

УДК 519.2

А. Ю. Заиграев, М. Алама-Бучко
г. Торунь (Польша)

Асимптотика оптимальной доверительной области для сдвига и масштаба, основанной на двух порядковых статистиках

Аннотация

При помощи двух порядковых статистик строится двумерная оптимальная сильная доверительная область для параметров сдвига и масштаба и исследуется ее асимптотика, когда размер выборки стремится к бесконечности. Кроме того, построена более простая доверительная область, асимптотически эквивалентная оптимальной. Полученная доверительная область сравнивается с аналогичной доверительной областью, основанной на выборочном среднем и выборочном средне-квадратическом отклонении.

Введение

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $\{x_i\}$ – независимые и одинаково распределенные вещественнозначные случайные величины, является выборкой из распределения P_θ , $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, причем θ_1 – это параметр сдвига, а θ_2 – параметр масштаба. Будем рассматривать задачу оценивания неизвестного вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ при помощи двумерных доверительных областей.

Пусть уровень значимости $\alpha \in (0, 1)$ задан. Доверительной областью уровня α (далее просто доверительной областью) называют связное борелевское множество $B = B(x)$, которое можно рассматривать как отображение $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{B}^2$ такое, что для всех (θ_1, θ_2) выполняется

$$P_{(\theta_1, \theta_2)}((\theta_1, \theta_2) \in B(x)) \geq \alpha, \quad (1)$$

где \mathcal{B}^2 означает σ -алгебру борелевских множеств в \mathbb{R}^2 . Доверительную область $B(x)$ называют сильной, если в (1) имеет место равенство.

Для сравнения доверительных областей естественно пользоваться функцией риска вида

$$R(\theta, B) = E_\theta \lambda_2(B(x)),$$

где $\lambda_2(\cdot)$ означает меру Лебега в \mathcal{B}^2 . Т.е. лучшей будет та доверительная область, которая в среднем имеет меньшую площадь. Среди сильных доверительных областей особо следует выделить множества, минимизирующие функцию риска. Будем называть их оптимальными.

Метод конструкции оптимальных доверительных областей хорошо известен (см., например, [2], [3], [4]). Возьмем пару статистик $t_1(x)$ и $t_2(x)$ удовлетворяющих условиям: для любых $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$

$$t_1(bx + a\mathbf{1}_n) = bt_1(x) + a, \quad t_2(bx + a\mathbf{1}_n) = bt_2(x), \quad (2)$$

где $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Взяв множество $A \in \mathcal{B}^2$ такое, что

$$P_{(0,1)} \left(\left(-\frac{t_1(x)}{t_2(x)}, \frac{1}{t_2(x)} - 1 \right) \in A \right) = \alpha, \quad (3)$$

получаем

$$P_{(\theta_1, \theta_2)} \left(\left(\frac{\theta_1 - t_1(x)}{t_2(x)}, \frac{\theta_2 - t_2(x)}{t_2(x)} \right) \in A \right) = \alpha.$$

Таким образом множество

$$B_A(x) = (t_1(x), t_2(x)) + t_2(x)A \quad (4)$$

является сильной доверительной областью для вектора (θ_1, θ_2) . Заметим, что для $B_A(x)$ выполняется

$$R(\theta, B_A) = \lambda_2(A) E_{\theta} t_2^2(x),$$

т.е. функция риска определяется площадью множества A .

Пусть далее распределение случайного вектора $(-t_1(x)/t_2(x), 1/t_2(x) - 1)$ для выборки x из распределения $P_{(0,1)}$, обладает плотностью $p(u)$, причем для всех $z > 0$

$$\int_{\{u: p(u)=z\}} p(u) du = 0.$$

Доверительная область $B_A(x)$ вида (4) будет оптимальной среди областей, построенных при помощи пары статистик $t_1(x)$ и $t_2(x)$, если

$$A = \{u \in \mathbb{R}^2 : p(u) \geq z_{\alpha}\},$$

где z_{α} определяется условием

$$\int_A p(u) du = \alpha.$$

Стоит подчеркнуть, что построенная таким образом оптимальная доверительная область зависит от выбора $t_1(x)$ и $t_2(x)$.

Пусть $x_{k:n}$ и $x_{m:n}$ обозначают, соответственно, k -ую и m -ую порядковые статистики, $1 \leq k < m < n$. Целью данной работы является построение оптимальной

доверительной области, основанной на паре статистик $t_1(x)$ и $t_2(x)$, которые являются линейным преобразованием $x_{k:n}$ и $x_{m:n}$, и исследование ее асимптотического поведения, когда размер выборки $n \rightarrow \infty$, а $k = k_n$ и $m = m_n$ таковы, что $k/n \rightarrow p, m/n \rightarrow q, 0 < p < q < 1$. Для этого сначала мы установим асимптотику, при $n \rightarrow \infty$, плотности случайного вектора

$$X_n = \sqrt{n} \left(-\frac{t_1(x)}{t_2(x)}, \frac{1}{t_2(x)} - 1 \right).$$

Следует отметить, что предельные распределения для случайных векторов, состоящих из порядковых статистик, можно найти, например, в [1, Гл. 9], а асимптотические представления для плотностей таких векторов – в работах Reissa [5]–[9].

