla $f = t_i = T_i \mid X$ mamy $0 = a_i - p_i$ i tak jest dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Zatem $a = p$.

Surjektywność. Niech $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$ i niech, tak jak poprzednio, $t_i = T_i \mid X$, dla $i = 1, \dots, n$. Oznaczmy $a_i = \delta(t_i) + p_i$, dla $i = 1, \dots, n$ i niech $a = (a_1, \dots, a_n)$. Pokażemy, że $a \in \mathbb{T}_p X$. W tym celu wystarczy pokazać (patrz Stwierdzenie 9.2.5), że $(d_p F_1)(a) = \cdots = (d_p F_r)(a) = 0$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T]$ są takimi wielomianami, że $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$. Niech $j \in \{1, \dots, r\}$. Mamy wtedy:

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & \delta(0) = \delta(F_j \mid X) \\
 & = & \delta(F_j(t_1, \dots, t_n)) \\
 & \overset{9.4.4}{=} & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(t_1, \dots, t_n)(p)\delta(t_i) \\
 & = & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p)(a_i - p_i) \\
 & = & (d_p F_j)(a).
\end{array}$$

Zatem $a \in \mathbb{T}_p X$. Zauważmy teraz, że

$$\beta(a)(t_i) = (d_p t_i)(a) = (d_p T_i)(a) = a_i - p_i = \delta(t_i),$$

dla $i = 1, \dots, n$. Ponieważ funkcje $t_1, \dots, t_n$ generują k-algebrę $k[X]$, więc $\beta(a) = \delta$. ⊠

Wniosek 9.4.9. *Przestrzenie liniowe* $\mathbb{T}_p X$ *i* $\mathbb{D}_p(k[X])$ *są izomorficzne.* ⊠

Z Wniosków 9.4.9 i 9.3.7 otrzymujemy następny wniosek, opisujący przestrzeń $\mathbb{D}_p(k[X])$ przy pomocy ideału $\mathfrak{m}_p(X) = \{f \in k[X];\ f(p) = 0\}$.

Wniosek 9.4.10. *Przestrzenie liniowe* $\mathbb{D}_p(k[X])$ *i* $(\mathfrak{m}_p(X)/\mathfrak{m}_p(X)^2)^*$ *są izomorficzne.* ⊠

Podamy teraz inny dowód tego wniosku.

Dowód. Oznaczmy $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p(X)$. Jeśli $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$, to przez δ_p oznaczamy odwzorowanie z $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ do k zdefiniowane wzorem

$$\delta_p(a + \mathfrak{m}^2) = \delta(a), \quad \text{dla } a \in \mathfrak{m}.$$

Ponieważ $\delta(\mathfrak{m}^2) = 0$, więc odwzorowanie δ_p jest dobrze określone. Jest oczywiste, że $\delta_p \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Mamy zatem przekształcenie liniowe

$$\gamma : \mathbb{D}_p(k[X]) \longrightarrow \delta_p \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*, \quad \delta \mapsto \delta_p.$$

Pokażemy, że γ jest bijekcją.

Injektywność. Niech $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$, $\gamma(\delta) = 0$. Wtedy $\delta(a) = \delta_p(a + \mathfrak{m}^2) = 0$, dla wszystkich $a \in \mathfrak{m}$. Jeśli $f \in k[X]$, to $f - f(p) \in \mathfrak{m}$, a zatem $\delta(f) = \delta(f - f(p)) = 0$, tzn., $\delta = 0$.

Surjektywność. Niech $h : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k$ będzie przekształceniem liniowym. Definiujemy odwzorowanie $\delta : k[X] \longrightarrow k$, przyjmując:

$$\delta(f) = h((f - f(p)) + \mathfrak{m}^2), \quad \text{dla } f \in k[X].$$

Pokażemy, że δ jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[X]$. Niech $f, g \in k[X]$. Wtedy

$$fg - f(p)g - g(p)f + f(p)g(p) = (f - f(p))(g - g(p)) \in \mathfrak{m}^2.$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
\delta(fg) &= h(fg - f(p)g(p) + \mathfrak{m}^2) \\
&= h(fg - f(p)g - g(p)f + f(p)g(p) - 2f(p)g(p) + f(p)g + g(p)f + \mathfrak{m}^2) \\
&= h(f(p)g + g(p)f - 2f(p)g(p) + \mathfrak{m}^2) \\
&= h(f(p)(g - g(p)) + g(p)(f - f(p)) + \mathfrak{m}^2) \\
&= f(p)h(g - g(p) + \mathfrak{m}^2) + g(p)h(f - f(p) + \mathfrak{m}^2) \\
&= f(p)\delta(g) + g(p)\delta(f).
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$. Jeśli $f \in \mathfrak{m}$, to

$$\gamma(\delta)(f + \mathfrak{m}^2) = \delta(f) = h(f - 0 + \mathfrak{m}^2) = h(f - f(p) + \mathfrak{m}^2) = h(f + \mathfrak{m}^2).$$

Zatem $h = \gamma(\delta)$. ⊠

Podaliśmy kilka równoważnych opisów przestrzni stycznej $\mathbb{T}_pX$. Zbierzmy te opisy w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9.4.11. *Jeśli $X \subseteq k^n$ jest rozmaitością afiniczną i $p \in X$, to następujące przestrzenie liniowe (nad ciałem k) są izomorficzne:*

(1) *$\mathbb{T}_pX$, jako zbiór wszystkich prostych w k^n, stycznych do X w punkcie p,*
(2) *$\mathbb{D}_p(k[X])$,*
(3) *$\mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X))$,*
(4) *$(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$, gdzie $\mathfrak{m}_p = \{f \in k[X];\ f(p) = 0\}$,*
(5) *$(M_p/M_p^2)^*$, gdzie M_p jest jedynym ideałem maksymalnym w $\mathbb{O}_p(X)$.*

Dowód.
(1) $\approx$ (4): Twierdzenie 9.3.6;
(2) $\approx$ (3): Twierdzenie 9.4.6;
(1) $\approx$ (2): Twierdzenie 9.4.8;
(2) $\approx$ (4): wynika z powyższych równoważności; inny dowód jest po Wniosku 9.4.10;
(4) $\approx$ (5): Wniosek 8.5.5. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5 Derywacje lokalne pierścienia wielomianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy (patrz Przykład 9.2.8), że przestrzeń $\mathbb{T}_pk^n$ jest izomorficzna z przestrzenią liniową k^n. Ponieważ pierścień $k[k^n]$ jest pierścieniem wielomianów $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$, więc w języku lokalnych derywacji powyższy fakt można wysłowić następująco.

Stwierdzenie 9.5.1. *Niech $p \in k^n$. Dla każdego $a \in k^n$ istnieje dokładnie jedna lokalna w punkcie p derywacja $\delta : k[T] \longrightarrow k$ taka, że $\delta(T_i) = a_i$, dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.*

Dowód. Odwzorowanie $\delta : k[T] \longrightarrow k$ określone wzorem

$$\delta(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial T_i}(p)a_i, \quad \text{dla } F \in k[T],$$

jest taką lokalną derywacją. Jedyność jest oczywista. ⊠

Niech $X \subseteq k^n$ będzie rozmaitością afiniczną i niech $p \in X$. Mamy wtedy dwie przestrzenie styczne w punkcie p. Mianowicie $\mathbb{T}_p X$ i $\mathbb{T}_p k^n$. Przestrzenie te są izomorficzne odpowiednio z przestrzeniami $\mathbb{D}_p(k[X])$ i $\mathbb{D}_p(k[T])$.

Niech $\eta : k[T] \longrightarrow k[T]/\mathrm{I_a}(X) = k[X]$ będzie homomorfizmem naturalnym. Homomorfizm ten utożsamiamy z odwzorowaniem $F \mapsto F \mid X$. Jeśli $\delta : k[X] \longrightarrow k$ jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[X]$, to $\delta\eta : k[T] \longrightarrow k$ jest lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[T]$. Istotnie, niech $F, G \in k[T]$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \delta\eta(FG) &= \delta(\eta(F)\eta(G)) \\ &= \eta(G)(p)\delta\eta(F) + \eta(F)(p)\delta\eta(G) \\ &= G(p)\delta\eta(F) + F(p)\delta\eta(G). \end{aligned}$$

Mamy zatem odwzorowanie liniowe $\tau : \mathbb{D}_p(k[X]) \longrightarrow \mathbb{D}_p(k[T]),\ \ \delta \mapsto \delta\eta$.

Stwierdzenie 9.5.2.

(1) *Odwzorowanie τ jest różnowartościowe.*

(2) *Niech $d \in \mathbb{D}_p(k[T])$. Wtedy $d \in \mathrm{Im}\ \tau \iff d \mid \mathrm{I_a}(X) = 0$.*

Dowód. (1). Niech $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$, $\tau(\delta) = 0$. Wtedy $\delta\eta = 0$, więc $\delta(k[X]) = \delta\eta(k[T]) = 0$. To oznacza, że $\mathrm{Ker}\ \tau = 0$.

(2). Jeśli $d \in \mathrm{Im}\ \tau$, to $d = \tau(\delta) = \delta\eta$, dla pewnej derywacji $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$. Wtedy $d(\mathrm{I_a}(X)) = \delta\eta(\mathrm{I_a}(X)) = \delta(0) = 0$.

Załóżmy, że $d \mid \mathrm{I_a}(X) = 0$. Mamy wtedy odwzorowanie liniowe $\delta : k[T]/\mathrm{I_a}(X) = k[X] \longrightarrow k$, $F + \mathrm{I_a}(X) \mapsto d(F)$, które jest oczywiście lokalną derywacją w punkcie p pierścienia $k[X]$ oraz $d = \delta\eta = \tau(\delta)$. ⊠

Stwierdzenie 9.5.3. *Niech $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T]$. Niech $d \in \mathbb{D}_p(k[T])$. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(1) *$d \in \mathrm{Im}\ \tau$.*

(2) *$d(\mathrm{I_a}(X)) = 0$.*

(3) *$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p) d(T_i) = 0$, dla $j = 1, \dots, r$.*

Dowód. Równoważność (1) $\iff$ (2) wykazaliśmy w Stwierdzeniu 9.5.2.

(2) $\Rightarrow$ (3). Niech $j \in \{1, \dots, r\}$. Ponieważ $F_j \in \mathrm{I_a}(X)$, więc $d(F_j) = 0$, a zatem (na mocy Stwierdzenia 9.4.4) $0 = d(F_j) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p) d(T_i)$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Z (3) wynika, że $d(F_1) = \cdots = d(F_r) = 0$. Mamy ponadto $F_1(p) = \cdots = F_r(p) = 0$, gdyż $p \in X$. Niech $H \in \mathrm{I_a}(X)$. Wtedy $H = G_1F_1 + \cdots + G_rF_r$, dla pewnych wielomianów $G_1, \dots, G_r \in k[T]$. Mamy zatem $d(H) = d(\sum G_jF_j) = \sum (G_j(p)d(F_j) + F_j(p)d(G_j)) = 0$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6 Morfizmy przestrzeni stycznych

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale przestrzeń styczną $\mathbb{T}_p X$ utożsamiać będziemy z przestrzenią $\mathbb{D}_p(k[X])$, wszystkich lokalnych derywacji w punkcie $p \in X$ pierścienia $k[X]$.

Niech X, Y będą rozmaitościami afinicznymi i niech $p \in X$. Załóżmy, że $\varphi : X \longrightarrow Y$ jest odwzorowaniem regularnym. Mamy wtedy k-algebrowy homomorfizm $\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k[X]$,

$g \mapsto g\varphi$. Jeśli $\delta : k[X] \longrightarrow k$ jest lokalną derywacją w punkcie p, to odwzorowanie $d = \delta\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k$ jest lokalną derywacją w punkcie $\varphi(p)$. Istotnie, niech $f, g \in k[Y]$. Wtedy:

$$\begin{aligned} d(fg) &= (\delta\varphi^*)(fg) \\ &= \delta(\varphi^*(f)\varphi^*(g)) \\ &= \varphi^*(f)(p)\delta\varphi^*(g) + \varphi^*(g)(p)\delta\varphi^*(f) \\ &= f(\varphi(p))d(g) + g(\varphi(p))d(f). \end{aligned}$$

Mamy zatem odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{T}_p\varphi : \mathbb{T}_pX \longrightarrow \mathbb{T}_{\varphi(p)}Y, \quad \delta \mapsto \delta\varphi^*.$$

Odwzorowanie to nazywa się *różniczką odwzorowania regularnego* φ *w punkcie* p.

Łatwo sprawdzić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 9.6.1. (1) $\mathbb{T}_p 1_X = 1_{T_pX}$.

(2) *Jeśli* $\varphi : X \longrightarrow Y$, $\psi : Y \longrightarrow Z$ *są odwzorowaniami regularnymi rozmaitości afinicznych i* $p \in X$, *to* $\mathbb{T}_p(\psi\varphi) = (\mathbb{T}_{\varphi(p)}\psi) \circ (\mathbb{T}_p\varphi)$. ⊠

Wniosek 9.6.2. *Jeśli* $\varphi : X \longrightarrow Y$ *jest izomorfizmem regularnym i* $p \in X$, *to* $\mathbb{T}_p\varphi : \mathbb{T}_pX \longrightarrow \mathbb{T}_{\varphi(p)}Y$ *jest izomorfizmem przestrzeni liniowych.* ⊠

Wniosek 9.6.3. *Niech* X *będzie rozmaitością afiniczną. Jeśli istnieje punkt* $p \in X$ *taki, że* $\dim_k \mathbb{T}_pX = m$, *to* X *nie można zanurzyć regularnie w żadną przestrzeń* k^s, *gdzie* $s < m$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje rozmaitość afiniczna $Y \subseteq k^s$, gdzie $s < m$, regularnie izomorficzna z X. Niech $\varphi : X \longrightarrow Y$ będzie regularnym izomorfizmem. Wtedy (na mocy Wniosku 9.6.2) mamy sprzeczność: $m = \dim_k \mathbb{T}_{\varphi(p)}Y \leqslant s$. ⊠

Przykład 9.6.4. Krzywa $X = \mathrm{V_a}(T_1^3 - T_2^2) \subset k^2$ nie jest regularnie izomorficzna z k^1.

Dowód. Zauważmy, że $\dim_k \mathbb{T}_0X = \dim_k k^2 = 2$. Gdyby istniał regularny izomorfizm $\varphi : X \longrightarrow k^1$ wówczas mielibyśmy sprzeczność: $2 = \dim_k \mathbb{T}_{\varphi(0)}k^1 \leqslant 1$. ⊠

Następny przykład jest uogólnieniem Przykładu 9.6.4.

Przykład 9.6.5 ([Szaf88] 113). Niech $n > 1$. Krzywą $X \subset k^n$, zadaną parametrycznie wzorami:

$$x_1 = t^n, x_2 = t^{n+1}, \ldots, x_n = t^{2n-1},$$

nie można zanurzyć regularnie w żadną przestrzeń k^m, gdzie $m < n$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $\mathbb{T}_0X = k^n$. Teza wynika więc z Wniosku 9.6.3. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.7 Przestrzeń styczna dla rozmaitości quasi-rzutowej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Definicja 9.7.1. Jeśli X jest rozmaitością quasi-rzutową i $p \in X$, to *przestrzenią styczną do* X *w punkcie* p nazywamy przestrzeń liniową $\mathbb{D}_p(\mathbb{O}_p(X))$. Oznaczamy ją przez $\mathbb{T}_pX$.

Z faktów udowodnionych w poprzednich podrozdziałach wynika, że przestrzeń $\mathbb{T}_pX$ jest izomorficzna z przestrzenią $(M_p(X)/M_p(X)^2)^*$. Ponadto, jeśli $U \subseteq X$ jest otoczeniem afinicznym punktu p, to $\mathbb{T}_pX \approx \mathbb{T}_pU$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.8 Wymiar przestrzeni stycznej i punkty proste

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subset k^n$ będzie rozmaitością afiniczną, $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ i niech $p \in X$.

Stwierdzenie 9.8.1. $\dim_k(\mathbb{T}_pX) = n - \mathrm{rz}[\frac{\partial F_i}{\partial T_j}]$.

Dowód. Przesuwając układ współrzędnych możemy założyć, że $p = 0$. Ponieważ $\mathbb{T}_pX = \mathrm{V_a}(d_pF_1, \dots, d_pF_r)$, więc $\dim_k(T_pX)$ jest wymiarem przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, \dots, r$, gdzie $a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial T_j}(p)$. ⊠

W dalszym ciągu zakładamy, że X jest dowolną rozmaitością quasi-rzutową. Oznaczmy:

$$s = \min\{\dim_k(\mathbb{T}_pX);\ p \in X\}.$$

Stwierdzenie 9.8.2.

(1) $\forall_{p\in X}\ \dim_k(\mathbb{T}_pX) \geqslant s$.

(2) $\{p \in X;\ \dim_k(\mathbb{T}_pX) > s\}$ *jest zbiorem domkniętym w* X*, różnym od* X.

(3) $\{p \in X;\ \dim_k(\mathbb{T}_pX) = s\}$ *jest niepustym otwartym podzbiorem w* X.

Dowód. Wystarczy udowodnić (2). Z definicji liczby s wynika, że zbiór występujący w (2) jest różny od X. Ponieważ domkniętość zbioru oraz wymiar przestrzeni stycznej mają charakter lokalny, więc wystarczy założyć, że X jest rozmaitością afiniczną. Niech więc $X \subseteq k^n$ będzie rozmaitością afiniczną i niech $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T_1, \dots, T_n]$. Oznaczmy $a = \max\{\mathrm{rz}[\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(p)];\ p \in X\}$. Wtedy (na mocy Stwierdzenia 9.8.1) $s = n - a$ oraz

$$\begin{aligned}\{p \in X;\ \dim_k(\mathbb{T}_pX) > s\} &= \{p \in X;\ \mathrm{rz}[\tfrac{\partial F_i}{\partial T_j}(p)] < a\} \\ &= X \cap \mathrm{V_a}(\text{minory stopnia } a \text{ macierzy } [\tfrac{\partial F_i}{\partial T_j}]).\end{aligned}$$

Zatem zbiór $\{p \in X;\ \dim_k(\mathbb{T}_pX) > s\}$ jest domknięty w X. ⊠

Definicja 9.8.3. Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech $p \in X$. Mówimy, że p jest punktem *prostym* na X jeśli $\dim_k(\mathbb{T}_pX) = s$. W przeciwnym przypadku mówimy, że p jest punktem *osobliwym*. Jeśli każdy punkt $p \in X$ jest prosty, to X nazywamy rozmaitością *gładką*.

Przypomnijmy, że jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową, to jej wymiar $\dim X$ jest stopniem transcendencji ciała $k(X)$ nad k. Można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.8.4 ([Szaf88] 117). *Jeśli* $p \in X$ *jest punktem prostym, to* $\dim_k(\mathbb{T}_pX) = \dim X$. ⊠

Z tego twierdzenia wynika, że jeśli rozmaitość X jest nieprzywiedlna, to liczba s, wprowadzona powyżej, jest wymiarem rozmaitości X.

Niech teraz X będzie przywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech $X = \bigcup X_i$ będzie jej rozkładem na nieprzywiedlne składowe. Jeśli $p \in X$, to *wymiarem rozmaitości* X *w punkcie* p nazywamy liczbę $\dim_p X = \max\{\dim X_i;\ p \in X_i\}$. Mówimy, że punkt $p \in X$ jest *prosty* na X jeśli $\dim_k(\mathbb{T}_p X) = \dim_p X$. W przeciwnym wypadku mówimy, że p jest punktem *osobliwym*. Można udowodnić następujące stwierdzenie, analogiczne do Stwierdzenia 9.8.2.

Stwierdzenie 9.8.5.

(1) $\forall_{p\in X}\ \dim_k(\mathbb{T}_p X) \geqslant \dim_p X$.

(2) *Zbór wszystkich punktów osobliwych na X jest domknięty w X i różny od X.*

(3) *Zbór wszystkich punktów prostych na X jest niepustym otwartym podzbiorem w X.* ⊠

Twierdzenie 9.8.6 ([Szaf88] 129). *Jeśli $p \in X$ jest punktem prostym, to p leży na dokładnie jednej nieprzywiedlnej składowej rozmaitości X.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.9 Lokalny pierścień punktu prostego

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Podamy bez dowodów pewne fakty dotyczące pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$, w przypadku gdy p jest punktem prostym na rozmaitości quasi-rzutowej X. Dowody można znaleźć w [Szaf88] 122 -132 oraz [BalJ85].

Załóżmy najpierw, że $p \in X$ jest dowolnym punktem i niech $\dim_k(\mathbb{T}_p X) = n$. Jeśli u jest elementem pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$ należącym do ideału $\mathbb{M}_p(X)$, to przez $\overline{u}$ oznaczamy warstwę elementu u w przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_p(X)/\mathbb{M}_p(X)^2$.

Definicja 9.9.1. Mówimy, że elementy $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{M}_p(X)$ są *lokalnymi parametrami w punkcie* p jeśli warstwy $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_n}$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{M}_p(X)/\mathbb{M}_p(X)^2$ nad k.

Stwierdzenie 9.9.2. *Jeśli $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{M}_p(X)$, to następujące warunki są równoważne.*

(1) *Elementy $u_1, \dots, u_n$ są lokalnymi parametrami w punkcie p.*

(2) *Różniczki $d_p u_1, \dots, d_p u_n$ tworzą bazę przestrzeni $(\mathbb{T}_p X)^*$.*

(3) $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} d_p u_i = 0$. ⊠

Z lematu Nakayamy wynika:

Stwierdzenie 9.9.3. *Lokalne parametry $u_1, \dots, u_n$ w punkcie p generują ideał $\mathbb{M}_p(X)$.* ⊠

Definicja 9.9.4. Niech $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{M}_p(X)$ będą lokalnymi parametrami punktu $p \in X$ i niech $f \in \mathbb{O}_p(X)$. Mówimy, że szereg $F = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \in k[[T_1, \dots, T_n]]$ jest *szeregiem Taylora* funkcji f jeśli

$$\forall_{m\geqslant 0} \quad f - \sum_{i=0}^{m} F_i(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{M}_p(X)^{m+1}.$$

Stwierdzenie 9.9.5. *Każda funkcja $f \in \mathbb{O}_p(X)$ posiada co najmniej jeden szereg Taylora.* ⊠

Jeśli $p \in X$ jest punktem osobliwym, to dla danej funkcji $f \in \mathbb{O}_p(X)$ można znaleźć nieskończenie wiele szeregów Taylora.

Twierdzenie 9.9.6. *Niech $p \in X$ będzie punktem prostym. Wtedy każda funkcja $f \in \mathbb{O}_p(X)$ posiada dokładnie jeden szereg Taylora F_f. Przyporządkowanie*

$$\tau : \mathbb{O}_p(X) \longrightarrow k[[T_1, \dots, T_n]], \quad f \mapsto F_f,$$

jest k-algebrową injekcją. ⊠

Homomorfizm τ nie jest na ogół izomorfizmem. Jeśli ciało k jest przeliczalne, to mocą pierścienia $\mathbb{O}_p(X)$ jest $\aleph_0$. Natomiast pierścień $k[[T_1, \dots, T_n]]$ ma moc continuum.

Dowód następnego faktu można znaleźć np. w książce [BalJ85].