Полученный результат позволит нам получить асимптотическое представление для оптимальной доверительной области, основанной на $t_1(x)$ и $t_2(x)$. В качестве альтернативы оптимальной доверительной области будет предложена несколько упрощенная доверительная область и произведено сравнение функций риска соответствующих этим двум областям, когда $n \rightarrow \infty$. Сравним также функции риска для двух упрощенных доверительных областей, одна из которых основана на статистиках $t_1(x)$ и $t_2(x)$, а другая – на выборочном среднем \bar{x} и выборочном среднеквадратическом отклонении s (см. [2]).

1. Основные результаты

Пусть (y_1, y_2, \dots, y_n) – случайная выборка из показательного распределения $E(0, 1)$ с параметром сдвига 0 и параметром масштаба 1, а $y_{k:n}, y_{m:n}$ – соответствующие порядковые статистики. Обозначим

$$\lambda_k = \lambda_{k/n} = \frac{1}{1 - k/n}, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Следующий результат можно найти в [8] и [9, Гл. 4].

Лемма 1. Для плотности $p_{Z_n}(v)$ случайного вектора

$$Z_n = \sqrt{n} (y_{k:n} - \ln \lambda_k, y_{m:n} - \ln \lambda_m)$$

выполняется

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^2} \left| p_{Z_n}(v) - f_B(v) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} L_1(v) + \frac{1}{n} L_2(v) \right) \right| = O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $f_B(v)$ – плотность двумерного нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_k - 1 & \lambda_k - 1 \\ \lambda_k - 1 & \lambda_m - 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $L_1(v)$, $L_2(v)$ являются многочленами, соответственно третьей и шестой степени, причем

$$L_1(v) = \frac{v_1^3(\lambda_k + 1)}{6(\lambda_k - 1)^2} + \frac{(v_2 - v_1)^3(\lambda_m + \lambda_k)}{6(\lambda_m - \lambda_k)^2} + \frac{v_1(\lambda_k^2 - \lambda_m)}{(\lambda_k - 1)(\lambda_m - \lambda_k)} - \frac{v_2\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_k},$$

т.е. $L_1(v)$ представляет собой сумму однородных многочленов третьей и первой степени.

Пусть G и g обозначают, соответственно, функцию распределения и плотность стандартного распределения $P_{(0,1)}$, а

$$G^{-1}(u) = \inf\{v : G(v) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Следующий результат является вспомогательным для установления асимптотики плотности случайного вектора X_n . Обозначим

$$G^{-1}(k/n) = \mu_{k/n} = \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

и предположим, что $\mu_k \neq \mu_m$ для $k \neq m$. Далее символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем обычное скалярное произведение.

Лемма 2. Пусть (x_1, x_2, \dots, x_n) – случайная выборка из распределения $P_{(0,1)}$, а g – дважды дифференцируемая функция такая, что $g(\mu_k) > 0$ для всех $1 \leq k \leq n-1$. Тогда для плотности $p_{X'_n}(v)$ случайного вектора

$$X'_n = \sqrt{n}(x_{k:n} - \mu_k, x_{m:n} - \mu_m)$$

выполняется

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^2} \left| p_{X'_n}(v) - f_\Sigma(v) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} T_1(v) + \frac{1}{n} T_2(v) \right) \right| = O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\Sigma = A^{-1}BA^{-1}$,

$$A = \begin{pmatrix} g(\mu_k)\lambda_k & 0 \\ 0 & g(\mu_m)\lambda_m \end{pmatrix}.$$

Кроме того, многочлены $T_1(v)$ и $T_2(v)$, соответственно третьей и шестой степени, выражаются через $L_1(v)$ и $L_2(v)$, причем

$$T_1(v) = L_1(vA) + \langle v(V + A), \mathbf{1}_2 \rangle - \frac{1}{2}v\Sigma^{-1}(V + A)(v^2)^T,$$

где $v^2 = (v_1^2, v_2^2)$,

$$V = \begin{pmatrix} \frac{g'(\mu_k)}{g(\mu_k)} & 0 \\ 0 & \frac{g'(\mu_m)}{g(\mu_m)} \end{pmatrix}.$$

Следующие две теоремы являются основными для нахождения оптимальной доверительной области.

Теорема 1. При выполнении условий Леммы 2, для плотности $p_{X_n}(v)$ случайного вектора

$$X_n = \sqrt{n} \left(\frac{x_{m:n}\mu_k - x_{k:n}\mu_m}{x_{m:n} - x_{k:n}}, \frac{\mu_m - \mu_k}{x_{m:n} - x_{k:n}} - 1 \right)$$

выполняется

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^2} \left| p_{X_n}(v) - f_W(v) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} Q_1(v) + \frac{1}{n} Q_2(v) \right) \right| = O(n^{-3/2}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$W = \frac{1}{(\mu_m - \mu_k)^2} \begin{pmatrix} \mu_m & -\mu_k \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} \mu_m & -1 \\ -\mu_k & 1 \end{pmatrix} = (P^{-1})^T \Sigma P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_k & \mu_m \end{pmatrix}.$$

Кроме того, многочлены $Q_1(v)$ и $Q_2(v)$, соответственно третьей и шестой степени, выражаются через $T_1(v)$ и $T_2(v)$, причем

$$Q_1(v) = T_1(-vP) + v_2 (vW^{-1}v^T - 3).$$

Теорема 2. При выполнении условий Леммы 2 множество

$$A_n = \{v \in \mathbb{R}^2 : p_{X_n}(v) \geq v_{\alpha,n}\},$$

где $v_{\alpha,n}$ определяется условием

$$\int_{A_n} p_{X_n}(v) dv = \alpha,$$

имеет вид

$$A_n = \left\{ (r, \phi) : 0 \leq r \leq r_0(\phi) \left[1 + \frac{r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_2(\phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right], \phi \in [0, 2\pi) \right\},$$