Twierdzenie 9.9.7. *Niech p będzie punktem nieprzywiedlnej rozmaitości quasi-rzutowej X. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *p jest punktem prostym na X;*

(2) *$\mathbb{O}_p(X)$ jest lokalnym pierścieniem regularnym.* ⊠

We wspomnianej książce [BalJ85] znajdziemy kilka równoważnych definicji lokalnego pierścienia regularnego. W połowie lat 50-tych jednoczesne prace Auslandera i Buchsbauma oraz Serre'a doprowadziły do następującej homologicznej charakteryzacji lokalnych pierścieni regularnych.

Twierdzenie 9.9.8. *Pierścień lokalny R jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończony wymiar globalny. Przy tym założeniu globalny wymiar pierścienia R pokrywa się z wymiarem Krulla tego pierścienia.* ⊠

Dzięki tej charakteryzacji można łatwo udowodnić następujące twierdzenie, które przez długi czas nie miało swojego dowodu (problem Krulla).

Twierdzenie 9.9.9. *Jeśli R jest lokalnym pierścieniem regularnym, a P jest ideałem pierwszym w R, to pierścień R_P (lokalizacja pierścienia R względem P) jest też regularny.* ⊠

Metody homologiczne pozwoliły rozwiązać pozytywnie jeszcze jeden klasyczny problem - problem jednoznaczności rozkładu w pierścieniach regularnych. Dzięki temu mamy:

Twierdzenie 9.9.10 (Auslander, Buchsbaum). *Jeśli p jest punktem prostym nieprzywiedlnej rozmaitości quasi-rzutowej X, to $\mathbb{O}_p(X)$ jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.* ⊠

W książce [BalJ85] (283 - 289) opisane są wyniki fundamentalnych prac I. S. Cohena (z końca lat 40-tych) dotyczących struktury pierścieni regularnych zupełnych. Pierścienie szeregów nad ciałem są regularne. Są to jedyne pierścienie regularne zupełne, jeśli charakterystyka pierścienia jest równa charakterystyce ciała ilorazowego. W ogólnym przypadku pierścień regularny zupełny ma postać $W[[T_1, \dots, T_n]]/(u)$, gdzie W jest pierścieniem waluacyjnym (pierścień Witta), a element u nie należy do kwadratu ideału maksymalnego pierścienia $W[[T_1, \dots, T_n]]$.

10 Wiązka styczna

10.1 Rodziny wektorowe i przekroje

Zmierzamy do wprowadzenia wiązki stycznej do rozmaitości. Pojęcie do jest szczególnym przykładem ogólniejszego pojęcia zwanego rodziną wektorową ([Szaf72]355, [Szaf88] t.2 68). W tym podrozdziale podamy podstawowe definicje i fakty dotyczące rodzin wektorowych i ich przekrojów. Wprowadzimy także wiązki wektorowe.

Niech X będzie rozmaitością quasi-rzutową.

Definicja 10.1.1. *Rodziną wektorową nad* X nazywamy każdą trójkę $\mathbb{E} = (E, \pi, X)$ taką, że:

(1) E jest rozmaitością quasi-rzutową,

(2) $\pi : E \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem regularnym,

(3) dla każdego $x \in X$ zbiór $E_x = \pi^{-1}(x)$, zwany *włóknem nad* x, jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad k i topologia Zariskiego na E_x jest zgodna z topologią indukowaną przez topologię na E.

Definicja 10.1.2. Jeśli $\mathbb{E} = (E, \pi, X)$, $\mathbb{E}' = (E', \pi', X)$ są rodzinami wektorowymi nad X, to ich *morfizmem* (lub *odwzorowaniem*) nazywamy każde odwzorowanie regularne $f : E \longrightarrow E'$ takie, że:

(a) $\pi' f = \pi$,

(b) dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $f_x = f\,| : E_x \longrightarrow E'_x$ jest przekształceniem liniowym.

Uwaga 10.1.3. *Z warunku (a) wynika, że $f(E_x) \subseteq E'_x$. Istotnie, niech $e \in f(E_x)$. Wtedy $e = f(u)$, gdzie $u \in E_x = \pi_{-1}(x)$, czyli $\pi(u) = x$. Stąd $\pi'(e) = \pi' f(u) = \pi(u) = x$, czyli $e \in E'_x$.*

Z warunku (3) *wynika, że każde włókno E_x jest niepustym zbiorem. Jeśli więc (E, π, X) jest rodziną wektorową nad X, to π jest surjekcją.* ⊠

Przykład 10.1.4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad k. Rozpatrzmy trójkę (E, π, X) określoną następująco:

$$E = X \times V, \quad \pi : E \longrightarrow X,\ (x, v) \mapsto x.$$

Trójka ta jest rodziną wektorową nad X. ⊠

Definicja 10.1.5. Rodzinę wektorową $(X \times V, \pi, X)$ z Przykładu 10.1.4 nazywamy *trywialną*.

Niech $\mathbb{E} = (E, \pi, X)$ będzie rodziną wektorową nad X i niech $U \subseteq X$ będzie otwartym podzbiorem. Rozpatrzmy trójkę $(\pi^{-1}(U), q, U)$, w której

$$q = \pi| \ : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U.$$

Zauważmy, że jeśli $x \in U$, to $q^{-1}(x) = \pi^{-1}(x)$. Każdy zbiór postaci $q^{-1}(x)$, gdzie $x \in U$, jest więc skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad k. Trójka $(\pi^{-1}(U), q, U)$ jest zatem rodziną wektorową nad U.

Definicja 10.1.6. Rodzinę wektorową $(\pi^{-1}(U), q, U)$ oznaczamy przez $\mathbb{E} \mid U$ i nazywamy *ograniczeniem rodziny* $\mathbb{E}$ *do* U.

Stwierdzenie 10.1.7. *Jeśli* $\mathbb{E}$ *jest trywialną rodziną wektorową nad* X*, to każde jej ograniczenie* $\mathbb{E} \mid U$ (U *otwarte w* X) *jest trywialną rodziną wektorową nad* U*.*

Dowód. $\mathbb{E} = (X \times V, \pi, X)$, gdzie V jest przestrzenią liniową i $\pi : X \times V \longrightarrow X$ jest rzutowaniem $(x, v) \mapsto x$. Wtedy $\pi^{-1}(U) = U \times V$ i $q : U \times V \longrightarrow U$ jest rzutowaniem na U. ⊠

Wprowadzimy teraz przekroje rodziny wektorowej. Niech $\mathbb{E} = (E, \pi, X)$ będzie rodziną wektorową nad X.

Definicja 10.1.8. *Przekrojem rodziny* $\mathbb{E}$ nazywamy każde odwzorowanie regularne $s : X \longrightarrow E$ takie, że $\pi s = 1_X$. Zbiór wszystkich przekrojów rodziny wektorowej $\mathbb{E}$ oznaczmy przez $\Gamma(\mathbb{E})$.

Niech $s : X \longrightarrow E$ będzie przekrojem rodziny $\mathbb{E}$. Jeśli $x \in X$ to $\pi s(x) = x$, a zatem $s(x)$ jest elementem przestrzeni liniowej $E_x = \pi^{-1}(x)$. Załóżmy, że $f : X \longrightarrow k$ jest funkcją regularną na X. Mamy wówczas, dla każdego $x \in X$, wektor $f(x)s(x)$ należący do przestrzeni E_x. Mamy zatem przekrój $fs : X \longrightarrow E$ określony wzorem

$$(fs)(x) = f(x)s(x), \quad x \in X.$$

Jeśli $s_1, s_2 : X \longrightarrow E$ są przekrojami rodziny $\mathbb{E}$, to definiujemy dodawanie $s_1 + s_2 : X \longrightarrow E$, przyjmując:

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad x \in X,$$

gdzie $s_1(x) + s_2(x)$ jest sumą wektorów $s_1(x)$ i $s_2(x)$ w przestrzeni liniowej E_x. Jest oczywiste, że $s_1 + s_2$ jest przekrojem rodziny $\mathbb{E}$.

Widzimy więc, że w zbiorze $\Gamma(\mathbb{E})$ określone jest dodawanie i mnożenie przez elementy pierścienia $k[X]$, funkcji regularnych na X.

Stwierdzenie 10.1.9. *Zbiór* $\Gamma(\mathbb{E})$*, wraz z powyższymi działaniami, jest* $k[X]$*-modułem.* ⊠

Niech $\mathbb{E} = (E, \pi, X)$ i $\mathbb{E}' = (E', \pi', X)$ będą rodzinami wektorowymi nad X i niech $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ będzie morfizmem tych rodzin. Definiujemy wówczas odwzorowanie $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathbb{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{E}')$, przyjmując

$$\Gamma(\varphi)(s) = \varphi s, \quad s \in \Gamma(\mathbb{E}).$$

Zauważmy, że $\Gamma(f)(s)$ jest istotnie przekrojem rodziny $\mathbb{E}'$. Mamy bowiem (dla $x \in X$):

$$\pi'(\Gamma(\varphi)(s)) = \pi' \varphi s = \pi s = 1_X.$$

Stwierdzenie 10.1.10. *Funkcja* $\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathbb{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{E}')$ *jest homomorfizmem* $k[X]$*-modułów.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw (patrz Definicja 10.1.2), że jeśli $x \in X$, to funkcja

$$\varphi_x = \varphi \mid : E_x \longrightarrow E'_x$$

jest przekształceniem liniowym. Niech $s \in \Gamma(\mathbb{E})$, $f \in k[X]$ oraz $x \in X$. Wtedy:

$$\begin{array}{rclcl} (\Gamma(\varphi)(fs))(x) & = & (\varphi \circ (fs))(x) & = & \varphi_x(f(x)s(x)) \\ & = & f(x)\varphi_x(s(x)) & = & f(x)(\varphi s)(x) \\ & = & f(x)(\Gamma(\varphi)(s))(x) & = & (f\Gamma(\varphi)(s))(x). \end{array}$$

Zatem $\Gamma(\varphi)(fs) = f\Gamma(\varphi)(s)$. W podobny sposób sprawdzamy addytywność. ⊠

Wniosek 10.1.11. Γ *jest funktorem kowariantnym z kategorii rodzin wektorowych nad* X *do kategorii* $k[X]$*-modułów.* ⊠

Stwierdzenie 10.1.12. *Jeśli* $\mathbb{E} = (X \times V, \pi, X)$ *jest trywialną rodziną wektorową, to* $\Gamma(\mathbb{E})$ *jest* $k[X]$*-modułem wolnym rangi* $\dim_k V$*.*

Dowód. Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni V nad k. Niech $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : X \longrightarrow X \times V$ będą funkcjami zdefiniowanymi następująco:

$$\varepsilon_i(x) = (x, e_i), \quad x \in X, \ i = 1, \dots, n.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje te są przekrojami rodziny $\mathbb{E}$, tworzącymi bazę $k[X]$-modułu $\Gamma(\mathbb{E})$. ⊠

Pewne rodziny wektorowe nazywać będziemy wiązkami.

Definicja 10.1.13. *Wiązką wektorową* (lub krótko *wiązką*) *nad* X nazywamy każdą rodzinę wektorową $\mathbb{E}$ nad X, która jest lokalnie trywialna, tzn., dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$, zawierający x taki, że rodzina wektorowa $\mathbb{E} \mid U$ jest trywialna.

Każda trywialna rodzina wektorowa nad X jest oczywiście wiązką nad X.

Stwierdzenie 10.1.14. *Jeśli* $\mathbb{E}$ *jest wiązką wektorową nad* X *oraz* $U \subseteq X$ *jest otwartym podzbiorem, to rodzina wektorowa* $\mathbb{E} \mid U$ *jest wiązką wektorową nad* U*.*

Dowód. Niech $x \in U$. Ponieważ $x \in X$ więc istnieje zbiór otwarty $U' \subseteq X$ taki, że $\mathbb{E} \mid U'$ jest trywialną rodziną wektorową. Wtedy (na mocy Stwierdzenia 10.1.7) rodzina wektorowa

$$(\mathbb{E} \mid U) \mid (U \cap U') = (\mathbb{E} \mid U') \mid (U \cap U')$$

jest trywialna. ⊠

Definicja 10.1.15. *Morfizmem wiązek wektorowych* $\mathbb{E}$ *i* $\mathbb{E}'$ *nad* X nazywamy każdy morfizm rodzin wektorowych $\mathbb{E}$ i $\mathbb{E}'$ (w sensie Definicji 10.1.2).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2 Definicja wiązki stycznej

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq k^n$ będzie rozmaitością afiniczną. Oznaczmy przez $\mathbb{T}X$ podzbiór zbioru $X \times k^n$ zdefiniowany następująco:

$$\mathbb{T}X = \{(p, a) \in X \times k^n;\ a \in \mathbb{T}_p X\}.$$

Definicja 10.2.1. Zbiór $\mathbb{T}X$ nazywamy *wiązką styczną do rozmaitości X*.

Stwierdzenie 10.2.2. *$\mathbb{T}X$ jest afinicznym zbiorem domkniętym w k^{2n}.*

Dowód. Załóżmy, że $\mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. Wiemy (Stwierdzenie 9.2.5), że jeśli $p \in X$, to $\mathbb{T}_pX = \mathrm{V_a}(d_pF_1, \dots, d_pF_r)$, gdzie

$$d_pF_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p)(T_i - p_i), \quad j = 1, \dots, r.$$

Rozpatrzmy pierścień wielomianów $k[T, Z] = k[T_1, \dots, T_n, Z_1, \dots, Z_n]$ i spójrzmy na wielomiany $F_1, \dots, F_n$ jako na elementy pierścienia $k[T, Z]$. Niech $G_1, \dots, G_j$ będą wielomianami należącymi do $k[T, Z]$ zdefiniowanymi następująco:

$$G_j = G_j(T, Z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(T_1, \dots, T_n)(Z_i - T_i), \quad j = 1, \dots, r.$$

Wtedy $\mathbb{T}X = \mathrm{V_a}(F_1, \dots, F_r, G_1, \dots, G_r)$. ⊠

Przykład 10.2.3. Niech $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Rozpatrzmy w przestrzeni k^2 okrąg $X = \mathrm{V_a}(F)$, gdzie $F = T_1^2 + T_2^2 - 1 \in k[T_1, T_2]$. Jeśli $p = (p_1, p_2) \in X$, to d_pF jest wielomianem, należącym do pierścienia wielomianów $k[Z_1, Z_2]$, określonym wzorem

$$\begin{aligned}(d_pF)(Z_1, Z_2) &= \frac{\partial F}{\partial T_1}(p)(Z_1 - p_1) + \frac{\partial F}{\partial T_2}(p)(Z_2 - p_2)\\ &= 2p_1(Z_1 - p_1) + 2p_2(Z_2 - p_2).\end{aligned}$$

Przestrzeń styczna $\mathbb{T}_pX$ jest więc zbiorem wszystkich punktów $a = (a_1, a_2) \in k^2$ takich, że

$$2p_1(a_1 - p_1) + 2p_2(a_2 - p_2) = 0.$$

Niech G będzie wielomianem należącym do $k[T_1, T_2, Z_1, Z_2]$, pierścienia wielomianów czterech zmiennych, określonym wzorem:

$$G = G(T_1, T_2, Z_1, Z_2) = d_{(T_1,T_2)}F = 2T_1(Z_1 - T_1) + 2T_2(Z_2 - T_2).$$

Wówczas wiązka styczna $\mathbb{T}X$ jest zbiorem domkniętym w k^4 określonym przez wielomiany $F, G \in k[T_1, T_2, Z_1, Z_2]$, tzn.,

$$\begin{aligned}\mathbb{T}X &= \mathrm{V_a}(F, G)\\ &= \{(p_1, p_2, a_1, a_2) \in k^4;\ F(p_1, p_2) = 0,\ G(p_1, p_2, a_1, a_2) = 0\}\\ &= \{(p_1, p_2, a_1, a_2) \in k^4;\ p_1^2 + p_2^2 = 1,\ p_1(a_1 - p_1) + p_2(a_2 - p_2) = 0\}.\ ⊠\end{aligned}$$

Rzutowanie $\pi : \mathbb{T}X \longrightarrow X$, $(p, a) \mapsto p$ jest oczywiście odwzorowaniem regularnym. Jeśli $p \in X$, to włókno $\pi^{-1}(p)$ jest przestrzenią liniową $\{p\} \times \mathbb{T}_pX$ izomorficzną z przestrzenią $\mathbb{T}_pX$. Mamy zatem:

Stwierdzenie 10.2.4. *Trójka $(\mathbb{T}X, \pi, X)$ jest rodziną wektorową nad X.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3 Derywacje pierścienia funkcji regularnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $k[X]$ będzie k-algebrą funkcji regularnych na rozmaitości afinicznej $X \subseteq k^n$.

Do tej pory mówiliśmy o derywacjach lokalnych w danym punkcie. Były to odwzorowania z $k[X]$ do k. Teraz rozważać będziemy dowolne k-derywacje pierścienia $k[X]$, tzn., k-liniowe odwzorowania $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ spełniające warunek:

$$D(fg) = fD(g) + gD(f), \quad \text{dla wszystkich } f, g \in k[X].$$

Stwierdzenie 10.3.1. *Jeśli $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ jest k-derywacją i $p \in X$, to odwzorowanie*

$$D_p : k[X] \longrightarrow k, \quad f \mapsto D(f)(p)$$

(gdzie $f \in k[X]$) jest derywacją lokalną w punkcie p pierścienia $k[X]$.

Dowód. Niech $f, g \in k[X]$. Wtedy

$$\begin{aligned} D_p(fg) &= D(fg)(p) \\ &= (fD(g) + gD(f))(p) \\ &= f(p)D(g)(p) + g(p)D(f)(p) \\ &= f(p)D_p(g) + g(p)D_p(f). \boxtimes \end{aligned}$$

Jeśli $X = k^n$, to $k[X]$ jest pierścieniem wielomianów $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. W tym przypadku mamy następujące dobrze znane stwierdzenie.

Stwierdzenie 10.3.2. *Dla każdego ciągu $(F_1, \dots, F_n)$ wielomianów pierścienia $k[T]$ istnieje dokładnie jedna k-derywacja $d : k[T] \longrightarrow k[T]$ taka, że $d(T_i) = F_i$, dla $i = 1, \dots, n$. Derywacja d określona jest wzorem*

$$d(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial T_i} F_i,$$

dla wszystkich $H \in k[T]$. $\boxtimes$

W ogólnym przypadku wiemy, że $k[X] = k[T]/\mathrm{I_a}(X)$. Jeśli $d : k[T] \longrightarrow k[T]$ jest k-derywacją spełniającą warunek $d(\mathrm{I_a}(X)) \subseteq \mathrm{I_a}(X)$, to derywacja ta wyznacza k-derywację $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ zdefiniowaną wzorem

$$D(H + \mathrm{I_a}(X)) = d(H) + \mathrm{I_a}(X), \quad \text{dla} \;\; H \in k[T].$$

Poniższe stwierdzenie pokazuje, że każda k-derywacja pierścienia $k[X]$ ma taką postać.

Stwierdzenie 10.3.3. *Niech D będzie k-derywacją pierścienia $k[X]$. Istnieje wtedy k-derywacja $d : k[T] \longrightarrow k[T]$ taka, że:*

(1) *$d(\mathrm{I_a}(X)) \subseteq \mathrm{I_a}(X)$,*

(2) *$D(H + \mathrm{I_a}(X)) = d(H) + \mathrm{I_a}(X)$, dla wszystkich $H \in k[T]$.*

Dowód. Oznaczmy: $A = \mathrm{I_a}(X)$, $t_i = T_1 + A$, $i = 1, \dots, n$. Niech $G_1, \dots, G_n$ będą wielomianami z $k[T]$ takimi, że $D(t_i) = G_i + A$, dla $i = 1, \dots, n$. Rozpatrzmy k-derywację d pierścienia $k[T]$ taką, że $d(T_i) = G_i$, $i = 1, \dots, n$. Taka derywacja istnieje na mocy Stwierdzenia 10.3.2. Wtedy dla dowolnego $H \in k[T]$ zachodzi równość $D(H + A) = d(H) + A$. Istotnie:

$$\begin{aligned} D(H + A) &= D(H(t_1, \dots, t_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial T_i}(t_1, \dots, t_n) D(t_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial T_i} G_i + A \\ &= d(H) + A. \end{aligned}$$

Spełniony jest wię warunek (2). Stąd też wynika warunek (1). Jeśli bowiem $F \in A$, to $0 + A = D(F + A) = d(F) + A$, czyli $d(F) \in A$. $\boxtimes$

Zbiór wszystkich k-derywacji pierścienia $k[X]$ oznaczamy przez $\mathrm{Der}_k(k[X])$. Zbiór ten jest oczywiście $k[X]$-modułem.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4 Pola wektorowe i derywacje

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie rozmaitością afiniczną.

Definicja 10.4.1. *Polem wektorowym* na rozmaitości afinicznej X nazywamy każdy przekrój wiązki stycznej $\mathbb{T}X$.

Polem wektorowym na X jest więc każde odwzorowanie regularne $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ takie, że $\pi s = 1_X$, gdzie $\pi : \mathbb{T}X \longrightarrow X$ jest rzutowaniem. Stąd w szczególności wynika, że jeśli $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ jest polem wektorowym i $p \in X$, to punkt $s(p)$ jest postaci (p, a), dla pewnego $a \in \mathbb{T}_pX$

Zbiór wszystkich pól wektorowych na X oznaczać będziemy, przez $\Gamma(\mathbb{T}X)$. Wiemy, że zbiór ten jest $k[X]$-modułem. Przypomnijmy działania. Niech s, s_1 będą polami wektorowymi na X, $f \in k[X]$ i niech $p \in X$. Załóżmy, że $s(p) = (p, a)$, $s_1(p) = (p, a_1)$, gdzie $a, a_1 \in \mathbb{T}_pX$. Wtedy:

$$\begin{array}{lllll} (s+s_1)(p) & = & (p, a \oplus_p a_1) & = & (p, a + a_1 - p), \\ (fs)(p) & = & (p, f(p) *_p a) & = & (p, f(p)(a-p) + p). \end{array}$$

Udowodnimy, że moduł $\Gamma(\mathbb{T}X)$ jest izomorficzny z $k[X]$-modułem $\mathrm{Der}_k(k[X])$, wszystkich k-derywacji pierścienia $k[X]$.

Niech $A = \mathrm{I_a}(X)$, $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ i niech $t_1, \dots, t_n$ będą warstwami odpowiednio wielomianów $T_1, \dots, T_n$ w pierścieniu $k[X] = k[T]/A$. Załóżmy, że $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ jest k-derywacją.

Jeśli $p \in X$, to oznaczmy przez $a_D(p)$ punkt $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ taki, że

$$a_i = D(t_i)(p) + p_i,$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

Lemat 10.4.2. $a_D(p) \in \mathbb{T}_pX$.