где $r_0(\phi) = \beta \sigma^{-1}(\phi)$, $r_1(\phi) = \beta^{-2} H_1(r_0(\phi), \phi)$, $\beta = \sqrt{-2 \ln(1 - \alpha)}$,

$$\begin{aligned} r_2(\phi) &= \frac{H_2(r_0(\phi), \phi)}{\beta^2} - \frac{H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{2\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{H_1'(r_0(\phi), \phi) H_1(r_0(\phi), \phi)}{\beta^3 \sigma(\phi)} - \gamma - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi \beta^3 \sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta H_2(r_0(\psi), \psi)}{\sigma^2(\psi)} + \frac{H_1'(r_0(\psi), \psi) H_1(r_0(\psi), \psi)}{\sigma^3(\psi)} \right] d\psi, \\ \gamma &= \frac{1}{2\pi(1 - \alpha) \beta^2 \sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\phi)} r e^{-r^2 \sigma^2(\phi)/2} H_2(r, \phi) dr d\phi. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma^2(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)W^{-1}(\cos \phi, \sin \phi)^T$, $H_i(r, \phi) = Q_i(r \cos \phi, r \sin \phi)$, $i = 1, 2$,
 $H'_1(r_0(\phi), \phi) = \frac{\partial H_1(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=r_0(\phi)}$.

Согласно конструкции, множество A_n из Теоремы 2 удовлетворяет условию $P(X_n \in A_n) = \alpha$, т.е.

$$P_{(0,1)} \left(\left(-\frac{t_1(x)}{t_2(x)}, \frac{1}{t_2(x)} - 1 \right) \in \frac{1}{\sqrt{n}} A_n \right) = \alpha$$

(см. (3)), где пара статистик

$$t_1(x) = \frac{x_{k:n}\mu_m - x_{m:n}\mu_k}{\mu_m - \mu_k}, \quad t_2(x) = \frac{x_{m:n} - x_{k:n}}{\mu_m - \mu_k} \quad (5)$$

удовлетворяет (2). Поэтому множество

$$B_{A_n}(x) = (t_1(x), t_2(x)) + \frac{t_2(x)}{\sqrt{n}} A_n \quad (6)$$

является оптимальной доверительной областью для (θ_1, θ_2) (см. (4)).

Как уже упоминалось во Введении, в качестве альтернативы для $B_{A_n}(x)$ можно предложить также упрощенную доверительную область, которая строится на основании следующего результата.

Теорема 3. При выполнении условий Леммы 2 множество

$$A_{n,0} = \{v \in \mathbb{R}^2 : f_W(v) \geq \tilde{v}_{\alpha,n}\},$$

где $\tilde{v}_{\alpha,n}$ определяется условием

$$\int_{A_{n,0}} p_{X_n}(v) dv = \alpha,$$

имеет вид

$$A_{n,0} = \left\{ (r, \phi) : 0 \leq r \leq r_0(\phi) \left[1 - \frac{\gamma}{n} + O(n^{-3/2}) \right], \phi \in [0, 2\pi) \right\},$$

где $r_0(\phi)$ и γ определены в Теореме 2.

Заметим, что множество

$$B_{A_{n,0}}(x) = (t_1(x), t_2(x)) + \frac{t_2(x)}{\sqrt{n}} A_{n,0} \quad (7)$$

является сильной доверительной областью для (θ_1, θ_2) . Хотя эта область и не оптимальна, ее можно использовать в качестве приближения для $B_{A_n}(x)$.

Качество такого приближения устанавливается в следующей теореме.

Теорема 4. При выполнении условий Леммы 2 имеет место

$$\frac{R(\theta, B_{A_{n,0}})}{R(\theta, B_{A_n})} = \frac{\lambda_2(\bar{A}_{n,0})}{\lambda_2(A_n)} = 1 + \frac{\kappa}{n} + O(n^{-3/2}),$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2\pi\beta^2\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi.$$

Значения постоянной κ при некоторых значениях α , вычисленные при помощи программы Maple, для $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$ и распределений: $N(0, 1)$ (стандартного нормального), $E(-1, 1)$, $L(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (Лапласа с параметром сдвига 0 и параметром масштаба $\frac{\sqrt{2}}{2}$) и $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (равномерного в интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$) приведены в следующей таблице:

распределение	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$
$N(0, 1)$	2.92224402	6.38165836	21.15193168
$E(-1, 1)$	4.86434853	11.00009616	36.10153707
$L(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	2.19894451	4.58574270	15.19919780
$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	5.46178066	12.19884647	39.88589904

В последней теореме сравниваются функции риска соответствующие двум областям: упрощенной доверительной области $B_{A_{n,0}}(x)$ вида (7) и упрощенной доверительной области

$$B_{\bar{A}_{n,0}}(x) = (\bar{x}, s) + \frac{s}{\sqrt{n}} \bar{A}_{n,0},$$

где множество $\bar{A}_{n,0}$ строится подобно множеству $A_{n,0}$ (см. [2]).

Теорема 5. Пусть выполняются условия Леммы 2, а случайная величина ξ , имеющая распределение $P_{(0,1)}$, такова, что $E\xi = 0$, $E\xi^2 = 1$, $E\xi^3 = b_3$, $E\xi^4 = b_4$, $E\xi^8 < \infty$, $b_4 - b_3^2 - 1 > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g'(u)| du < \infty.$$

Тогда

$$\frac{R(\theta, B_{\bar{A}_{n,0}})}{R(\theta, B_{A_{n,0}})} = \frac{(\mu_m - \mu_k)^2 E_{(0,1)} s^2}{E_{(0,1)} (x_{m:n} - x_{k:n})^2} \cdot \sqrt{\frac{\det \bar{W}}{\det W}} \left[1 + \frac{2(\gamma - \bar{\gamma})}{n} + O(n^{-3/2}) \right],$$

где

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_3}{2} \\ \frac{b_3}{2} & \frac{b_4-1}{4} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2\pi(1-\alpha)\beta^2\sqrt{\det \bar{W}}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta\bar{\sigma}^{-1}(\phi)} r e^{-r^2\bar{\sigma}^2(\phi)/2} \bar{H}_2(r, \phi) dr d\phi,$$

$$\bar{\sigma}^2(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi) \bar{W}^{-1} (\cos \phi, \sin \phi)^T, \quad \bar{H}_2(r, \phi) = R_2(r \cos \phi, r \sin \phi),$$

причем $R_2(\cdot)$ – однородный многочлен шестой степени, который выражается через моменты ξ (см. Лемму 2.2 в [2]).

Замечание. При $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\det \bar{W}}{\det W}} &= \frac{\sqrt{b_4 - b_3^2 - 1}(\mu_m - \mu_k)\lambda_k\lambda_m g(\mu_k)g(\mu_m)}{2\sqrt{(\lambda_k - 1)(\lambda_m - \lambda_k)}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\sqrt{b_4 - b_3^2 - 1}(G^{-1}(q) - G^{-1}(p))g(G^{-1}(q))g(G^{-1}(p))}{2\sqrt{p(q-p)(1-q)}}, \end{aligned}$$

$$\frac{(\mu_m - \mu_k)^2 E_{(0,1)} s^2}{E_{(0,1)}(x_{m:n} - x_{k:n})^2} \rightarrow 1.$$

Предельные значения величины

$$\delta_n = \frac{(\mu_m - \mu_k)^2 E_{(0,1)} s^2}{E_{(0,1)}(x_{m:n} - x_{k:n})^2} \cdot \sqrt{\frac{\det \bar{W}}{\det W}}$$

при $n \rightarrow \infty$, в зависимости от p , для случая $q = 1 - p$ и разных распределений представлены в следующей таблице:

распределение	$p = 0.1$	$p = 0.25$	$p = 0.33$	$p = 0.4$
$N(0, 1)$	0.624096971	0.544890323	0.4240357390	0.2989516798
$E(-1, 1)$	2.210914582	1.165254298	0.8137333275	0.5439885265
$L(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	0.569022232	0.774962107	0.7436381333	0.6311452737
$U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	1.154700538	0.365148371	0.2281129251	0.1443375674

Анализируя эту таблицу, легко придти к следующим выводам:

- для рассмотренных распределений, кроме распределения Лапласа, предел δ_n монотонно убывает при росте p ; иными словами, чем ближе p к q , тем риск для доверительной области, основанной на статистиках (5), будет все большим по сравнению с риском для доверительной области, основанной на статистиках \bar{x} и s ;
- для показательного и равномерного распределений существуют интервалы значений p , для которых доверительные области, основанные на статистиках (5), имеют меньший риск по сравнению с доверительными областями, основанными на статистиках \bar{x} и s .

2. Доказательство результатов

Доказательство Леммы 2. Используя тот факт, что распределения $x_{k:n}$ и $G^{-1}(1 - e^{-y_{k:n}})$ совпадают, несложно установить, что отображение $(u_1, u_2) \mapsto (v_1, v_2)$, переводящее вектор Z_n из Леммы 1 в вектор X'_n , определяется формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{n} \left(G^{-1} \left(1 - e^{-\frac{u_1}{\sqrt{n}}} / \lambda_k \right) - \mu_k \right), \\ v_2 &= \sqrt{n} \left(G^{-1} \left(1 - e^{-\frac{u_2}{\sqrt{n}}} / \lambda_m \right) - \mu_m \right). \end{aligned}$$

Следовательно, обратное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{n} \ln \left[\lambda_k \left(1 - G \left(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \mu_k \right) \right) \right], \\ u_2 &= -\sqrt{n} \ln \left[\lambda_m \left(1 - G \left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + \mu_m \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_1} = \frac{g\left(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \mu_k\right)}{1 - G\left(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \mu_k\right)}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v_2} = \frac{g\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + \mu_m\right)}{1 - G\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + \mu_m\right)}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v_1} = \frac{\partial u_1}{\partial v_2} = 0,$$

находим Якобиан нашего отображения:

$$J_n(v) = \frac{g\left(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \mu_k\right)g\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + \mu_m\right)}{\left(1 - G\left(\frac{v_1}{\sqrt{n}} + \mu_k\right)\right)\left(1 - G\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + \mu_m\right)\right)}. \quad (9)$$

Для достаточно больших n , пользуясь формулой Тейлора, получаем из (8) и (9), соответственно,

$$u = vA + \frac{1}{2\sqrt{n}}v^2(V + A)A + \frac{a(v)}{6n} + O(n^{-3/2})\mathbf{1}_2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a(v) &= \left((g''(\mu_k)\lambda_k + 3g(\mu_k)g'(\mu_k)\lambda_k^2 + 2g^3(\mu_k)\lambda_k^3) v_1^3, \right. \\ &\quad \left. (g''(\mu_m)\lambda_m + 3g(\mu_m)g'(\mu_m)\lambda_m^2 + 2g^3(\mu_m)\lambda_m^3) v_2^3 \right), \end{aligned}$$