Dowód. Niech $A = \mathrm{I_a}(X) = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T]$. Wtedy

$$\mathbb{T}_pX = \mathrm{V_a}(d_pF_1, \dots, d_pF_r), \quad \text{(Stwierdzenie 9.2.5).}$$

Musimy zatem wykazać, że $(d_pF_j)(a_D(p)) = 0$, dla $j = 1, \dots, r$. Sprawdzamy:

$$\begin{array}{lll} (d_pF_j)(a_D(p)) & = & \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p)(a_D(p) - p_i) \\ & = & \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p) D(t_i)(p) \\ & = & \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(t_1, \dots, t_n) D(t_i)\right](p) \\ & = & D(F_j(t_1, \dots, t_n))(p) \\ & = & D(F_j + A)(p) = (0 + A)(p) = 0. \end{array}$$

Zatem $a_D(p) \in \mathbb{T}_pX$. ⊠

Z każdą więc k-derywacją D pierścienia $k[X]$ stowarzyszone jest odwzorowanie

$$s_D : X \longrightarrow \mathbb{T}X, \quad p \mapsto (p, a_D(p)).$$

Z określenia elementu postaci $a_D(p)$ wynika, że odwzorowanie to jest regularne. Spełniony jest też oczywiście warunek $\pi s_D = 1_X$. Zatem $s_D \in \Gamma(\mathbb{T}X)$ (tzn. s_D jest polem wektorowym na X). Mamy więc odwzorowanie

$$\Phi : Der_k(k[X]) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}X), \quad D \mapsto s_D.$$

Stwierdzenie 10.4.3. *Odwzorowanie* Φ *jest homomorfizmem* $k[X]$*-modułów.*

Dowód. Niech $D, D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_k(k[X])$, $f \in k[X]$ oraz $p \in X$. Zachodzą wtedy równości: $a_{D_1+D_2}(p) = a_{D_1}(p) + a_{D_2}(p) - p$ i $a_{fD}(p) = f(p)(a_D(p) - p) + p$. Istotnie, jeśli $i = 1, \dots, n$, t

$$\begin{aligned}
[a_{D_1}(p) + a_{D_2}(p) - p]_i &= (D_1(t_i)(p) + p_i) + (D_2(t_i)(p) + p_i) - p_i \\
&= D_1(t_i)(p) + D_2(t_i)(p) + p_i \\
&= (D_1 + D_2)(t_i)(p) + p_i \\
&= [a_{D_1+D_2}(p)]_i \ ; \\
[f(p)(a_D(p) - p) + p]_i &= f(p)(D(t_i)(p) + p_i - p_i) + p_i \\
&= f(p)D(t_i)(p) + p_i \\
&= (fD)(t_i)(p) + p_i \\
&= [a_{fD}(p)]_i.
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy następujące równości:

$$\begin{aligned}
\Phi(D_1 + D_2)(p) &= (p, a_{D_1+D_2}(p)) \\
&= (p, a_{D_1}(p) + a_{D_2}(p) - p) \\
&= (p, a_{D_1}(p) \oplus_p a_{D_2}(p)) \\
&= (p, a_{D_1}(p)) + (p, a_{D_2}(p)) \\
&= (\Phi(D_1) + \Phi(D_2))(p); \\
\Phi(fD)(p) &= (p, a_{(fD)}(p)) \\
&= (p, f(p)(a_D(p) - p) + p) \\
&= (p, f(p) *_p a_D(p)) \\
&= (f\Phi(D))(p).
\end{aligned}$$

Zatem $\Phi(D_1 + D_2) = \Phi(D_1) + \Phi(D_2)$ oraz $\Phi(fD) = f\Phi(D)$. ⊠

Skonstruowaliśmy $k[X]$-homomorfizm $\Phi : \mathrm{Der}_k(k[X]) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}X)$. Wykażemy, że homomorfizm ten jest izomorfizmem. W tym celu skonstruujemy odwzorowanie $\Psi : \Gamma(\mathbb{T}X) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[X])$.

Niech $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ będzie dowolnym polem wektorowym na X. Ponieważ $s : X \longrightarrow k^n \times k^n$ jest odwzorowaniem regularnym więc

$$s(p) = (p, (H_1(p), \dots, H_n(p))), \quad \text{dla } \ p \in X,$$

gdzie $H_1, \dots, H_n$ są pewnymi wielomianami należącymi do pierścienia $k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$. Rozważmy k-derywację $\Delta : k[T] \longrightarrow k[T]$ określoną wzorami

$$\Delta(T_i) = H_i - T_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Taka derywacja oczywiście istnieje (Stwierdzenie 10.3.2).

Lemat 10.4.4. $\Delta(A) \subseteq A$.

Dowód. Przypomnijmy, że $A = \mathrm{I_a}(X)$. Niech $A = (F_1, \dots, F_r)$, gdzie $F_1, \dots, F_r \in k[T]$. Ustalmy jedno $j \in \{1, \dots, r\}$. Wystarczy pokazać, że $\Delta(F_j) \in A$ czyli, że $\Delta(F_j)(p) = 0$, dla wszystkich $p \in X$. Niech więc $p \in X$. Wtedy $(H_1(p), \dots, H_n(p)) \in \mathbb{T}_pX = \mathrm{V_a}(d_pF_1, \dots, d_pF_r)$, a zatem $0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}(p)(H_i(p) - p_i) = (\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial T_i}\Delta(T_i))(p) = (\Delta(F_j)(p)$. ⊠

Derywacja $\Delta : k[T] \longrightarrow k[T]$ indukuje więc, na mocy powyższego lematu, k-derywację D pierścienia $k[X] = k[T]/A$, określoną wzorem

$$D(F + A) = \Delta(F) + A, \quad F \in k[T].$$

Z każdym zatem polem wektorowym $s \in \Gamma(\mathbb{T}X)$ stowarzyszona jest derywacja $D \in \mathrm{Der}_k(k[X])$ określona powyższym wzorem. Derywację tę oznaczać będziemy przez $\Psi(s)$. W ten sposób określiliśmy funkcję $\Psi : \Gamma(\mathbb{T}X) \longrightarrow \mathrm{Der}_k(k[X])$. Jest oczywiste, że funkcja ta jest homomorfizmem $k[X]$-modułów oraz, że $\Phi\Psi = \mathrm{id}$, $\Psi\Phi = \mathrm{id}$. Mamy zatem:

Twierdzenie 10.4.5. *Moduły* $\mathrm{Der}_k(k[X])$ *i* $\Gamma(\mathbb{T}X)$ *są izomorficzne. Dokładniej, odwzorowanie*

$$\Phi : Der_k(k[X]) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}X), \quad D \mapsto s_D,$$

jest izomorfizmem $k[X]$*-modułów. Ponadto,* $\Phi^{-1} = \Psi$. ⊠

To, że moduły $\mathrm{Der}_k(k[X])$ i $\Gamma(\mathbb{T}X)$ są izomorficzne można wykazać jeszcze w inny sposób. Wiemy (na mocy Stwierdzenia 9.4.11), że przestrzeń $\mathbb{T}_pX$ możemy utożsamiać z przestrzenią liniową $\mathbb{D}_p(k[X])$, wszystkich lokalnych derywacji pierścienia $k[X]$ w punkcie p. Wiązka styczna $\mathbb{T}X$ jest więc zbiorem wszystkich par (p, δ), gdzie $p \in X$ i $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$. Jeśli $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ jest polem wektorowym na X i $p \in X$, to $s(p)$ jest parą postaci (p, δ), gdzie $\delta \in \mathbb{D}_p(k[X])$. Działania w $k[X]$-module $\Gamma(\mathbb{T}X)$ są wtedy określone następująco.

Niech s, s_1 będą polami wektorowymi na X, $f \in k[X]$ i niech $p \in X$. Załóżmy, że $s(p) = (p, \delta)$, $s_1(p) = (p, \delta_1)$, gdzie $\delta, \delta_1 : k[X] \longrightarrow k$ są lokalnymi w punkcie p derywacjami. Wtedy:

$$(s + s_1)(p) = (p, \delta + \delta_1), \quad (fs)(p) = (p, f(p)\delta).$$

Wiemy (Stwierdzenie 10.3.1), że jeśli $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ jest k-derywacją i $p \in X$, to odwzorowanie

$$D_p : k[X] \longrightarrow k, \quad f \mapsto D(f)(p)$$

(gdzie $f \in k[X]$) jest derywacją lokalną w punkcie p pierścienia $k[X]$. Z każdą więc k-derywacją D pierścienia $k[X]$ stowarzyszone jest odwzorowanie

$$S_D : X \longrightarrow \mathbb{T}X, \quad p \mapsto (p, D_p).$$

Nietrudno wykazać, że odwzorowanie S_D jest regularne i spełnia warunek $\pi S_D = 1_X$. Zatem $S_D \in \Gamma(\mathbb{T}X)$ (tzn. S_D jest polem wektorowym na X). Twierdzenie 10.4.5 można teraz wysłowić następująco:

Twierdzenie 10.4.6. *Odwzorowanie*

$$\Upsilon : Der_k(k[X]) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}X), \quad D \mapsto S_D,$$

jest izomorfizmem $k[X]$*-modułów.*

Dowód. Fakt, że Υ jest homomorfizmem wynika z oczywistych równości:

$$(D + D')_p = D_p + D'_p, \quad (fD)_p = f(p)D_p,$$

dla wszystkich $D, D' \in \mathrm{Der}_k(k[X]))$, $f \in k[X]$, $p \in X$.

Niech $\Upsilon(D) = 0$, gdzie $D \in \mathrm{Der}_k(k[X])$. Wtedy $S_D = 0$, więc $D_p = 0$, dla wszystkich $p \in X$. Stąd dalej wynika, że $0 = D_p(f) = D(f)(p)$, dla wszystkich $f \in k[X]$ i $p \in X$. To z kolei oznacza, że $D(f) = 0$, dla wszystkich $f \in k[X]$, czyli $D = 0$. Wykazaliśmy więc, że odwzorowanie Υ jest różnowartościowe.

Załóżmy teraz, że $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ jest dowolnym polem wektorowym na X. Wówczas dla każdego $p \in X$ mamy lokalną derywację $\delta_p : k[X] \longrightarrow k$ taką, że $s(p) = (p, \delta_p)$. Definiujemy odwzorowanie $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ przyjmując

$$D(f)(p) = \delta_p(f), \quad \text{dla} \;\; f \in k[X], \;\; p \in X.$$

Pokażemy, że D jest k-derywacją pierścienia $k[X]$. Jest oczywiste, że D jest przekształceniem liniowym. Niech $f, g \in k[X]$. Wtedy dla każdego $p \in X$ mamy:

$$\begin{array}{rcl} D(fg)(p) & = & \delta_p(fg) \\ & = & f(p)\delta_p(g) + g(p)\delta_p(f) \\ & = & f(p)D(g)(p) + g(p)D(f)(p) \\ & = & (fD(g) + gD(f))(p). \end{array}$$

Zatem $D(fg) = fD(g) + gD(f)$, a więc $D \in \mathrm{Der}_k(k[X])$. Ponieważ $s = S_D = \Upsilon(D)$, więc wykazaliśmy, że odwzorowanie Υ jest surjekcją. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5 Nawias Liego pól wektorowych

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $X \subseteq k^n$ będzie rozmaitością afiniczną. Niech $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ będzie polem wektorowym. Przypomnijmy w skrócie to o czym mówiliśmy w poprzednim podrozdziale. Z regularności odwzorowania s wynika, że istnieją wielomiany $H_1, \dots, H_n \in k[T] = k[T_1, \dots, T_n]$ takie, że $s(p) = (p, (H_1(p), \dots, H_n(p)))$, dla wszystkich $p \in X$. Wielomiany te definiują k-derywację $\Delta : k[T] \longrightarrow k[T]$ zachowującą ideał $A = \mathrm{I_a}(X)$, a zatem definiują k-derywację D pierścienia $k[X] = k[T]/A$. Mamy wtedy $D(F + A) = \Delta(F) + A$ oraz $\Delta(T_i) = H_i - T_i$, dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

Zachodzi też odwrotnie. Niech $D : k[X] \longrightarrow k[X]$ będzie k-derywacją. Istnieją wówczas wielomiany $G_1, \dots, G_n \in k[T]$ określone wzorami $D(t_i) = G_i + A$, dla $i = 1, \dots, n$, gdzie $t_i = T_i + A$. Mamy zatem k-derywację $\Delta : k[T] \longrightarrow k[T]$ (taką, że $\Delta(T_i) = G_i$), zachowującą ideał A. Z derywacją D stowarzyszone jest pole wektorowe $S : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ określone wzorem

$$s(p) = (p, (H_1(p), \dots, H_n(p))), \quad p \in X, \quad \text{gdzie} \;\; H_i = G_i + T_i, \;\; i = 1, \dots, n.$$

Wiemy, że powyższe dwa przyporządkowania są wzajemnie odwrotne.