и

$$J_n(v) = \det A + \frac{J_1(v)}{\sqrt{n}} + \frac{J_2(v)}{n} + O(n^{-3/2}), \quad (11)$$

где $J_1(v) = \det A \cdot \langle v(V + A), \mathbf{1}_2 \rangle$,

$$J_2(v) = \det A \left(\frac{g''(\mu_k)}{2g(\mu_k)} + \frac{3g'(\mu_k)\lambda_k}{2} + g^2(\mu_k)\lambda_k^2 \right) v_1^2 + \det A (v(V + A))_1 (v(V + A))_2 +$$

$$+ \det A \left(\frac{g''(\mu_m)}{2g(\mu_m)} + \frac{3g'(\mu_m)\lambda_m}{2} + g^2(\mu_m)\lambda_m^2 \right) v_2^2.$$

На основании Леммы 1,

$$p_{X'_n}(v) = |J_n(v)| p_{Z_n}(u) = J_n(v) f_B(u) \left[1 + \frac{L_1(u)}{\sqrt{n}} + \frac{L_2(u)}{n} + O(n^{-3/2}) \right], \quad (12)$$

причем, для достаточно больших n , благодаря (10),

$$L_1(u) = L_1(vA) + \frac{1}{2\sqrt{n}} \langle \text{grad } L_1(vA), v^2(V+A)A \rangle + O(n^{-1}), \quad (13)$$

$$L_2(u) = L_2(vA) + O(n^{-1/2}).$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{2} u B^{-1} u^T = -\frac{1}{2} v \Sigma^{-1} v^T + \frac{1}{\sqrt{n}} D_1(v) + \frac{1}{n} D_2(v) + O(n^{-3/2}),$$

где

$$D_1(v) = -\frac{1}{2} v \Sigma^{-1} (V+A) (v^2)^T,$$

$$D_2(v) = -\frac{1}{6} v A B^{-1} a(v)^T - \frac{1}{8} v^2 (V+A) \Sigma^{-1} (V+A) (v^2)^T.$$

Благодаря (10), (11) и (13), формула (12) записывается в виде

$$\begin{aligned} p_{X'_n}(v) &= \det A \cdot f_B(vA) \left[1 + \frac{D_1(v)}{\sqrt{n}} + \frac{D_2(v) + \frac{D_1^2(v)}{2}}{n} \right] \left[1 + \frac{\langle v(V+A), \mathbf{1}_2 \rangle}{\sqrt{n}} + \frac{J_2(v)}{\det A \cdot n} \right] \times \\ &\times \left[1 + \frac{L_1(vA)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \left(L_2(vA) + \frac{1}{2} \langle \text{grad } L_1(vA), v^2(V+A)A \rangle \right) + O(n^{-3/2}) \right] = \\ &= f_\Sigma(v) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\langle v(V+A), \mathbf{1}_2 \rangle + D_1(v) + L_1(vA) \right) + \frac{1}{n} \left(D_2(v) + \frac{D_1^2(v)}{2} + \frac{J_2(v)}{\det A} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_1(v) \langle v(V+A), \mathbf{1}_2 \rangle + L_1(vA) \left(\langle v(V+A), \mathbf{1}_2 \rangle + D_1(v) \right) + L_2(vA) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \langle \text{grad } L_1(vA), v^2(V+A)A \rangle \right) + O(n^{-3/2}) \right]. \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 1. Как несложно проверить, отображение $(u_1, u_2) \mapsto (v_1, v_2)$, переводящее вектор X'_n из Леммы 2 в вектор X_n , определяется формулами

$$v_1 = \frac{u_2 \mu_k - u_1 \mu_m}{\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{n}} + \mu_m - \mu_k}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{n}(\mu_m - \mu_k)}{\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{n}} + \mu_m - \mu_k} - \sqrt{n}.$$

Отсюда

$$u_1 = -\frac{v_1 + v_2\mu_k}{\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1}, \quad u_2 = -\frac{v_1 + v_2\mu_m}{\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1} \implies u = -\frac{1}{\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1}vP. \quad (14)$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_1} = \frac{\partial u_2}{\partial v_1} = -\frac{1}{\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v_2} = -\frac{\mu_k - \frac{v_1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1\right)^2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial v_2} = -\frac{\mu_m - \frac{v_1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1\right)^2},$$

находим Якобиан нашего отображения:

$$J_n(v) = \frac{\mu_m - \mu_k}{\left(\frac{v_2}{\sqrt{n}} + 1\right)^3}.$$

Пользуясь формулой Тейлора, для достаточно больших n получаем

$$u = -vP \left[1 - \frac{v_2}{\sqrt{n}} + \frac{v_2^2}{n} + O(n^{-3/2}) \right], \quad (15)$$

$$J_n(v) = (\mu_m - \mu_k) \left[1 - \frac{3v_2}{\sqrt{n}} + \frac{6v_2^2}{n} + O(n^{-3/2}) \right]. \quad (16)$$

Следовательно, на основании Леммы 2,

$$p_{X_n}(v) = |J_n(v)| p_{X'_n}(u) = J_n(v) f_\Sigma(u) \left[1 + \frac{T_1(u)}{\sqrt{n}} + \frac{T_2(u)}{n} + O(n^{-3/2}) \right], \quad (17)$$