Zbiór $\mathrm{Der}_k(k[X])$, wszystkich k-derywacji pierścienia $k[X]$, ma strukturę k-algebry Liego z nawiasem

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1.$$

Dzięki izomorfizmowi $\mathrm{Der}_k(k[X]) \approx \Gamma(\mathbb{T}X)$, strukturę tę można przenieść na $\Gamma(\mathbb{T}X)$. Mamy zatem nawias Liego $[\ ,\ ] : \Gamma(\mathbb{T}X) \times \Gamma(\mathbb{T}X) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{T}X)$.

Stwierdzenie 10.5.1. *Niech $s_1, s_2 : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ będą polami wektorowymi takimi, że*

$$s_1(p) = (p, (A_1(p), \dots, A_n(p))), \quad s_2(p) = (p, (B_1(p), \dots, B_n(p))),$$

dla $p \in X$, gdzie $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in k[T]$. Wtedy $[s_1, s_2](p) = (p, (C_1(p), \dots, C_n(p)))$, gdzie

$$C_i = \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B_i}{\partial T_j} A_j - \frac{\partial A_i}{\partial T_j} B_j\right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial (B_i - A_i)}{\partial T_j} T_j + (B_i - A_i) + T_i,$$

dla $i = 1, \dots, n$.

Dowód. Niech Δ_1, Δ_2 będą k-derywacjami pierścienia wielomianów $k[T]$ określonymi wzorami $\Delta_1(T_i) = A_i - T_i, \quad \Delta_2(T_i) = B_i - T_i, \quad i = 1, \dots, n$. Mamy wówczas:

$$
\begin{aligned}
C_i - T_i &= \Delta_1\Delta_2(T_i) - \Delta_2\Delta_1(T_i) \\
&= \Delta_1(B_i - T_i) - \Delta_2(A_i - T_i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial T_j}\Delta_1(T_j) - \Delta_1(T_i) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial T_j}\Delta_2(T_j) + \Delta_2(T_i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial B_i}{\partial T_j}(A_j - T_j) - \frac{\partial A_i}{\partial T_j}(B_j - T_j)\right) - (A_i - T_i) + (B_i - T_i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial B_i}{\partial T_j}A_j - \frac{\partial A_i}{\partial T_j}B_j\right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial (B_i - A_i)}{\partial T_j}T_j + (B_i - A_i),
\end{aligned}
$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. $\boxtimes$

Jeśli $\operatorname{char}(k) = p > 0$ i $D \in \operatorname{Der}_k(k[X])$, to odwzorowanie D^p jest k-derywacją pierścienia $k[X]$. Z każdym zatem polem wektorowym $s : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ stowarzyszone jest, w tym przypadku, pole wektorowe $s^{[p]} : X \longrightarrow \mathbb{T}X$ odpowiadające derywacji D^p, gdzie D jest derywacją wyznaczoną przez pole s.

11 Rozmaitości normalne

11.1 Normalność

Przypomnijmy, że pierścień bez dzielników zera nazywamy *normalnym* (lub *całkowicie domkniętym*) jeśli jest całkowicie domknięty w swoim ciele ułamków. Pierścieniami normalnymi są np. $\mathbb{Z}$, $k[T_1, \ldots, T_n]$ i ogólniej: każda dziedzina z jednoznacznością rozkładu.

Definicja 11.1.1. Mówimy, że nieprzywiedlna rozmaitość afiniczna X jest *normalna*, jeśli pierścień $k[X]$ jest normalny. Mówimy, że nieprzywiedlna rozmaitość quasi-rzutowa jest *normalna*, jeśli każdy punkt rozmaitości X zawarty jest w pewnym afinicznym otwartym podzbiorze normalnym.

Przykład 11.1.2. Krzywa $X \subseteq k^2$ dana równaniem $y^2 = x^3 + x^2$ nie jest rozmaitością normalną.

Dowód. Element $t = y/x \in k(X)$ jest całkowity nad $k[X]$, gdyż $t^2 = 1 + x$. Ale $t \notin k[X]$. ⊠

Stwierdzenie 11.1.3 ([Szaf88] 155). *Jeśli X jest nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową, to następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Rozmaitość X jest normalna.*

(2) *Dla każdego punktu $p \in X$ pierścień $\mathbb{O}_p(X)$ jest normalny.* ⊠

Ponieważ (jak wiemy) każdy lokalny pierścień regularny jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu (czyli jest w szczególności pierścieniem normalnym), więc z powyższego stwierdzenia wynika:

Twierdzenie 11.1.4. *Każda nieprzywiedlna rozmaitość gładka jest normalna.* ⊠

Istnieją rozmaitości normalne, które nie są gładkie. Przykładem takiej rozmaitości jest stożek $X \subset k^3$, dany równaniem $x^2 + y^2 = z^2$, gdzie $\mathrm{char}(k) \neq 2$ ([Szaf88] 154). Istnieją nawet takie rozmaitości normalne X, które nie są gładkie i każdy pierścień lokalny $\mathbb{O}_p(X)$ (dla wszystkich $p \in X$) jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu ([Szaf88] 157).

Twierdzenie 11.1.5 ([Szaf88] 156). *Niech X będzie normalną rozmaitością quasi-rzutową i niech $Y \subset X$ będzie jej podrozmaitością kowymiaru 1. Istnieje wówczas otwarty podzbiór afiniczny $X' \subseteq X$ taki, że $X' \cap Y \neq \emptyset$ i ideał rozmaitości $X' \cap Y$ jest ideałem głównym w pierścieniu $k[X']$.* ⊠

Przypomnijmy (Stwierdzenie 9.8.5), że zbiór wszystkich punktów osobliwych danej rozmaitości X jest domknięty w X i różny od X.

Twierdzenie 11.1.6 ([Szaf88] 157). *Zbiór wszystkich punktów osobliwych rozmaitości quasi-rzutowej normalnej ma kowymiar nie mniejszy niż 2.* ⊠

Stąd w szczególności otrzymujemy:

Wniosek 11.1.7 ([Szaf88] 157). *Jeśli X jest algebraiczną krzywą, to X jest rozmaitością normalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozmaitością gładką.* ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.2 Normalizacja

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Definicja 11.2.1. *Normalizacją* nieprzywiedlnej rozmaitości quasi-rzutowej X nazywamy każdą nieprzywiedlną normalną rozmaitość quasi-rzutową X^ν taką, że istnieje regularne odwzorowanie $\nu : X^\nu \longrightarrow X$ będące odwzorowaniem skończonym i biwymiernym izomorfizmem.

Przykład 11.2.2. Rozpatrzmy krzywą $X \subseteq k^2$ daną równaniem $y^2 = x^3 + x^2$. Wiemy z Przykładu 11.1.2, że X jest nieprzywiedlną rozmaitością, która nie jest normalna. Znajdziemy jej normalizację. Określamy w tym celu funkcję

$$f : k^1 \longrightarrow X, \quad a \longmapsto (a^2 - 1, a(a^2 - 1)).$$

Funkcja ta jest biwymiernym izomorfizmem. Odwzorowanie odwrotne określone jest poza $(0,0)$ i ma postać $(x,y) \mapsto t = y/x$. Zauważmy, że $f(k^1) = X$, a zatem $f^* : k[X] \longrightarrow k[k^1]$ jest włożeniem. Niech t_1, t_2 będą warstwami wielomianów T_1, T_2 w $k[X]$. Wtedy $f^*(t_1) = t^2 - 1$, $f^*(t_2) = t(t^2 - 1)$. Stąd wynika, że pierścień $k[k^1]$ jest całkowity nad $k[X]$, gdyż t spełnia równanie $t^2 = t_1 + 1$. Zatem f jest odwzorowaniem skończonym. Rozmaitość k^1 jest oczywiście normalna. Widzimy więc, że k^1 jest normalizacją rozmaitości X. ⊠

Podamy teraz kilka faktów dotyczących normalizacji.

Twierdzenie 11.2.3 ([Szaf88] 159). *Każda nieprzywiedlna rozmaitość afiniczna posiada afiniczną*
normalizację. Normalizacja ta jest wyznaczona jednoznacznie, z dokładnością do regularnego izomorfizmu. ⊠

Twierdzenie 11.2.4 ([Szaf88] 161). *Każda nieprzywiedlna krzywa quasi-rzutowa posiada normalizację (która jest oczywiście nieprzywiedlną krzywą quasi-rzutową).* ⊠

Twierdzenie 11.2.5 ([Szaf88] 163). *Normalizacja krzywej rzutowej jest krzywą rzutową.* ⊠

Wniosek 11.2.6 ([Szaf88] 163). *Każda nieprzywiedlna krzywa quasi-rzutowa jest biwymiernie izomorficzna z gładką krzywą rzutową.* ⊠

Twierdzenie 11.2.7 ([Szaf88]168, [Harr]193). *Każda gładka rozmaitość quasi-rzutowa wymiaru n jest regularnie izomorficzna z rozmaitością quasi-rzutową zawartą w $\mathbb{P}^{2n+1}$. W szczególności, każda quasi-rzutowa krzywa gładka jest regularnie izomorficzna z krzywą zawrtą w $\mathbb{P}^3$. Każda powierzchnia quasi-rzutowa gładka jest regularnie izomorficzna z powierzchnią quasi-rzutową zawartą w $\mathbb{P}^5$.* ⊠

12 Dywizory

Każdy wielomian jednej zmiennej $f(t) \in k[t]$ jest postaci $f(t) = c \cdot (t - a_1)^{\alpha_1} \cdots (t - a_s)^{\alpha_s}$, gdzie $c, a_1, \dots, a_s \in k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \geqslant 0$. Każdy taki wielomian jest więc, z dokładnością do niezerowej stałej $c \in k$, wyznaczony przez elementy $a_1, \dots, a_s$ ciała k i nieujemne liczby całkowite $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Podobną własność ma każda funkcja wymierna $\varphi(t) \in k(t)$. Niech $\varphi(t) = f(t)/g(t)$, gdzie $f(t), g(t) \in k[t]$. Wtedy

$$\varphi(t) = c\tfrac{(t-a_1)^{\alpha_1}\cdots(t-a_s)^{\alpha_s}}{(t-b_1)^{\beta_1}\cdots(t-b_r)^{\beta_r}} = c \cdot (t - a_1)^{\alpha_1} \cdots (t - a_s)^{\alpha_s} (t - b_1)^{-\beta_1} \cdots (t - b_r)^{-\beta_r}.$$

Funkcję wymierną $\varphi \in k(t)$ możemy zatem przedstawić w postaci $\varphi(t) = c \cdot (t - a_1)^{\alpha_1} \cdots (t - a_s)^{\alpha_s}$, gdzie $c \in k$, $a_1, \dots, a_s \in k$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ są liczbami całkowitymi.

W niniejszym rozdziale podamy pewne uogólnienie powyższego przedstawienia dla dowolnych funkcji wymiernych φ na nieprzywiedlnej rozmaitości quasi-rzutowej X. Rolę punktów $a_1, \dots, a_s$ odgrywać będą dowolne nieprzywiedlne podrozmaitości w X kowymiaru 1.