причем, для достаточно больших n , благодаря (15),

$$T_1(u) = T_1(-vP) + \frac{v_2}{\sqrt{n}} \langle \text{grad } T_1(-vP), vP \rangle + O(n^{-1}), \quad (18)$$

$$T_2(u) = T_2(-vP) + O(n^{-1/2}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} u\Sigma^{-1}u^T &= vP\Sigma^{-1}P^T v^T \left[1 - \frac{v_2}{\sqrt{n}} + \frac{v_2^2}{n} + O(n^{-3/2}) \right]^2 = \\ &= vW^{-1}v^T \left[1 - \frac{2v_2}{\sqrt{n}} + \frac{3v_2^2}{n} + O(n^{-3/2}) \right]. \end{aligned}$$

Благодаря (15), (16) и (18), формула (17) записывается в виде

$$\begin{aligned} p_{X_n}(v) &= f_W(v) \left[1 - \frac{3v_2}{\sqrt{n}} + \frac{6v_2^2}{n} + O(n^{-3/2}) \right] \left[1 + \frac{v_2}{\sqrt{n}} vW^{-1}v^T - \frac{v_2^2}{2n} \left(3vW^{-1}v^T - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. -(vW^{-1}v^T)^2 \right) \right] \left[1 + \frac{T_1(-vP)}{\sqrt{n}} + \frac{v_2 \langle \text{grad } T_1(-vP), vP \rangle + T_2(-vP)}{n} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_W(v) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(v_2(vW^{-1}v^T - 3) + T_1(-vP) \right) + \frac{1}{n} \left[6v_2^2 - \frac{v_2^2}{2} \left(3vW^{-1}v^T - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. -(vW^{-1}v^T)^2 \right) + v_2 \langle \text{grad } T_1(-vP), vP \rangle + T_2(-vP) - 3v_2^2 \cdot vW^{-1}v^T - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 3v_2 T_1(-vP) + v_2 \cdot vW^{-1}v^T T_1(-vP) \right] + O(n^{-3/2}) \right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 2. В силу Теоремы 1,

$$A_n = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : f_W(v) \left[1 + \frac{Q_1(v)}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2(v)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] \geq v_{\alpha,n} \right\},$$

где $v_{\alpha,n}$ определяется условием

$$\int_{A_n} f_W(v) \left[1 + \frac{Q_1(v)}{\sqrt{n}} + \frac{Q_2(v)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] dv = \alpha. \quad (19)$$

В полярных координатах (19) имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_{A_n} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} \left[1 + \frac{H_1(r, \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{H_2(r, \phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] dr d\phi = \alpha, \quad (20)$$

где

$$A_n = \left\{ (r, \phi) : \frac{e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2}}{2\pi\sqrt{\det W}} \left[1 + \frac{H_1(r, \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{H_2(r, \phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] \geq v_{\alpha,n} \right\}.$$

Логарифмируя неравенство, определяющее множество A_n , и применяя формулу Тейлора, для достаточно больших n получаем

$$A_n = \left\{ (r, \phi) : \frac{r^2\sigma^2(\phi)}{2} - \frac{H_1(r, \phi)}{\sqrt{n}} - \frac{H_2(r, \phi) - \frac{H_1^2(r, \phi)}{2}}{n} + O(n^{-3/2}) \leq v'_{\alpha,n} \right\},$$

где $v'_{\alpha,n} = -\ln(v_{\alpha,n} 2\pi\sqrt{\det W})$.

Будем искать множество A_n в виде:

$$A_n = \{(r, \phi) : 0 \leq r \leq r_n(\phi), \phi \in [0, 2\pi)\},$$

где

$$r_n(\phi) = r_0(\phi) \left[1 + \frac{r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_2(\phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right]. \quad (21)$$

В этом случае граница множества A_n определяется равенством

$$\frac{r_n^2(\phi)\sigma^2(\phi)}{2} - \frac{H_1(r_n(\phi), \phi)}{\sqrt{n}} - \frac{H_2(r_n(\phi), \phi) - \frac{H_1^2(r_n(\phi), \phi)}{2}}{n} + O(n^{-3/2}) = v'_{\alpha,n}. \quad (22)$$

Поскольку

$$\int_{\{v: f_W(v) \geq z\}} f_W(v) dv = \alpha \quad \implies \quad z = \frac{1 - \alpha}{2\pi\sqrt{\det W}},$$

то $v'_{\alpha, n} \rightarrow -\ln(1 - \alpha)$ при $n \rightarrow \infty$.

Подставляя (21) в (22), при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{r_0^2(\phi)\sigma^2(\phi)}{2} = -\ln(1 - \alpha) \quad \implies \quad r_0^2(\phi) = \frac{-2\ln(1 - \alpha)}{\sigma^2(\phi)} = \frac{\beta^2}{\sigma^2(\phi)}. \quad (23)$$

Следовательно, ввиду (21),

$$\frac{r_n^2(\phi)\sigma^2(\phi)}{2} = \frac{\beta^2}{2} \left[1 + \frac{2r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_1^2(\phi) + 2r_2(\phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right].$$