12.1 Podrozmaitości kowymiaru 1

Niech X będzie nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową wymiaru s (przypomnijmy, że $s = \dim X = \operatorname{tr.deg}_k k(X)$). Oznaczmy przez $\mathbb{N}(X)$ zbiór wszystkich nieprzywiedlnych domkniętych podzbiorów rozmaitości X kowymiaru 1. Przypomnijmy kilka faktów dotyczących zbioru $\mathbb{N}(X)$.

Twierdzenie 12.1.1. *$Y \in \mathbb{N}(k^n) \iff Y = \mathrm{V_a}(F)$, gdzie F jest nieprzywiedlnym wielomianem w $k[T_1, \dots, T_n]$.* ⊠

Twierdzenie 12.1.2. *$Y \in \mathbb{N}(\mathbb{P}^n) \iff Y = \mathrm{V_p}(F)$, gdzie F jest nieprzywiedlnym wielomianem jednorodnym $k[S_0, \dots, S_n]$.* ⊠

Twierdzenie 12.1.3. *Niech X będzie normalną rozmaitością quasi-rzutową i niech $Y \in \mathbb{N}(X)$. Istnieje wówczas otwarty podzbiór afiniczny $X' \subseteq X$ taki, że $X' \cap Y \neq \emptyset$ i ideał rozmaitości $X' \cap Y$ jest ideałem głównym w pierścieniu $k[X']$.* ⊠

O powyższych twierdzeniach mówiliśmy w rozdziałach 10 i 14. W szczególności $\mathbb{N}(k^1)$ jest zbiorem wszystkich punktów w k^1. Przypomnijmy, że każdą nieprzywiedlną rozmaitość quasi-rzutową $C \in \mathbb{P}^n$ wymiaru 1 nazywamy *krzywą*. Domkniętymi podzbiorami krzywej C są zbiory skończone lub C. Stąd wynika:

Twierdzenie 12.1.4. *Jeśli C jest krzywą, to $\mathbb{N}(C) = C$, tzn. $\mathbb{N}(C)$ jest zbiorem wszystkich punktów krzywej C.* ⊠

12.2 Grupa dywizorów

Zakładamy, że X jest nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową.

Definicja 12.2.1. $\mathbb{Z}$-moduł wolny rozpięty na zbiorze $\mathbb{N}(X)$ nazywamy *grupą dywizorów na* X i oznaczamy przez $\mathrm{DIV}(X)$. Każdy element grupy $\mathrm{DIV}(X)$ nazywamy *dywizorem* na X.

Każdy dywizor D na X jest więc postaci $D = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_r C_r$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$, $C_1, \ldots, C_r \in \mathbb{N}(X)$. Przedstawienie takie jest oczywiście jednoznaczne. Jeśli wszyskie liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ są większe od 0, to mówimy, że dywizor D jest *efektywny*. Piszemy wtedy: $D > 0$. Jeśli $D = 0$ lub $D > 0$ to piszemy: $D \geqslant 0$. Dywizor D nazywamy *prostym* jeśli $r = 1$ i $\alpha_1 = 1$, tzn. jeśli $D \in \mathbb{N}(X)$. Jeśli $D = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_r C_r$ i wszystkie liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ są różne od 0, to zbiór $C_1 \cup \cdots \cup C_r$ oznaczmy przez $\mathrm{Supp}(D)$ i nazywamy *nośnikiem* dywizora D. Zauważmy, że $\mathrm{Supp}(D)$ jest domkniętym podzbiorem w X.

Wiemy, że nieprzywiedlne zbiory domknięte kowymiaru 1 w k^1, to zbiory jednoelementowe (punkty). Zatem $\mathrm{DIV}(k^1)$ jest abelową grupą wolną rozpiętą na zbiorze k^1. Jeśli L jest ciałem to przez L^* oznaczamy grupę $L \setminus 0$.

Stwierdzenie 12.2.2. $\mathrm{DIV}(k^1) \approx k(t)^*/k^*$.

Dowód. Określimy surjekcję grup $f : k(t)^* \longrightarrow \mathrm{DIV}(k^1)$, której jądrem będzie k^*. Jeśli $\varphi \in k(t)^*$, to $\varphi = F/G$, gdzie wielomiany $F, G \in k[t]$ są postaci $F = a(t-a_1)^{\alpha_1} \cdots (t-a_p)^{\alpha_p}$, $G = b(t-b_1)^{\beta_1} \cdots (t-b_q)^{\beta_q}$, to przyjmujemy $f(\varphi) = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p - \beta_1 b_1 - \cdots - \beta_q b_q$. Jest jasne, że $f(\varphi)$ nie zależy od przedstawienia $\varphi = F/G$ i oczywiście f jest surjekcją grup z jądrem równym k^*. $\boxtimes$

Nieprzywiedlne zbiory domknięte kowymiaru 1 w k^n są zbiorami postaci $\mathrm{V_a}(F)$, gdzie F jest nieprzywiedlnym wielomianem z $k[T] = k[T_1, \ldots, T_n]$. Zatem $DIV(k^n)$ jest abelową grupą wolną rozpiętą na zbiorze wszystkich nieprzywiedlnych wielomianów z $k[T]$. Zastępując w dowodzie powyższego stwierdzenia wszystkie wielomiany postaci $(t - a_i), (t - b_j)$ nieprzywiedlnymi wielomianami, otrzymujemy:

Stwierdzenie 12.2.3. $\mathrm{DIV}(k^n) \approx k(T_1, \ldots, T_n)^*/k^*$. $\boxtimes$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.3 Dywizory główne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zakładamy, że nieprzywiedlna rozmaitość quasi-rzutowa X jest nieprzywiedlna w kowymiarze 1, tzn. zbiór punktów osobliwych rozmaitości X (który, jak wiemy, jest zbiorem domkniętym w X) ma kowymiar $\geqslant 2$. Taką rozmaitością jest każda rozmaitość normalna. W szczególności taką rozmaitością jest każda rozmaitość gładka.

Załóżmy, że C jest nieprzywiedlnym zbiorem domkniętym w X kowymiaru 1, tzn. $C \in \mathbb{N}(X)$. Istnieje wtedy (na mocy Twierdzenia 12.1.3) afiniczny zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $U \cap C \neq \emptyset$ i ideał rozmaitości $U \cap C$ (tzn. $\{f \in k[U];\ \forall_{a \in U \cap C}\ f(a) = 0\}$) jest ideałem głównym w $k[U]$. Oznaczmy ten ideał przez (π). Jeśli $f \in k[U] \setminus 0$, to przez $\nu_C(f)$ oznaczamy nieujemną liczbę całkowitą p taką, że $f \in (\pi^p)$, $f \notin (\pi^{p+1})$. Taka liczba $p = \nu_C(f)$ oczywiście istnieje. Jeśli $\varphi = f/g \in k(U)$, to przyjmujemy $\nu_C(\varphi) = \nu_C(f) - \nu_C(g)$. Jest jasne, że liczba całkowita $\nu_C(\varphi)$ nie zależy od przedstawienia $\varphi = f/g$, $f, g \in k[U]$.

Niech teraz $\varphi \in k(X)$. Ponieważ $k(X) = k(U)$, więc mamy liczbę $\nu_C(\varphi)$ zdefiniowaną przy pomocy afinicznego podzbioru $U \subseteq X$. Można udowodnić ([Szaf88] 186), że liczba ta nie zależy od wyboru U. Można ponadto udowodnić następujące dwa stwierdzenia:

Stwierdzenie 12.3.1. *Niech* $\varphi, \psi \in k(X)$. *Wtedy:*

(1) $\nu_C(\varphi\psi) = \nu_C(\varphi) + \nu_C(\psi)$,

(2) $\nu_C(\varphi + \psi) \geqslant \min(\nu_C(\varphi), \nu_C(\psi))$, *o ile* $\varphi + \psi \neq 0$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 12.3.2. *Jeśli $\varphi \in k(X)$, to zbiór $\{C \in \mathbb{N}(X);\ \nu_C(\varphi) \neq 0\}$ jest skończony.* ⊠

W ten sposób z każdą funkcją wymierną $\varphi \in k(X)$ możemy stowarzyszyć dywizor

$$[\varphi] = \sum_{C \in \mathbb{N}(X)} \nu_C(\varphi) C.$$

Nazywamy go *dywizorem głównym.* Jeśli $\varphi, \psi \in k(X)$, to $[\varphi] + [\psi] = [\varphi\psi]$. Dywizory główne stanowią więc podgrupę grupy $\mathrm{DIV}(X)$. Oznaczamy ją przez $P(X)$. Grupę $\mathrm{DIV}(X)/P(X)$ oznaczamy przez $\mathrm{Cl}(X)$ i nazywamy *grupą klas dywizorów na* X. Jeśli $D, D' \in \mathrm{DIV}(X)$, to piszemy $D \sim D'$ w przypadku, gdy $D - D' \in P(X)$.

Z dowodu Stwierdzenia 12.2.3 (patrz dowód Stwierdzenia 12.2.2) otrzymujemy:

Stwierdzenie 12.3.3. $\mathrm{Cl}(k^n) = 0$. ⊠

Stwierdzenie 12.3.4. $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \approx \mathbb{Z}$.

Dowód. Nieprzywiedlne zbiory domknięte kowymiaru 1 w $\mathbb{P}^n$ są zbiorami postaci $\mathrm{V_p}(F)$, gdzie F jest nieprzywiedlnym wielomianem jednorodnym z $k[S] = k[S_0, \dots, S_n]$. Każdy zatem dywizor $D \in \mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n)$ jest postaci $D = \sum_i m_i \mathrm{V_p}(F_i)$, gdzie $m_i \in \mathbb{Z}$ i każde F_i jest jednorodnym wielomianem nieprzywiedlnym w $k[S]$. Definiujemy *stopień* $\deg D$ przyjmując $\deg D = \sum_i m_i \deg F_i$. Zauważmy, że funkcja $\deg : \mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$ jest homomorfizmem grup. Jest to ponadto surjekcja (gdyż $m = \deg(m\mathrm{V_p}(S_0))$, dla $m \in \mathbb{Z}$).

Przypomnijmy (patrz Rozdział 6), że

$$k(\mathbb{P}^n) = k(T) = k\{S\} = \{F/G;\ F, G \in \mathit{Form}_k[S_0, \dots, S_n], \deg F = \deg G\}$$

i rozważmy monomorfizm grup $\alpha : k(\mathbb{P}^n)^*/k^* \longrightarrow \mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n)$ określony wzorem

$$u = \tfrac{aF_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}}{bG_1^{n_1} \cdots G_s^{n_s}} \longmapsto m_1\mathrm{V_p}(F_1) + \cdots + m_r\mathrm{V_p}(F_r) - n_1\mathrm{V_p}(G_1) - \cdots - n_s\mathrm{V_p}(G_s).$$

Mamy wtedy następujący ciąg grup abelowych:

$$0 \longrightarrow k(\mathbb{P}^n)^*/k^* \xrightarrow{\alpha} \mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{12.1}$$

Pokażemy, że ciąg ten jest dokładny. Wystarczy pokazać, że $\mathrm{Im}\ \alpha = \mathrm{Ker} \deg$. Niech $D \in \mathrm{Im}\ \alpha$. Wtedy

$$D = \alpha(u) = m_1\mathrm{V_p}(F_1) + \cdots + m_r\mathrm{V_p}(F_r) - n_1\mathrm{V_p}(G_1) - \cdots - n_s\mathrm{V_p}(G_s),$$

gdzie u jest takie, jak powyżej. W liczniku i mianowniku elementu u mamy wielomiany tego samego stopnia. Stopień licznika jest równy $\sum m_i \deg F_i$, a mianownika $\sum n_j \deg G_j$. Zatem

$$\deg D = \sum m_i \deg F_i - \sum n_j \deg G_j = 0.$$

Oznacza to, że $\mathrm{Im}\ \alpha \subseteq \mathrm{Ker} \deg$. Niech teraz $D = m_1\mathrm{V_p}(F_1) + \cdots + m_r\mathrm{V_p}(F_r) - n_1\mathrm{V_p}(G_1) - \cdots - n_s\mathrm{V_p}(G_s)$ (gdzie liczby $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$ są dodatnie) będzie dywizorem należącym do $\mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n)$ takim, że $\deg(D) = 0$. Wtedy $\sum m_i \deg F_i = \sum n_j \deg G_j$, a zatem formy $F = F_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}$ i $G = G_1^{n_1} \cdots G_s^{n_s}$ mają jednakowy stopień. Widzimy więc, że $F/G \in k(\mathbb{P}^n)^*$ i $\alpha(F/G + k^*) = D$.

Wykazaliśmy, że ciąg (12.1) jest dokładny. Z określenia homomorfizmu α wynika, że $\mathrm{Im}\ \alpha$ jest grupą $P(\mathbb{P}^n)$, dywizorów głównych rozmaitości $\mathbb{P}^n$. Mamy zatem:

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{DIV}(\mathbb{P}^n)/P(\mathbb{P}^n) \approx \mathrm{Im}(\deg) = \mathbb{Z}$$

i to kończy dowód stwierdzenia. ⊠

Stwierdzenie 12.3.5 ([Szaf88] 189). $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}) = \mathbb{Z}^r$, $\mathrm{Cl}(X \times k^1) \approx \mathrm{Cl}(X)$. ⊠

Twierdzenie 12.3.6 ([Szaf88] 193). *Jeśli rozmaitość X jest gładka, $a_1, \dots, a_m \in X$ i $D \in \mathrm{DIV}(X)$, to istnieje dywizor $D' \in \mathrm{DIV}(X)$ taki, że $D \sim D'$ i $a_1, \dots, a_m \notin \mathrm{Supp}(D')$.* ⊠

Uwaga 12.3.7. *Wprowadziliśmy dywizory główne. Istnieje jeszcze inna wyróżniona klasa dywizorów. Są to tak zwane dywizory lokalnie główne, które też tworzą podgrupę grupy $\mathrm{DIV}(X)$. Odpowiednią grupę ilorazową oznacza się przez PIC(X) i nazywa grupą Picara rozmaitości X. Tą grupą nie będziemy się tu zajmować.* ⊠

Jeśli $[\varphi] = \sum_i \alpha_i C_i$ jest dywizorem głównym, to oznaczamy:

$$[\varphi]_0 = \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i C_i, \quad [\varphi]_\infty = -\sum_{\alpha_i < 0} \alpha_i C_i.$$

Wtedy $[\varphi] = [\varphi]_0 - [\varphi]_\infty$. Dywizory $[\varphi]_0, [\varphi]_\infty$ są oczywiście efektywne. Dywizor $[\varphi]_0$ nazywamy *dywizorem zer funkcji* φ, a dywizor $[\varphi]_\infty$ ıdywizorem biegunów funkcji φ.

Z definicji dywizora głównego wynika, że jeśli $f \in k[X]$, to $[f]$ jest dywizorem efektywnym. Można udowodnić ([Szaf88] 187), że jeśli X jest rozmaitością gładką, to zachodzi też odwrotnie: *jeżeli $\varphi \in k(X)$ i dywizor $[\varphi]$ jest efektywny, to $\varphi \in k[X]$.* To samo zachodzi dla rozmaitości normalnych.

Wiemy, że jeśli rozmaitość X jest rzutowa, to każda funkcja regularna na X jest funkcją stałą. Z tego wynika, że jeśli dywizor $[\varphi]$, funkcji wymiernej φ na takiej rozmaitości (normalnej) , jest efektywny, to φ jest funkcją stałą. Stąd dalej wynika:

Wniosek 12.3.8. *Niech $f, g \in k(X)$, gdzie X jest normalną rozmaitością rzutową. Jeśli $[f] = [g]$, to istnieje stała $\alpha \in k$ taka, że $f = \alpha g$.*

Dowód. Jeśli $[f] = [g]$, to $[fg^{-1}] = 0$, więc dywizor $[fg^{-1}]$ jest efektywny. Zatem fg^{-1} jest elementem ciała k. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.4 Przestrzeń liniowa stowarzyszona z dywizorem

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie gładką nieprzywiedlną rozmaitością quasi-rzutową i niech D będzie dywizorem należącym do $\mathrm{DIV}(X)$. Załóżmy, że

$$D = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_r C_r,$$

gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{Z}$ oraz $C_1, \dots, C_r \in \mathbb{N}(X)$. Przypomnijmy, że jeśli wszyskie liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ są nieujemne, to piszemy $D \geqslant 0$. Dywizor D jest efektywny jeśli wszystkie liczby $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ są większe od zera. Jeśli D' jest drugim dywizorem na X, to piszemy $D' \geqslant D$ w przypadku, gdy $D' - D \geqslant 0$. W szczególności jeśli $f, g \in k(X)$, to $[f] \geqslant [g]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_C(f) \geqslant \nu_C(g)$, dla wszystkich $C \in \mathbb{N}(X)$.

Z każdym dywizorem $D \in \mathrm{DIV}(X)$ stowarzyszamy podzbiór $\mathcal{L}(D)$ ciała $k(X)$ zdefiniowany następująco:

Definicja 12.4.1. $\mathcal{L}(D) = \{f \in k(X) \smallsetminus 0;\ [f] + D \geqslant 0\} \cup \{0\}$.

Lemat 12.4.2. *$\mathcal{L}(D)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem k.*

Dowód. Niech $f \in k(X) \smallsetminus 0$ i $a \in k \smallsetminus 0$. Z definicji liczb całkowitych postaci $\nu_C(f)$ wynika, że $\nu_C(f) = \nu_C(af)$, dla wszystkich $C \in \mathbb{N}(X)$. Zatem $[af] = [f]$. Jeśli więc $f \in \mathcal{L}(D)$, to $af \in \mathcal{L}(D)$. Addytywność zbioru $\mathcal{L}(D)$ wynika z nierówności $\nu_C(f+g) \geqslant \min(\nu_C(f), \nu_C(g))$. ⊠

Definicja 12.4.3. $\mathcal{L}(D)$ nazywamy *przestrzenią liniową stowarzyszoną z dywizorem D*. Wymiar przestrzeni $\mathcal{L}(D)$ nad k nazywamy *wymiarem dywizora D* i oznaczamy przez $l(D)$.

Niech D, D' będą dywizorami na X. Jest oczywiste, że jeśli $D \leqslant D'$, to $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D')$ i stąd $l(D) \leqslant l(D')$. Przypomnijmy, że $D \sim D' \iff D - D' \in P(X)$. Można udowodnić ([Szaf88] 197), że jeśli $D \sim D'$, to $l(D) = l(D')$.

Przestrzeń $\mathcal{L}(D)$ odgrywa ważną rolę w przypadku, gdy X jest gładką rozmaitością rzutową. W tym przypadku można udowodnić:

Twierdzenie 12.4.4 ([Szaf88] 197, 211). *Jeśli D jest dywizorem na gładkiej rozmaitości rzutowej X, to jego wymiar $l(D)$ jest liczbą skończoną.* ⊠

Zakładać będziemy teraz, że X jest gładką krzywą rzutową. Przypomnijmy, że w tym przypadku $\mathbb{N}(X) = X$, tzn. $\mathbb{N}(X)$ jest zbiorem wszystkich punktów krzywej X.

Definicja 12.4.5. Jeśli $D = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_r C_r$, jest dywizorem na X, to liczbę całkowitą $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ oznaczamy przez $\deg D$ i nazywamy *stopniem dywizora D*.

Można udowodnić:

Twierdzenie 12.4.6. *Jeśli X jest gładką krzywą rzutową i $f \in k(X) \smallsetminus k$, to* $\deg[f]_0 = (k(X) : k(f)) < \infty$. ⊠

Stąd wynika:

Wniosek 12.4.7. *Jeśli X jest gładką krzywą rzutową i $f \in k(X) \smallsetminus 0$, to* $\deg[f] = 0$. ⊠

Można również udowodnić następujące

Twierdzenie 12.4.8 (Riemanna). *Jeśli X jest gładką krzywą rzutową, to istnieje stała liczba g taka, że*

$$l(D) \geqslant \deg D + 1 - g,$$

dla wszystkich dywizorów $D \in \mathrm{DIV}(X)$. ⊠

Przyjmując w powyższym twierdzeniu $D = 0$ widzimy, że $g \geqslant 0$ (gdyż $1 \geqslant 0 + 1 - g$).

Definicja 12.4.9. Najmniejszą z liczb g spełniających związek zawarty w Twierdzeniu Riemanna nazywamy *rodzajem krzywej rzutowej X*.

Przy $k = \mathbb{C}$ rodzaj g jest identyczny z klasycznym rodzajem powierzchni.

Twierdzenie 12.4.10 (Riemanna - Rocha). *Jeśli X jest gładką krzywą rzutową, to istnieje kanoniczny dywizor $W \in \mathrm{DIV}(X)$ taki, że*

$$l(D) = \deg D + 1 - g + l(W - D),$$

dla wszystkich dywizorów $D \in \mathrm{DIV}(X)$, gdzie g jest rodzajem krzywej X. ⊠

Przy $D = 0$ otrzymujemy $l(W) = g$. Przy $D = W$ otrzymujemy $\deg W = 2g - 2$. Jeśli $\deg D \geqslant 2g - 2$, to $l(W - D) = 0$, a zatem dla takich D zachodzi równość w Twierdzeniu Riemanna. Można udowodnić, że $g = 0 \iff X$ jest biwymiernie izomorficzne z $\mathbb{P}^1$. Ponadto, $g = 1 \iff X$ jest krzywą eliptyczną, tzn. X jest biwymiernie izomorficzne z płaską krzywą gładką trzeciego stopnia. Można też udowodnić, że jeśli X jest krzywą gładką trzeciego stopnia, to na X istnieje struktura grupy abelowej taka, że $\mathrm{Cl}(X) \approx X$.

Literatura

[At-Mac] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley Publishing Company, 1969.

[BalJ85] S. Balcerzyk, T. Józefiak, *Pierścienie przemienne*, PWN, Warszawa 1985.

[Bebe76] L. Bebe, *Mini geometria*, Kwant 6(1976) 2-12.

[Fult78] W. Fulton, *Algebraic Curves, An Introduction to Algebraic Geometry*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1978).

[Harr] J. Harris, *Algebraic Geometry. A First Course.* Graduate Texts in Mathematics 133, Springer-Verlag, 1992.

[Hart67] R. Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1967. Tłum. ros. Moskwa 1970.

[Kart76] F. Karteszi, *Introduction to finite geometries*, Akademiai Kiado, Budapest, 1976.

[MatEn] *Matematyczna Encyklopedia*, Tomy 1 - 5, Moskwa, 1977 - 1985.

[Now94a] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, UMK, Toruń, 1994.

[Now95a] A. Nowicki, *Moduł różniczek*, Preprint 1995.

[Spri81] T. A. Springer, *Invariant Theory*, Lecture Notes in Mathemathics **585**, 1977, (przekład rosyjski: MIR, Moskwa 1981).

[Szaf72] I. R. Szafarewicz, *Podstawy geometrii algebraicznej* (po rosyjsku), Izd. Nauka, Moskwa, 1972.

[Szaf88] I. R. Szafarewicz, *Podstawy geometrii algebraicznej* (po rosyjsku), Second Ed., v.1, v.2, Izd. Nauka, Moskwa, 1988.

[Tull67] A. Tuller, *A Modern Introduction to Geometries*, D. van Nostrand Company, Inc., Toronto, New York, London, 1967.

[ZarSam] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, New York: D. Van Nostrand, vol. I, 1958, vol. II, 1960.