Применяя формулу Тейлора, для достаточно больших n получаем

$$H_1(r_n(\phi), \phi) = H_1(r_0(\phi), \phi) + \frac{H'_1(r_0(\phi), \phi)r_0(\phi)r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}),$$

$$H_2(r_n(\phi), \phi) = H_2(r_0(\phi), \phi) + O(n^{-1/2}).$$

Поэтому (22) записывается в виде

$$\frac{\beta^2 r_1(\phi) - H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{\beta^2(r_1^2(\phi) + 2r_2(\phi)) - 2H_2(r_0(\phi), \phi) + H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{2n} - \frac{H'_1(r_0(\phi), \phi)r_0(\phi)r_1(\phi)}{n} + O(n^{-3/2}) = v'_{\alpha, n} + \ln(1 - \alpha).$$

Левая и правая части последнего равенства стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Ввиду представления левой части, правая часть также должна иметь вид $z_1/\sqrt{n} + z_2/n + O(n^{-3/2})$. Приравнявая коэффициенты при $1/\sqrt{n}$, $1/n$, получаем

$$z_1 = \beta^2 r_1(\phi) - H_1(r_0(\phi), \phi), \quad (24)$$

$$z_2 = \frac{\beta^2(r_1^2(\phi) + 2r_2(\phi)) + H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{2} - H_2(r_0(\phi), \phi) - H'_1(r_0(\phi), \phi)r_0(\phi)r_1(\phi).$$

Вернемся к равенству (20):

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_n(\phi)} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} \left[1 + \frac{H_1(r, \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{H_2(r, \phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] dr d\phi = \alpha. \quad (25)$$

Внутренний интеграл для достаточно больших n записывается в виде

$$\int_0^{r_0(\phi)} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} \left[1 + \frac{H_1(r, \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{H_2(r, \phi)}{n} + O(n^{-3/2}) \right] dr + r_0(\phi) e^{-r_0^2(\phi)\sigma^2(\phi)/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + \frac{H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sqrt{n}} + \frac{H_2(r_0(\phi), \phi)}{n} \right] \left[\frac{r_0(\phi)r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_0(\phi)r_2(\phi)}{n} \right] + \\ & + \frac{r_0^2(\phi)r_1^2(\phi)}{2n} (1 - r_0^2(\phi)\sigma^2(\phi)) e^{-r_0^2(\phi)\sigma^2(\phi)/2} + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\phi)} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} dr d\phi = \alpha,$$

то из (25) и (26) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\phi)} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} H_1(r, \phi) dr d\phi + \\ & + \frac{1 - \alpha}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi)r_1(\phi) d\phi = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\beta^2\gamma + \frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) \left[r_2(\phi) + r_1(\phi)H_1(r_0(\phi), \phi) + \frac{1 - \beta^2}{2}r_1^2(\phi) \right] d\phi = 0. \quad (28)$$

Из соотношений (27) и (28) найдем $r_1(\phi)$ и $r_2(\phi)$.

Рассмотрим интеграл из первого слагаемого в (27) и учтем, что $H_1(r, \phi) = r^3 H_{11}(\phi) + r H_{12}(\phi)$, где $H_{1i}(\phi) = H_{1i}(\cos \phi, \sin \phi)$, $i = 1, 2$, суть однородные многочлены соответственно третьей и первой степени. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\phi)} r e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} H_1(r, \phi) dr d\phi = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0(\phi)} e^{-r^2\sigma^2(\phi)/2} [r^4 H_{11}(\phi) + r^2 H_{12}(\phi)] dr d\phi = \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{H_{11}(\phi) d\phi}{\sigma^5(\phi)} \int_0^\beta u^4 e^{-u^2/2} du + \int_0^{2\pi} \frac{H_{12}(\phi) d\phi}{\sigma^3(\phi)} \int_0^\beta u^2 e^{-u^2/2} du = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

ибо

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_{11}(\phi) d\phi}{\sigma^5(\phi)} = \int_0^{2\pi} \frac{H_{12}(\phi) d\phi}{\sigma^3(\phi)} = 0 \quad (30)$$

ввиду однородности многочленов $H_{11}(\phi)$ третьей степени и $H_{12}(\phi)$ первой степени.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (27), используя равенства (24) и (23). Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \alpha}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi)r_1(\phi) d\phi = \frac{1 - \alpha}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{z_1 + H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi = \\ & = (1 - \alpha)z_1, \end{aligned} \quad (31)$$

поскольку

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sigma^2(\phi)} = 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta^3}{\sigma^3(\phi)} H_{11}(\phi) + \frac{\beta}{\sigma(\phi)} H_{12}(\phi) \right] \frac{d\phi}{\sigma^2(\phi)} = 0$$

благодаря (30). Из (27), (29) и (31) следует, что $z_1 = 0$, а из (24) получаем

$$r_1(\phi) = \beta^{-2} H_1(r_0(\phi), \phi). \quad (32)$$

Займемся интегралом в (28). Ввиду (23) и (32), подинтегральная функция записывается в виде:

$$A(\phi) = r_0^2(\phi) r_2(\phi) + \frac{r_0^2(\phi) H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{2\beta^2} \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right),$$

а второе соотношение в (24) влечет за собой

$$z_2 = \beta^2 r_2(\phi) + \frac{H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{H_1'(r_0(\phi), \phi) H_1(r_0(\phi), \phi)}{\beta \sigma(\phi)} - H_2(r_0(\phi), \phi) \quad (33)$$

$$\implies A(\phi) = \frac{z_2}{\sigma^2(\phi)} + \frac{H_1'(r_0(\phi), \phi) H_1(r_0(\phi), \phi)}{\beta \sigma^3(\phi)} + \frac{H_2(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)}.$$

Поэтому (28) имеет вид: $\beta^2 \gamma + z_2 + E + F = 0$, откуда $z_2 = -\beta^2 \gamma - E - F$. Здесь

$$E = \frac{1}{2\pi \beta \sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{H_1'(r_0(\phi), \phi) H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^3(\phi)} d\phi,$$

$$F = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{H_2(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi.$$

Подставляя z_2 в (33), получаем формулу для $r_2(\phi)$.

Доказательство Теоремы 3 повторяет доказательство Теоремы 2.

Доказательство Теоремы 4. Заметим, что ввиду Теоремы 3

$$\begin{aligned} \lambda_2(A_{n,0}) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) \left(1 - \frac{\gamma}{n} + O(n^{-3/2})\right)^2 d\phi = \\ &= \pi \beta^2 \sqrt{\det W} \left(1 - \frac{2\gamma}{n} + O(n^{-3/2})\right). \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lambda_2(A_n) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) \left(1 + \frac{r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_2(\phi)}{n} + O(n^{-3/2})\right)^2 d\phi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) \left(1 + \frac{2r_1(\phi)}{\sqrt{n}} + \frac{r_1^2(\phi) + 2r_2(\phi)}{n} + O(n^{-3/2})\right) d\phi, \end{aligned}$$

причем (см. (27) и (28))

$$\int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) r_1(\phi) d\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) r_2(\phi) d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi) r_1^2(\phi) d\phi =$$

$$= -2\pi\beta^2\gamma\sqrt{\det W} + \frac{\beta^2}{2} \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi)r_1^2(\phi)d\phi - \int_0^{2\pi} r_0^2(\phi)r_1(\phi)H_1(r_0(\phi), \phi)d\phi.$$

Поэтому ввиду (32)

$$\begin{aligned} \lambda_2(A_n) &= \pi\beta^2\sqrt{\det W} \left[1 + \frac{1}{n} \left(-2\gamma + \frac{1}{2\pi\beta^2\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{H_1^2(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\pi\sqrt{\det W}} \int_0^{2\pi} \frac{r_1(\phi)H_1(r_0(\phi), \phi)}{\sigma^2(\phi)} d\phi \right) + O(n^{-3/2}) \right] = \\ &= \pi\beta^2\sqrt{\det W} \left[1 - \frac{2\gamma + \kappa}{n} + O(n^{-3/2}) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_2(A_{n,0})}{\lambda_2(A_n)} = \frac{1 - \frac{2\gamma}{n} + O(n^{-3/2})}{1 - \frac{2\gamma + \kappa}{n} + O(n^{-3/2})} = 1 + \frac{\kappa}{n} + O(n^{-3/2}).$$

Доказательство Теоремы 5. Имеем

$$\frac{R(\theta, B_{\bar{A}_{n,0}})}{R(\theta, B_{A_{n,0}})} = \frac{(\mu_m - \mu_k)^2 E_{(0,1)} s^2}{E_{(0,1)} (x_{m:n} - x_{k:n})^2} \cdot \frac{\lambda_2(\bar{A}_{n,0})}{\lambda_2(A_{n,0})}. \quad (35)$$

Ввиду (34)

$$\lambda_2(A_{n,0}) = \pi\beta^2\sqrt{\det W} \left(1 - \frac{2\gamma}{n} + O(n^{-3/2}) \right). \quad (36)$$

Аналогично, из доказательства Теоремы 3.3 в [2] следует, что

$$\lambda_2(\bar{A}_{n,0}) = \pi\beta^2\sqrt{\det \bar{W}} \left(1 - \frac{2\bar{\gamma}}{n} + O(n^{-3/2}) \right). \quad (37)$$

Остается подставить (36) и (37) в (35).

Библиографический список

1. Дэвид Г. Порядковые статистики / Г. Дэвид. М.: Наука, 1979.
2. Alama-Bučko M. Asymptotic analysis of minimum volume confidence regions for location-scale families / M. Alama-Bučko, A.V. Nagaev, A. Zaigraev // Applicationes Mathematicae. 2006.
3. Czarnowska A. Confidence regions of minimal area for the scale-location parameter and their applications / A. Czarnowska, A.V. Nagaev // Applicationes Mathematicae. 2001. Vol. 28, 2. P. 125–142.
4. Jeyaratnam S. Minimum volume confidence regions / S. Jeyaratnam // Stat. Probab. Letters. 1985. N. 3. P. 307–308.

5. *Reiss R.-D.* On the accuracy of the normal approximation for quantiles / *R.-D. Reiss* // *Ann. Probab.* 1974. Vol. 2. P. 741–744.
6. *Reiss R.-D.* The asymptotic normality and asymptotic expansions for the joint distribution of several order statistics / *R.-D. Reiss* // *Limit Theorems of Probability Theory (Colloq., Keszthely, 1974)*. PP. 297–340. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*. Vol. 11. North-Holland, Amsterdam, 1975.
7. *Reiss R.-D.* Asymptotic expansions for sample quantiles / *R.-D. Reiss* // *Ann. Probab.* 1976. Vol. 4. N. 2. P. 249–258.
8. *Reiss R.-D.* Approximation of product measures with an application to order statistics / *R.-D. Reiss* // *Ann. Probab.* 1981. Vol. 9. N. 2. P. 335–341.
9. *Reiss R.-D.* *Approximate Distributions of Order Statistics. With Applications to Nonparametric Statistics.* / *R.-D. Reiss* // *Springer Series in Statistics*. Springer-Verlag. New York, 1989.